

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PISA  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Informatica



# Heavy-Tailed GARCH Models for Data Financial Analysis

Candidato

Diego Buoncristiani

Tutore Accademico

Prof.ssa Ornella Menchi

Tutori Aziendali

Dr. Ercan E. Kuruoglu

Prof.ssa Lea Petrella

*Semplicemente a tutti.*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Monte Carlo Markov Chain</b>	<b>8</b>
1.1 Il principio Monte Carlo . . . . .	10
1.2 Catene di Markov . . . . .	11
1.3 Metodi MCMC . . . . .	15
1.3.1 L'algoritmo Metropolis-Hastings . . . . .	16
1.3.2 Il Gibbs Sampler . . . . .	18
<b>2 Modelli stocastici</b>	<b>21</b>
2.1 Processi stocastici . . . . .	21
2.2 Distribuzione di probabilità . . . . .	22
2.2.1 Distribuzione Normale . . . . .	23
2.2.2 Distribuzione Alpha-Stabile . . . . .	26
2.3 Misture di distribuzione . . . . .	34
2.3.1 Definizioni . . . . .	35
2.3.2 Distribuzione Misture-Normale . . . . .	35
2.3.3 Distribuzione Misture-Stabile . . . . .	37

<b>3</b>	<b>Processi Stocastici per financial time series</b>	<b>41</b>
3.1	GARCH . . . . .	42
3.2	GARCH-Stabile . . . . .	44
3.3	GARCH-MistureStabile . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Simulazioni</b>	<b>48</b>
4.1	Sviluppo del modello applicativo . . . . .	49
4.1.1	Problematiche affrontate . . . . .	49
4.2	Parametri distribuzione $\alpha$ -stabile . . . . .	50
4.2.1	Simulazione $\alpha$ stimato . . . . .	50
4.2.2	Simulazione $\beta$ stimato . . . . .	51
4.2.3	Simulazione $\gamma$ stimato . . . . .	52
4.2.4	Simulazione $\delta$ stimato . . . . .	52
4.2.5	Simulazione pesi stimati . . . . .	53
4.3	Risultati Empirici: Confronto fra modelli . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>60</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>68</b>

# Introduzione

Il crescente bisogno di migliorare ed ottimizzare dei processi che sono già ampiamente impiegati, è un'idea interessante ed avvicente. Nel nostro lavoro c'è proprio questo concetto. Infatti, non era pensabile fino a qualche anno fa, utilizzare delle routine per il calcolo della distribuzione  $\alpha$ -stabile. Oggi questa possibilità sta portando ad un sensibile allargamento degli orizzonti scientifici.

Nel campo finanziario il prevedere come si evolveranno i titoli azionari o quale variazione avranno i tassi di cambio di una moneta piuttosto che i tassi di interesse, è di grande importanza per i grossi movimenti economici che determina. I tempi di previsione devono essere variabili, nel senso che deve esistere la possibilità di prevedere sia in maniera giornaliera che magari settimanale, se non addirittura in maniera mensile.

L'intreccio, il connubio tra i nuovi aspetti scientifici e la necessità di creare profitto utilizzando strumenti previsionali, sono alla base dell'applicazione che è stata sviluppata in questo lavoro. Infatti, la strada era già aperta da precedenti lavori ed il nostro è un ulteriore approfondimento delle capacità di prevedere attraverso dei modelli di analisi finanziaria. I modelli finanziari utilizzati per questo scopo sono i Generalized AutoRegressive Conditional

Heteroskedasticity, GARCH, e l'ottimizzazione che introduciamo è la possibilità di passare da una distribuzione di tipo Gaussiano ad una più generica di tipo  $\alpha$ -stabile, che non è la novità. L'aspetto innovativo è l'impiego della mistura di questo tipo di densità di probabilità. Tutto questo è stato reso possibile attraverso le simulazioni effettuate con il metodo Monte Carlo Markov Chain, MCMC, un algoritmo statistico che garantisce la convergenza.

L'innovazione apportata è l'utilizzo di un sistema di misture  $\alpha$ -stabili applicando strategie di simulazione MCMC.

I dati finanziari hanno delle caratteristiche che rendono la modellazione di non facile trattazione e che si sposano, sotto certi aspetti, con le caratteristiche della distribuzione  $\alpha$ -stabile.

L'interesse per questo tipo di dati è mosso dalle proprietà di skewness e di heavy-tailed, che presentano molto spesso tali dati. Queste proprietà sono centrali nelle distribuzioni stabili e sono ben rappresentabili attraverso l'asimmetria e l'eccesso di leptokurtosis che tali probabilità possono interpretare.

L'utilizzo della mistura di  $\alpha$ -stabili è dettato dal voler esplorare in nuovi campi applicativi tale impiego. E' altrettanto interessante, capire se esistono delle sottopopolazioni nel dataset che ogni volta andiamo ad analizzare. Ciò, viene reso possibile dalle componenti che intervengono nella descrizione del fenomeno osservato.

Un altro fattore di interesse è il volatility clustering, cioè momenti di alta volatilità si alternano a momenti di bassa volatilità e sono una forma di eteroschedacità. Questo stylized facts è stato investigato nei pioneristici lavori di Mandelbrot(1963) e di Fama(1965).

L'utilizzo dei GARCH è motivato dall'importanza che tali modelli hanno nel catturare i movimenti della volatilità e rappresentano la classe di modelli maggiormente impiegata in questo ambito.

L'impiego di tecniche MCMC è dovuto, in primo luogo, all'alta frequenza che hanno i dati finanziari, che solitamente sono raccolti in maniera giornaliera. In secondo luogo, perchè tali tecniche vengono applicate per risolvere problemi di integrazione e di ottimizzazione.

Secondo queste ed altre motivazioni, che saranno presentate in seguito, abbiamo implementato la nostra applicazione.

Nel prossimo capitolo passeremo attraverso lo studio di metodi MCMC, partendo da un'analisi del principio Monte Carlo, introducendo, poi, le catene di Markov ed arrivando ai metodi utilizzati nel nostro lavoro. Nel terzo capitolo vedremo le caratteristiche e le proprietà delle distribuzioni prese in considerazione e le loro misture. Nel quarto capitolo analizzeremo i modelli finanziari utilizzati per il nostro lavoro. Nel quinto capitolo cercheremo di dare il nostro contributo scientifico, mostrando i risultati ottenuti .

# Capitolo 1

## Monte Carlo Markov Chain

Alla base del nostro lavoro c'è la necessità di simulare dei parametri. Tutto ciò, è reso possibile dall'utilizzo di tecniche specifiche che rientrano nella classe degli algoritmi MCMC, acronimo di Monte Carlo Markov Chain. Questi algoritmi sono significativi in vari aspetti scientifici. Infatti, hanno importanza sia in statistica che in econometria, piuttosto che in fisica ed informatica.

In questo capitolo, vedremo i due algoritmi impiegati per lo sviluppo delle tecniche di simulazione di vari parametri. Questi sono l'algoritmo di Gibbs e il Metropolis-Hastings(1970). Il Metropolis-Hastings è una generalizzazione dell'algoritmo di Metropolis(1953).

Le tecniche di MCMC sono solitamente impiegate per risolvere problemi di integrazione e ottimizzazione in grandi spazi dimensionali[1].

L'idea che è alla base di questa classe di algoritmi è quella di simulare un *random walk* nello spazio  $X$ , il quale convergerà ad una distribuzione stazionaria che è la distribuzione posteriore congiunta  $p(X|y)$ , detta *distribuzione*

*target*[1]. Questa strategia determinerà la generazione di campioni  $x^{(i)}$ .

**Definizione 1.1** *Per random walk si intende un processo  $\{S_n, n \geq 0\}$ , dove  $S_0 = 0$  e  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , per  $n \geq 1$ .*

Per un maggior approfondimento vedere[14].

Vediamo alcuni esempi in cui può essere utile l'uso di MCMC:

Nell'inferenza bayesiana, dato un numero sconosciuto di variabili  $x \in X$  e di dati  $y \in Y$  è interessante risolvere le integrazioni per ottenere la distribuzione posteriore  $p(x|y)$  date la distribuzione a priori  $p(x)$  e la probabilità  $p(y|x)$ , quindi, deve essere calcolato il fattore di normalizzazione:

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{\int_x p(y|x')p(x')dx'}$$

oppure, in meccanica statistica, in cui c'è la necessità di calcolare la funzione di partizione  $Z$  di un sistema con  $s$  stati e Hamiltoniana  $E(s)$

$$Z = \sum_s \exp \left[ -\frac{E(s)}{kT} \right]$$

dove  $k$  è la costante di Boltzmann e  $T$  denota la temperatura del sistema. La somma di grandi numeri su varie configurazioni diventa proibitiva(Baxter,1982).

Per questi esempi o per ulteriori esempi applicativi dei metodi MCMC vedere [1].

Nelle prossime sezioni vedremo alcuni aspetti dei metodi Monte Carlo e per Markov Chain, in modo da poter fare una buona introduzione per gli algoritmi MCMC che abbiamo considerato nel nostro lavoro.

## 1.1 Il principio Monte Carlo

I metodi Monte Carlo vengono applicati solitamente per risolvere problemi di integrazione numerica e di media. Sono più lenti rispetto ai più classici algoritmi, ma sono più semplici da implementare[2].

Ma vediamo il principio che sta alla base di questa categoria di metodi. Dobbiamo simulare un insieme di campioni i.i.d.  $\{x^{(i)}\}_{i=1}^N$  da una target distribuzione definita su un grande spazio dimensionale  $X$ . Gli  $N$  campioni determinati vengono utilizzati per poter approssimare la distribuzione target con l'empirica funzione point-mass

$$p_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x^{(i)}}(x)$$

dove  $\delta_{x^{(i)}}(x)$  rappresenta la delta-Dirac massa localizzata al punto  $x^{(i)}$ . Di conseguenza, per poter approssimare un integrale  $I(f)$  con le somme degli  $I_N(f)$  che convergono quasi certamente(a.s.), quindi con probabilità pari a 1:

$$I_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^{(i)}) \xrightarrow{a.s.} I(f) = \int_X f(x)p(x)dx \text{ per } N \rightarrow \infty$$

lo stimatore  $I_N(f)$  è imparziale e quasi sicuramente convergerà a  $I(f)$ . Nel caso in cui  $p(x)$  abbia una forma standard, come ad esempio la Normale, si campiona con l'ausilio di ben determinate routine, mentre nel caso opposto devono essere introdotte ulteriori tecniche come ad esempio: il rejection sampling, l'importance sampling e *MCMC*. Interessanti discussioni sull'argomento sono presenti in [1].

## 1.2 Catene di Markov

Definiamo fin da subito che cosa rappresenta una catena di Markov.

**Definizione 1.2** *Si chiama catena di Markov un processo stocastico tale che*

1.  $T=\mathbb{N}$  oppure è un sottointervallo di  $\mathbb{N}$
2. Le v.a.  $X_n$  assumono tutte valori nello stesso insieme discreto  $E$
3. (Proprietà di Markov) Esistono dei numeri positivi  $p_{ij}(N)$ , dove  $i, j \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tali che, ogniqualevolta le probabilità condizionali hanno senso,

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = p_{ij}(n) \quad (1.1)$$

dove gli elementi di  $E$  sono detti stati della catena.

Come viene spiegato in [2], la Proprietà di Markov ha il significato che le  $X_n$  non sono indipendenti fra loro, il valore assunto da  $X_n$  da delle informazione su  $X_{n+1}$ , però i valori  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$ , non danno informazioni ulteriori.

Vediamo il legame che intercorre tra una catena detta *omogenea* e la *matrice di transizione*. Intanto, una *matrice di transizione* è determinata se il numero di stati, cioè l'insieme  $E$ , è finito e i valori di  $p_{ij}$  costituiscono una matrice quadrata  $P \triangleq P(x^{(i)} | x^{(i-1)})$  e rimane invariante per tutti gli  $i$ . Le proprietà sono :

1. tutti gli elementi sono  $\geq 0$

2.  $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ , ovvero la somma degli elementi di una riga è pari a 1.

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = \sum_{j \in E} P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = 1$$

Come sostenuto in [1], l'evoluzione della catena in uno spazio  $X$  dipende solamente sul corrente stato della catena e una fissata matrice di transizione. Abbiamo visto come una delle condizioni di esistenza di un processo markoviano sia che la somma degli elementi su ogni riga sia pari a uno, nel caso in cui lo sia anche la somma di ogni colonna, avremmo:

$$\sum_{i \in E} p_{ij} = 1$$

la matrice di transizione  $P$  si dice *bistocastica*.

Di seguito proponiamo un esempio interessante per Markov Chain.

**Esempio 1.2.1** *The Gambler's Ruin.*

*Due giocatori A e B hanno un capitale iniziale pari rispettivamente ad a e b unità e giocano una serie di partite in ciascuna delle quali A cede a B un'unità con probabilità q e ne riceve una con probabilità p=1-q. Il gioco si ferma non appena uno dei due giocatori si trova a 0. Il modello che possiamo creare gode della proprietà di Markov, vista all'interno della definizione 1.2. Indichiamo con il capitale del giocatore A con  $\{X_n\}_n$ , questo avrà senso dire che dipende da quello di  $X_{n-1}$ , ma una volta noto  $X_{n-1}$  non ha importanza la conoscenza dell'evoluzione del capitale di A prima della (n-1)esima partita. Lo spazio degli stati E può essere scelto nell'insieme costituito dagli interi compresi tra 0 e a+b (i possibili valori del capitale di A). La matrice di transizione è*

determinata nel seguente modo:

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} p & \text{se } j = i + 1 \\ q & \text{se } j = i - 1 \\ 0 & \text{se altrimenti} \end{cases}$$

D'altra parte

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = 0\} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 0 \\ 0 & \text{se altrimenti} \end{cases}$$

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = a + b\} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = a + b \\ 0 & \text{se altrimenti} \end{cases}$$

(Non appena  $X_n$  giunge in 0 oppure in  $a + b$  il gioco si ferma). Cioè la matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alle possibili domande che possono essere di interesse si può rispondere attraverso l'uso delle catene di Markov.

Questo esempio è l'unione di due esempi descritti in [2].

Ci sono due interessanti proprietà a cui risponde un processo stocastico Catena di Markov:

**Proprietà 1.1** *Per qualsiasi stato della catena di Markov c'è una positiva probabilità di visitare tutti gli altri stati, questa è la Irreducibilità.*

**Proprietà 1.2** *La catena markoviana si dice Aperiodica se non rimane intrappolata in cicli.*

Sia  $v$  una probabilità su  $E$ ,  $v$  si dice *invariante* o *stazionaria* se

$$v = vP$$

La probabilità invariante introduce il concetto di probabilità *reversibile*, dove  $\pi$  rappresenta l'unica probabilità invariante della matrice  $P$ , se regolare, per maggiori approfondimenti vedi il capitolo 5 di [2].

Una probabilità  $\pi$  su  $E$  si dice reversibile se

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \tag{1.2}$$

per ogni  $i, j \in E$ . La precedente equazione 1.2 è detta equazione del *bilancio dettagliato*.

Come mostrato in [1] una condizione sufficiente, ma non necessaria, per assicurare che una particolare  $p(x)$  è la desiderata distribuzione invariante è la condizione del bilancio dettagliato.

Dopo aver introdotto separatamente alcuni concetti e proprietà della Cate-

na di Markov e dei metodi Monte Carlo, passiamo, adesso, all'applicazioni MCMC.

### 1.3 Metodi MCMC

Abbiamo già presentato lo scopo dei metodi MCMC, ma ribadiamone il concetto. Gli algoritmi MCMC sono impiegati per generare dei campioni  $x^{(i)}$  esplorando uno spazio, che abbiamo già definito come  $X$ , usando meccanismi di catene di Markov. Come riportato in [1] il meccanismo è costruito così che la catena passi la maggior parte del tempo nelle regioni più importanti ed i campioni  $x^{(i)}$  mimeranno i campioni dalla distribuzione target  $p(x)$ .

Per riprendere i concetti espressi in 1.2, diciamo che i campionatori MCMC sono irriducibili e catene Markoviane aperiodiche che hanno la distribuzione target come distribuzione invariante[1]. Di seguito riportiamo un classico esempio per chiarire le dinamiche dei metodi MCMC e che è stato estratto da [1].

#### **Esempio 1.3.1** *PageRank.*

*Per ricercare informazioni sul Web, seguiamo, solitamente, un insieme di link. Possiamo interpretare le pagine web come nodi e i link come le connessioni in un grafico di transizione della catena di Markov. Noi vogliamo evitare di rimanere intrappolati in cicli, cioè vogliamo che sia rispettata la proprietà di aperiocità, mostrata in 1.2, e vogliamo esser capaci di accedere a tutte le pagine web esistenti, per la proprietà di irriducibilità, vedi 1.1.*

*PageRank richiede la definizione di una matrice di transizione con due componenti  $T = L + E$ . Descriviamo questi componenti. La matrice  $L$  è una*

matrice di link con righe e colonne che rappresentano le corrispondenti pagine web, così che gli elementi  $L_{ij}$  rappresentano il numero normalizzato di link dalla page web  $i$  alla pagina  $j$ . La matrice  $E$  rappresenta una sorta di rumore che aggiunta a  $L$  assicura irriducibilità e aperiodicità. Quindi, c'è la possibilità di passare sempre, con qualche probabilità, da qualche parte del web. Dalla discussione otteniamo che

$$p(x^{(i+1)})[L + E] = p(x^i)$$

in questo caso  $p(x)$  rappresenta il rank di una pagina web  $x$ .

In spazi a stato continuo la matrice di transizione  $P$  diventa un *kernel* o *nucleo di transizione*  $K$  e  $p(x)$  diventa il corrispondente autovettore (eigenfunction), come di seguito riportato:

$$\int p(x^{(i)})K(x^{(i+1)}|x^{(i)})dx^{(i)} = p(x^{(i+1)})$$

Il kernel  $K$  è la densità condizionale di  $x^{(i+1)}$  dato il valore  $x^{(i)}$ .

Adesso, che abbiamo parzialmente descritto i metodi MCMC, entreremo nello specifico descrivendo il caso dei due algoritmi che sono stati la base delle simulazioni effettuate nel nostro lavoro.

### 1.3.1 L'algoritmo Metropolis-Hastings

Un importante algoritmo MCMC è il Metropolis-Hastings (MH) che è stato sviluppato nel 1970 da Hastings, generalizzando il caso particolare di

Metropolis(1953).

Di seguito mostriamo lo pseudocodice relativo all'algoritmo.

1. Inizializza  $x^{(0)}$
2. Per  $i = 0$  fino a  $N - 1$ 
  - Campiona  $u \sim U_{[0,1]}$
  - Campiona  $x^* \sim q(x^*|x^{(i)})$
  - Se  $u < A(x^{(i)}, x^*) = \min\left\{1, \frac{p(x^*)q(x^{(i)}|x^*)}{p(x^{(i)})q(x^*|x^{(i)})}\right\}$   
 $x^{(i+1)} = x^*$

altrimenti

$$x^{(i+1)} = x^{(i)}$$

Analizziamo lo pseudocodice. L'invariante distribuzione è  $p(x)$  e la distribuzione proposta  $q(x^*|x)$  crea un candidato  $x^*$  dato il valore  $x$  accordando con  $q(x^*|x)$ . La catena di Markov si sposta in  $x^*$  con probabilità di accettazione  $A(x^{(i)}, x^*)$ , altrimenti rimane al valore  $x$ .

Vediamo il nucleo di transizione per l'algoritmo Metropolis-Hastings:

$$K_{MH}(x^{(i+1)}|x^{(i)}) = q(x^{(i+1)}|x^{(i)})A(x^{(i)}, x^{(i+1)}) + \delta_{x^{(i)}}(x^{(i+1)})r(x^{(i)}) \quad (1.3)$$

dove  $r(x^{(i)})$  è il termine associato con il rifiuto

$$r(x^{(i)}) = \int_x q(x^*|x^{(i)})(1 - A(x^{(i)}, x^*))dx^*.$$

Vediamo che viene anche soddisfatta la condizione del bilancio dettagliato, infatti:

$$p(x^{(i)})K_{MH}(x^{(i+1)}|x^{(i)}) = p(x^{(i+1)})K_{MH}(x^{(i)}|x^{(i+1)})$$

e come mostrato in precedenza nella sezione 1.2, in conseguenza di questo fatto, allora viene ammessa la distribuzione invariante.

Una caratteristica fondamentale dell'algoritmo descritto è la scelta della deviazione standard per la distribuzione proposta. Infatti, delle scelte inopportune posso portare ad un fallimento del campionamento. Se tutte le mode sono visitate, allora la probabilità di accettazione, presentata come  $A$ , è alta e la catena è detta mix well.

In [1] viene anche mostrato come l'algoritmo di Metropolis sia un caso speciale del più generale algoritmo di Metropolis-Hastings. Infatti, quando si ha una distribuzione proposta simmetrica,  $q(x^*|x^{(i)}) = q(x^{(i)}|x^*)$ , allora l'algoritmo MH è detto algoritmo di Metropolis e la probabilità di accettazione diventa:

$$A(x^{(i)}, x^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(x^*)}{p(x^{(i)})} \right\}$$

Quindi, il vantaggio dell'algoritmo Metropolis-Hasting rispetto al Metropolis è che il primo non vincola la scelta della distribuzione proposta ad essere solo simmetrica, ma accetta anche distribuzioni proposte asimmetriche.

### 1.3.2 Il Gibbs Sampler

Il Gibbs Sampler può essere applicato, quando è possibile suddividere lo spazio  $X$  in sottovettori  $x_1, \dots, x_n$ .

Vediamo lo pseudocodice che interpreta questo metodo MCMC:

1. Inizializza  $x_{0,1:n}$
2. Per  $i = 0$  fino a  $N - 1$ 
  - Campiona  $x_1^{(i+1)} \sim p(x_1|x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ .
  - Campiona  $x_2^{(i+1)} \sim p(x_2|x_1^{(i+1)}, x_3^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ .
  - Campiona  $x_j^{(i+1)} \sim p(x_j|x_1^{(i+1)}, \dots, x_{j-1}^{(i+1)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ .
  - Campiona  $x_n^{(i+1)} \sim p(x_n|x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \dots, x_{n-1}^{(i+1)})$ .

Il Gibbs Sampler è visto come un caso particolare dell'algoritmo Metropolis-Hastings presentato nel precedente paragrafo. Per  $n = 2$  l'algoritmo è anche conosciuto come *data augmentation*.

La proposta distribuzione viene data da:

$$q(x^*|x^{(i)}) = \begin{cases} p(x_j^*|x_{-j}^{(i)}) & \text{se } x_{-j}^* = x_{-j}^{(i)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con corrispondente probabilità di accettazione:

$$A(x^{(i)}, x^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(x^*)q(x^{(i)}|x^*)}{p(x^{(i)})q(x^*|x^{(i)})} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{p(x^*)p(x_j^{(i)}|x_{-j}^{(i)})}{p(x^{(i)})p(x_j^*|x_{-j}^*)} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{p(x_{-j}^*)}{p(x_{-j}^{(i)})} \right\} = 1$$

Quindi, il campione simulato viene sempre accettato. Il parametro  $x_{-j}^i$  rappresenta tutte le componenti dello spazio  $X$ , tranne il parametro  $x_j$ . L'applicazione

cazione dell'algoritmo può avvenire solamente se è possibile creare le probabilità condizionali. Quindi, non vi è più necessità di calcolare la probabilità di accettazione. Tutto ciò, rende più efficiente il Gibbs Sampler, rispetto al Metropolis-Hasting.

# Capitolo 2

## Modelli stocastici

In questo capitolo verranno descritte le distribuzioni di probabilità utilizzate per i modelli finanziari formulati ed implementati. Il capitolo descriverà le proprietà delle distribuzioni *univariate* e delle loro *mixture* sia per la distribuzione normale che per quella stabile.

### 2.1 Processi stocastici

Un processo stocastico  $X = \{X(t), t \in T\}$  è un insieme di variabili aleatorie. Per ciascun  $t$  nell'insieme degli indici  $T$ ,  $X(t)$  è una variabile aleatoria. Nel caso in cui l'insieme degli indici sia un insieme finito, indichiamo  $X$  come un processo stocastico a tempo discreto, mentre se  $T$  è *continuum* diremo che il processo è continuo. Una ulteriore distinzione può essere fatta in processi continui ad *incrementi indipendenti* se  $X(t) - X(t-1)$  per tutto l'insieme di indici  $T$ , sono indipendenti. Nel caso in cui  $X(t+s) - X(t)$  ha la stessa distribuzione per tutti i  $t$ , allora il processo si dice *stazionario*.

## 2.2 Distribuzione di probabilità

Le distribuzioni di probabilità hanno molteplici caratteristiche e proprietà. Ci sono aspetti, per questo lavoro, che riteniamo essere più interessanti.

Nella successiva parte del capitolo mostreremo una comparazione tra le distribuzioni, che sono state utilizzate per analizzare i dati finanziari. Vediamo quali sono le proprietà che saranno prese maggiormente in considerazione. Quella che riteniamo essere una delle principali proprietà per il nostro lavoro, è la *simmetria*(o *asimmetria*) o *skewness* di una distribuzione.

Ma cosa rappresenta la *simmetria* di una distribuzione?

La proprietà di *skewness* di una distribuzione mostra dove sono attesi i valori per una variabile aleatoria  $X$ . Nel caso di simmetria i valori della variabile godono della *proprietà di riflessione*(vedi la proprietà 2.6 per le distribuzioni  $\alpha - stabili$ ), mentre nel caso di asimmetria si dà un'interpretazione, in base al peso del taglio che si determina. Abbiamo introdotto una nuova proprietà nel caso di asimmetria, il *tail*. La massa della distribuzione è concentrata nella zona del *tail* che può essere *positivo* oppure *negativo*. Entreremo nel merito della questione successivamente, quando parleremo di distribuzioni stabili. Le distribuzioni normali non presentano *skewness*, mentre nel caso di distribuzioni stabili abbiamo considerato i due casi, quello di simmetria e quello di asimmetria.

Partiremo analizzando le distribuzioni univariate e successivamente passeremo allo studio delle loro misture.

### 2.2.1 Distribuzione Normale

Le distribuzioni normali sono quelle di gran lunga più utilizzate in ogni aspetto della scienza. Anche nello sviluppo del nostro lavoro, il punto di partenza è stato quello di determinare un modello che si basasse su questo tipo di legge. La principale motivazione, che determina un uso così ampio di questa probabilità, è il *teorema del limite centrale*. Ciò non rappresenta l'unico sostegno alla suddetta legge, ma anche la convenienza analitica è un'ulteriore scelta d'uso[7]. Prima di proseguire nello studio della distribuzione normale, soffermiamoci su l'aspetto che abbiamo detto essere fondamentale, il *teorema del limite centrale*.

**Teorema 2.1** *Sia  $X_n$  una successione di variabili indipendenti equidistribuite, di media  $\mu$  e varianza  $\sigma$ . Allora posto  $S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$   $S_n$  converge in legge ad una variabile aleatoria di legge  $N(0, 1)$ .*

Il risultato eclatante che ci fornisce questo teorema, nell'appoggiare l'utilizzo della legge normale, è che si approssima la legge di  $S_n$ , per  $n$  grande, con una legge  $N(0, 1)$  e questo qualunque sia la legge della v.a.  $X_j$  (purchè abbia un momento del secondo ordine finito)[2]. Dopo aver motivato l'atteggiamento favorevole del mondo scientifico per questo modello di distribuzione, entriamo nel dettaglio della legge.

Una variabile  $Y$  che viene descritta con  $N(\mu, \sigma^2)$  ha densità

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.1)$$

La suddetta 2.1 rappresenta il caso generale in cui la variabile  $Y$  è anche descrivibile come

$$Y = \sigma X + \mu \quad (2.2)$$

dove è rappresentabile come  $X \sim N(0, 1)$  da cui si evince che la densità per una  $N(0, 1)$  è data da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x)^2}{2}\right] \quad (2.3)$$

Il grafico di una normale è di tipo *bell shape*, come è possibile osservare nelle prossime figure [2.1 e 2.2]. Il punto di massima della funzione è dato sull'asse delle ascisse dal parametro  $\mu$  ovvero dalla media, mentre per valori piccoli della varianza  $\sigma$  si hanno campane strette e nel caso di valori grandi si hanno campane appiattite.

Una proprietà di grande interesse, per le distribuzioni normali, è l'*addizione*. Infatti, la somma di due v.a di legge *Normale* corrisponde ad una v.a di legge sempre di tipo *Normale*. Vediamo in dettaglio:

**Proprietà 2.1** Siano  $X_1, X_2$  due variabili indipendenti, con  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  e  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , dove la loro somma è data da  $(X_1 + X_2) \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .

Questo rappresenta una sorta di preambolo per le distribuzioni normali. Ulteriori proprietà saranno illustrate nella sezione delle *mixture*.

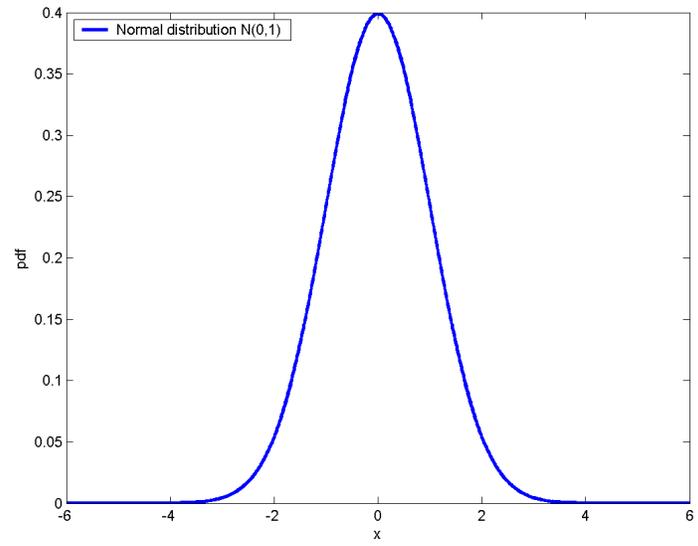


Figura 2.1: Distribuzione normale  $N(0,1)$ .

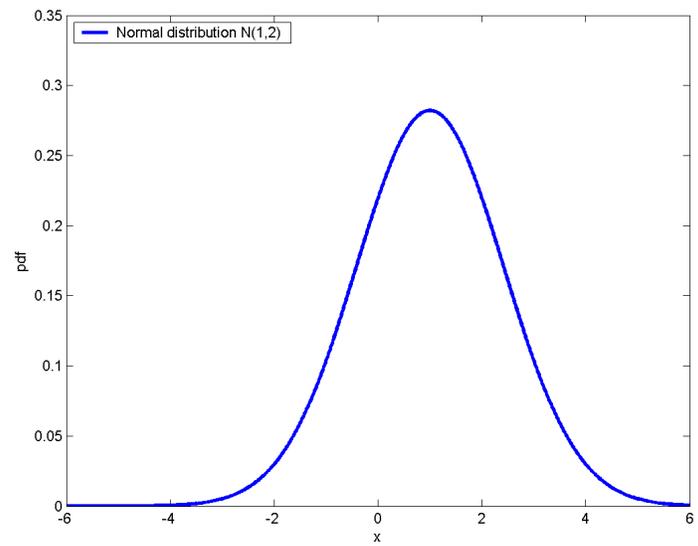


Figura 2.2: Distribuzione normale  $N(1,2)$ .

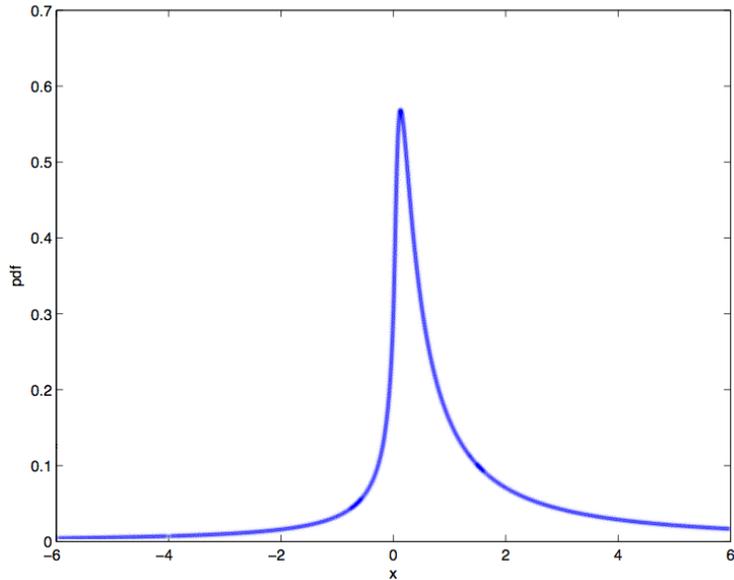


Figura 2.3: Distribuzione Stabile  $S(0.5,0.5,1,0)$ .

## 2.2.2 Distribuzione Alpha-Stabile

Interessanti prospettive per questo tipo di distribuzione sono già state prese in considerazioni in vari aspetti scientifici. L'impiego è già stato visto in astrofisica, ad esempio in [4], oppure in modelli telegrafici con il lavoro di Barbosa [6], addirittura in applicazioni di tipo radar con [12] e con questo lavoro ci proponiamo di andare alla ricerca dei possibili miglioramenti attraverso l'uso di misture di  $\alpha$ -stabili per modelli econometrici.

Le distribuzioni  $\alpha$ -Stabili si rendono efficienti in campi applicativi in cui i dati siano di tipo *impulsivo* e presentino *skewness*.

Le distribuzioni stabili sono state caratterizzate da Paul Lévy nel 1925, vedi [9]. Lo scarso utilizzo è da imputare alla mancanza di una forma esplicita per la rappresentazione della densità e della funzione di distribuzione, tranne

negli esempi che saranno presentati successivamente.

Con la possibilità di usare programmi che calcolano questo tipo di distribuzione, si stanno aprendo nuove prospettive.

Le distribuzioni stabili presentano delle proprietà che abbiamo già discusso in 2.2 , come la proprietà di *skewness* e quella di *heavy tails*. Una proprietà che accumuna la distribuzione  $\alpha$ -Stabile e la distribuzione Gaussiana è la *stabilità*.

Cosa rappresenta la *stabilità* di una distribuzione?

La *stabilità* rappresenta la preservazione della forma della variabile. Ma vediamo la seguente considerazione derivante da 2.1:

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d \quad (2.4)$$

dove, il simbolo  $\stackrel{d}{=}$  significa uguaglianza in distribuzione : se  $X \stackrel{d}{=} Y$  allora  $P(X < t) = P(Y < t)$ . Le variabili  $X_1, X_2$  sono indipendenti copie di  $X$  , i coefficienti  $a, b$  e  $c$  sono costanti positive, mentre  $d \in \mathbf{R}$ , vedi [16]. La 2.4 significa che la forma di  $X$  è preservata, sia su scala che su spostamento, nell'addizione[13]. Sempre in riferimento a [16], abbiamo questa definizione:

**Definizione 2.1** *Una variabile  $X$  è stabile se per  $X_1$  e  $X_2$  indipendenti copie di  $X$ , viene rispettata l'equazione 2.4, mentre si dice strettamente stabile se  $d = 0$ , per tutte le scelte di  $a$  e  $b$ .*

Prima di procedere oltre, vediamo quali sono gli esempi in cui si può rappresentare la distribuzione stabile in forma compatta.

**Esempio 2.2.1** *La distribuzione Normale, dove la v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ha la*

densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.5)$$

**Esempio 2.2.2** La distribuzione di Cauchy, dove la v.a.  $X \sim \text{Cauchy}(\gamma, \delta)$  ha la densità

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2} \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.6)$$

**Esempio 2.2.3** La distribuzione di Lévy, dove la v.a.  $X \sim \text{Levy}(\gamma, \delta)$  ha la densità

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\delta)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\delta)}\right) \quad \delta < x < +\infty \quad (2.7)$$

La distribuzione di Lévy è l'unica delle tre distribuzioni formalizzate negli esempi, che presenta *asimmetrica*. Le altre due hanno entrambe la forma a campana, come convergono le distribuzioni *simmetriche*.

Un'altra proprietà che viene espressa maggiormente dalla distribuzione di Cauchy è quella di *heavy tailed*.

Passiamo a vedere un'ulteriore definizione di distribuzione stabile:

**Definizione 2.2** La v.a.  $X$  è stabile se e solo se per  $n \geq 2$ , esistono un numero positivo  $c_n > 0$  e  $d_n \in \mathbf{R}$  tali che

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n \quad (2.8)$$

dove  $X_1, \dots, X_n$  sono indipendenti, identiche copie di  $X$ . Nel caso di  $d_n = 0$ , come abbiamo già visto in 2.1, è detta *strettamente stabile*.

Abbiamo presentato le definizioni di stabile, adesso esprimiamo in maniera più concreta possibile la *distribuzione stabile*, attraverso la funzione caratteristica o trasformata di Fourier.

**Teorema 2.2**  $X$  è una variabile aleatoria stabile se e solo se esistono  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\delta \in \mathbf{R}$  tali che

$$E \exp(i\xi X) = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |\xi|^\alpha [1 - \nu\beta(\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2}] + \nu\delta\xi) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |\xi| [1 + \nu\beta \frac{2}{\pi}(\text{sign } \xi) \ln |\xi|] + \nu\delta\xi) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

dove

$$\text{sign } \xi = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi > 0 \\ 0 & \text{se } \xi = 0 \\ -1 & \text{se } \xi < 0 \end{cases}$$

Se  $X$  ha questa funzione caratteristica allora scriveremo  $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ .

Abbiamo già detto che, in generale, per le distribuzioni stabili non possono essere scritte funzioni di densità tranne nei casi visti 2.5,2.6,2.7. In virtù di queste parametrizzazioni abbiamo le seguenti corrispondente tra le distribuzioni[17]:

### Osservazioni 2.1

$$\text{Caso Stabile-Normale} \rightarrow S(2, 0, \gamma, \delta) = N(\delta, 2\gamma^2)$$

con funzione di densità

$$f(x) = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\delta)^2}{4\gamma^2}\right]$$

Caso Stabile-Cauchy  $\rightarrow S(1, 0, \gamma, \delta) = \text{Cauchy}(\gamma, \delta)$

con funzione di densità

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2}$$

Caso Stabile-Lévy  $\rightarrow S\left(\frac{1}{2}, 1, \gamma, \delta\right) = \text{Lévy}(\gamma, \delta)$

con funzione di densità

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\delta)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\delta)}\right) \quad \delta < x < +\infty$$

Vediamo in dettaglio come si arriva ad una distribuzione normale, partendo dalla definizione data nel teorema 2.2 con la formulazione 2.9.

Con  $\alpha = 2$  la funzione caratteristica 2.9 diventa:

$$E \exp(i\xi X) = \exp\{-\gamma^2 \xi^2 + i\delta \xi\}$$

Come viene mostrato in [16] il parametro  $\beta$  non viene specificato perchè è annullato dalla tangente,  $\beta \tan \pi = 0$ , ma la tipica scelta che ricade sul parametro di simmetria è  $\beta = 0$ . Ciò che abbiamo descritto è la funzione caratteristica di una Gaussiana con media  $\delta$  e varianza  $2\gamma^2$ , cioè  $\gamma$  non rappresenta propriamente il parametro di deviazione standard.

**Proprietà 2.2** Quando  $1 < \alpha \leq 2$ , il parametro di locazione  $\delta$  è uguale alla media  $\mu$ .

### I parametri della distribuzione stabile

Nel teorema 2.2 sono stati introdotti quattro parametri, di cui abbiamo già visto, l'intervallo di interesse e una breve introduzione. Passiamo, adesso, ad una fase descrittiva dei suddetti parametri:  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ .

La forma della distribuzione è data dai parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , mentre il parametro di locazione, sull'asse delle ascisse, è determinato dal parametro  $\delta$ , che abbiamo detto assumere valori  $\delta \in \mathbf{R}$ . Il valore  $\gamma$  è definito come parametro di scala e il suo range è quello dei reali positivi.

Passiamo al parametro  $\beta$ . La simmetria di una distribuzione è determinata da questo parametro, abbiamo già detto che  $\beta$  è appartenente al range  $[-1, 1]$ . Per avere simmetria  $\beta = 0$ , nel caso di  $\beta > 0$  la distribuzione è asimmetrica con il taglio destro più forte del sinistro, ovvero  $P(X > x) > P(X - < x)$  con  $x > 0$  e grande. Nel caso di  $\beta < 0$  è asimmetrico con il taglio sinistro più forte del destro, mentre per avere una totale asimmetria il parametro deve assumere valore pari a 1, nel caso di totale asimmetria a destra oppure di -1, nel caso di totale asimmetria a sinistra.

Nel caso di  $\alpha$  abbiamo già considerato il range  $(0, 2]$ , vediamo cosa rappresenta. Il parametro  $\alpha$  non è altro che la forza del taglio, che determina quali momenti esistono per una distribuzione. Il taglio può essere sia esponenziale che forte. Nella nostra distribuzione si mostra il taglio forte.

**Teorema 2.3** Per qualche v.a. stabile  $X$ , c'è un numero  $\alpha \in (0, 2]$  così che

il numero  $c$  in 2.4 soddisfa

$$c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$$

Una v.a. stabile  $X$  con indice  $\alpha$  è chiamata  $\alpha$ -stabile. Vediamone subito una proprietà legata ai *momenti*:

**Proprietà 2.3** Sia  $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$  con  $0 < \alpha < 2$ . Allora

$$E | X |^p < \infty \quad \text{per qualche } 0 < p < \alpha$$

$$E | X |^p = \infty \quad \text{per qualche } p \geq \alpha$$

Per v.a.  $\alpha$ -stabile con  $\alpha < 2$  si ha un infinito secondo momento, questo determina che molte tecniche utilizzate per le Gaussiane non sono applicabili[16].

### Ulteriori proprietà

Presentiamo altre interessanti proprietà appartenenti alle distribuzioni  $\alpha$ -stabile.

**Proprietà 2.4** Siano  $X_1$  e  $X_2$  essere indipendenti v.a. con  $X_i \sim S_\alpha(\beta_i, \gamma_i, \delta_i)$   $i = 1, 2$ . Allora  $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$  con

$$\gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \beta = \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Il parametro  $\delta$  è detto parametro di locazione perchè

**Proprietà 2.5** Sia  $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$  e sia  $a$  essere una costante reale, allora  $X + a \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta + a)$ .

Abbiamo già presentato la simmetria di una v.a. attraverso la proprietà di *skewness*, indicata dal parametro  $\beta$ . Vediamone una precisazione.

**Proprietà 2.6** Per qualche  $0 < \alpha < 2$

$$X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, 0) \longleftrightarrow -X \sim S(\alpha, -\beta, \gamma, 0)$$

**Proprietà 2.7**  $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  è simmetrica se e solo se  $\beta = 0$  e  $\delta = 0$ , è simmetrica rispetto a  $\delta$  se e solo se  $\beta = 0$ .

La notazione che utilizziamo per indicare il caso di distribuzione stabile simmetrica è  $S\alpha S$ .

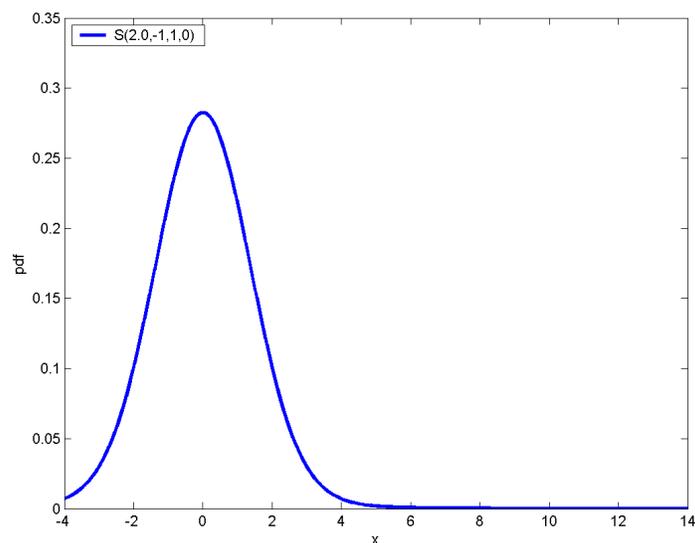


Figura 2.4: Distribuzione normale, espressa come stabile.

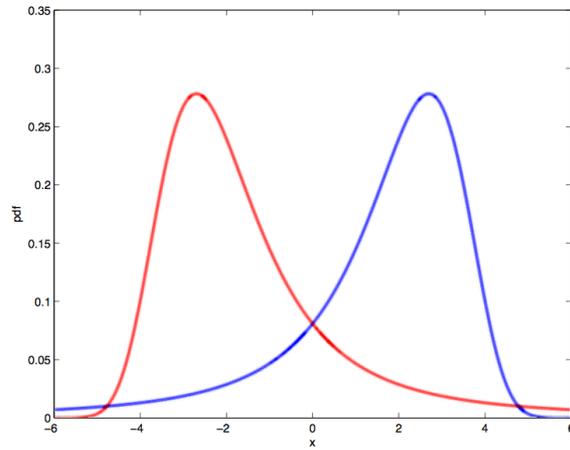


Figura 2.5: Distribuzioni stabili totalmente asimmetriche, una a sinistra ( $\beta = -1$ ) ed una a destra ( $\beta = 1$ ).

## 2.3 Misture di distribuzione

I modelli di probabilità analizzati fin ora, presentano come caratteristica quella di riferirsi ad una sola componente. Questa componente mostra un'unica popolazione appartenente alla realtà modellata, mentre sarebbe opportuno, in determinati casi, modellare tenendo presente un maggior numero di sottopopolazioni.

Quindi, la motivazione forte è che un data set, può essere composto da più sottopopolazioni, determinando un interesse maggiore per i vari aspetti che interpretano i risultati di osservazioni effettuate sul campione.

Le prime applicazioni risalgono a più di cento anni fa con Pearson(1894), ma solo nell'ultimo decennio le applicazioni di misture di distribuzione sono state prese in considerazione.

### 2.3.1 Definizioni

Partiamo dando fin da subito una definizione di questo modello :

**Definizione 2.3** *Una mistura di distribuzioni è una qualche combinazione convessa di*

$$\sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad k > 1 \quad (2.10)$$

*di altre distribuzioni  $f_i(x)$ .*

Il parametro introdotto nella definizione,  $w_i$ , è detto peso(weight) della componente rispetto al modello di misture formalizzato, cioè ogni componente determinata ha un proprio peso all'interno del modello. Quindi, in un modello a due componenti, i pesi sono dati da  $w_1$  per la prima componente e  $w_2 = 1 - w_1$  per la seconda componente. Ogni popolazione della componente deve essere proporzionata al peso della componente stessa.

Il parametro  $k$  rappresenta il numero di componenti che il modello esprime. Una comune assunzione che viene fatta è quella di avere una stessa famiglia parametrica, ad esempio come la normale, con differenti parametri [7].

### 2.3.2 Distribuzione Misture-Normale

Passiamo a considerare la mistura di distribuzioni Normali, dove questo tipo di distribuzione rappresenta un caso particolare di distribuzione stabile. Nel seguito saranno presentati vari esempi grafici di mistura.

Vedremo casi in cui le componenti sono equamente pesate, cioè  $w_i = w_{i+1}$  per  $i = 1, 2$  e casi in cui una componente sarà penalizzata rispetto l'altra e il confronto con l'inversione dei loro pesi.

Vediamo, una formulazione estesa rispetto alla 2.10:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k w_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right] \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.11)$$

facendone l'espansione, nel caso  $k=2$ , diventa:

$$f(x) = w_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] + w_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] \quad -\infty < x < +\infty$$

e considerando il caso di due Normali  $X_1 \sim N(0, 1)$  e  $X_2 \sim N(0, 2)$  con ugual peso, possiamo ridurre a

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x)^2}{2}\right] + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x)^2}{8}\right] \quad -\infty < x < +\infty$$

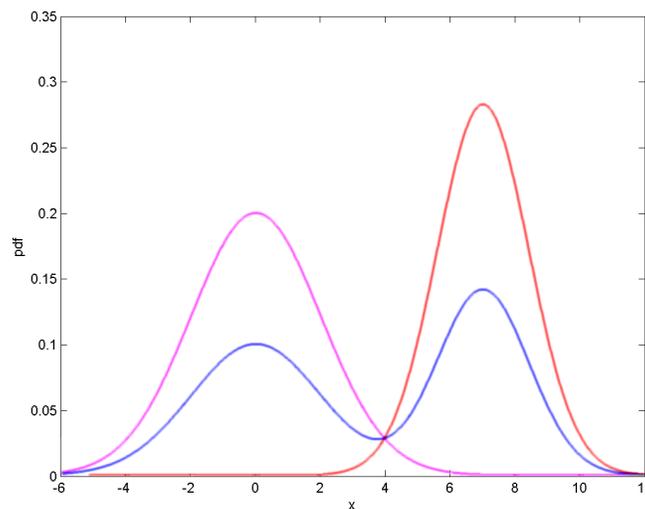


Figura 2.6: Mistura di normali  $0.5N(0,4)+0.5N(7,2)$ .

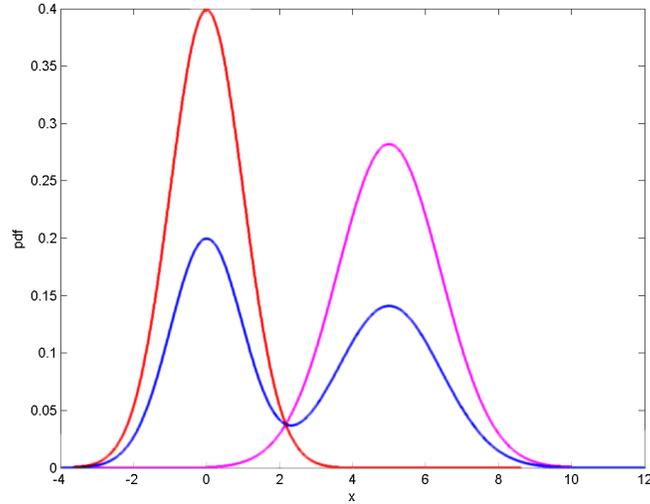


Figura 2.7: Mistura di normali  $0.5N(0,1)+0.5N(5,2)$ .

### 2.3.3 Distribuzione Misture-Stabile

Dopo aver visto il caso particolare, passiamo al caso generale, ovvero la mistura di distribuzioni  $\alpha$ -stabile.

Diamo fin da subito una formulazione per questo tipo di approccio, mostrando, per le già discusse ragioni, una modellazione generale. In un caso di mistura  $\alpha$ -stabile otteniamo la seguente densità:

$$f(x) = \sum_{j=1}^k w_j f_s(x; \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) \quad (2.12)$$

dove il numero di componenti è determinato dal parametro  $k$ , mentre gli altri parametri saranno gli stessi protagonisti già analizzati nelle precedenti dis-

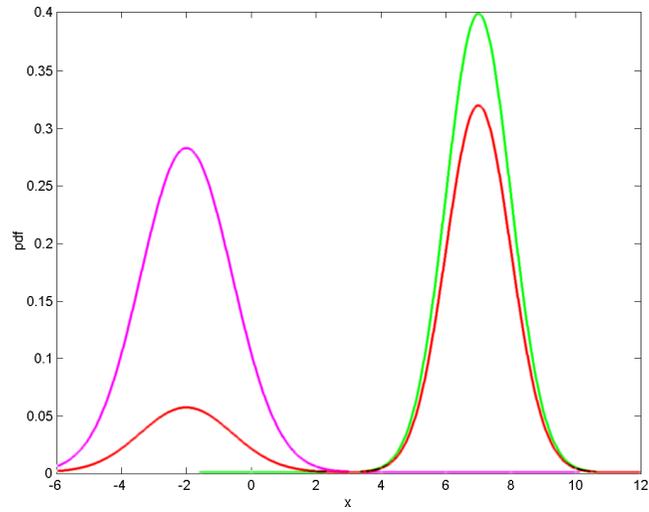


Figura 2.8: Mistura di normali  $0.2N(-2,2)+0.8N(7,1)$ .

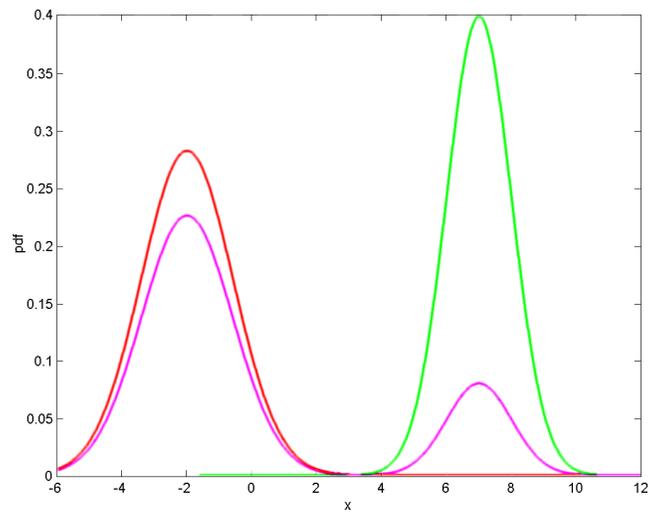


Figura 2.9: Mistura di normali  $0.8N(-2,2)+0.2N(7,1)$ .

cussioni.

Se noi volessimo ottenere che la nostra mistura sia composta da soli componenti di distribuzione simmetrica  $\alpha$ -Stabile, dobbiamo riformulare come segue:

$$f(x) = \sum_{j=1}^k w_j f_s(x; \alpha_j, 0, \gamma_j, \delta_j) \quad (2.13)$$

dove il parametro di *skewness* è sempre posto a zero, quindi simmetrico rispetto al parametro di locazione, come espresso nella proprietà 2.7.

Confrontando i due tipi di mistura possiamo dire che la Mistura Stabile per poter rappresentare una distribuzione, introduce un numero di componenti, quindi un numero di parametri, minore rispetto alla Mistura Normale. Questa motivazione rende preferibile una distribuzione di tipo Mix-Stabile rispetto alla Mix-Normale.

Presentiamo alcune rappresentazioni grafiche.

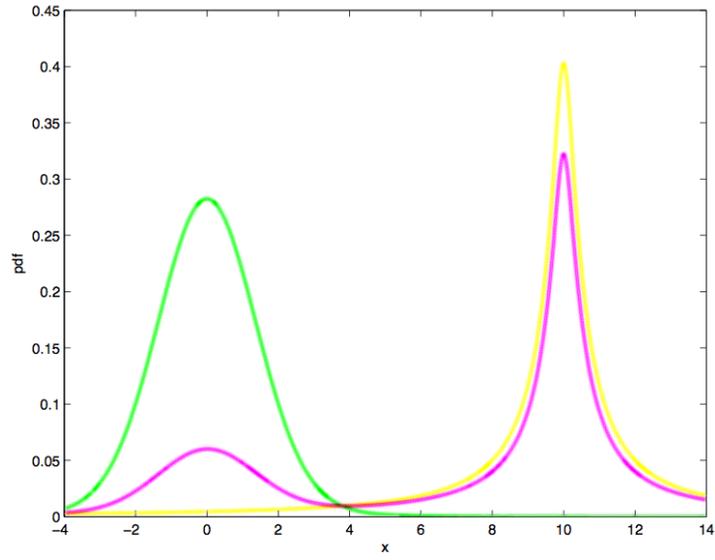


Figura 2.10: Mistura di Stabili  $0.2S(1.9,0,1,0)+0.8S(0.7,0,1,10)$ .

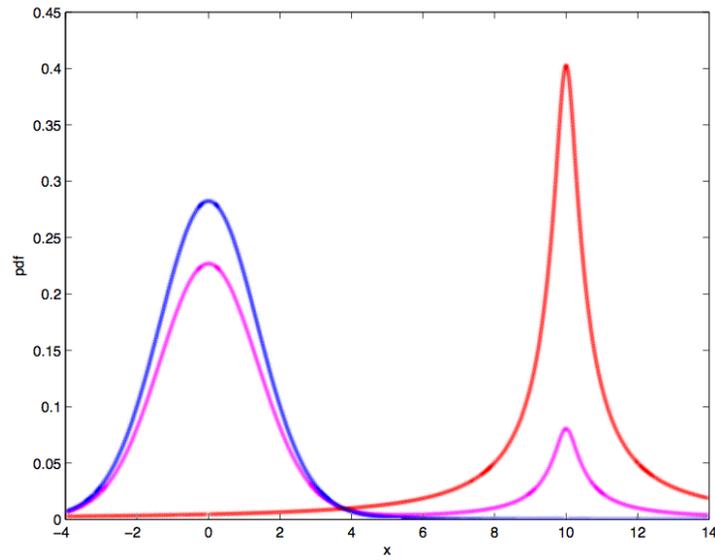


Figura 2.11: Mistura di Stabili  $0.8S(1.9,0,1,0)+0.2S(0.7,0,1,10)$ .

## Capitolo 3

# Processi Stocastici per financial time series

La necessità di poter prevedere (*forecasting*) i rendimenti di attività finanziarie ha determinato lo sviluppo di modelli matematici come i *GARCH*. Le serie storiche finanziarie mostrano delle particolari caratteristiche, dette anche *stylized fact*, che non ne facilitano l'interpretazione ai fini dell'obiettivo che viene perseguito, vedi [10]. Possiamo dire che stiamo utilizzando un buon modello matematico, se vengono catturati e riflessi gli *stylized facts* dei dati finanziari oggetto di studio [5].

Una delle prime documentate caratteristiche individuate nei dati finanziari, è il *volatility clustering*, come mostrato da Mandelbrot (1963), il quale sosteneva che "... grandi cambi tendono ad essere seguiti da grandi cambi, in entrambi i segni, e piccoli cambi tendono ad essere seguiti da piccoli cambi...".

Il *volatility clustering* rappresenta una forma di *eteroschedasticità*, dove per istanti di tempo vicini le varianze  $\sigma_{\epsilon_t}^2$  sono simili, mentre per istanti di tempo

lontani non sono simili. L'*eteroschedasticità* si contrappone all'*omoschedasticità*, cioè un processo  $\epsilon_t$  non ha alcuna variazione della propria varianza  $\sigma_{\epsilon_t}^2$ , rimanendo stabile per tutto il processo.

Per poter affrontare le problematiche legate all'eteroschedasticità nelle serie storiche, è stato sviluppato un modello, da parte di Engle e Bollerslev(1982), chiamato *ARCH*(AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity). I modelli *ARCH*(q) presentano un numero elevato di parametri da stimare, quindi lo sviluppo successivo del processo *ARCH* è quello del processo *Generalized ARCH*, ovvero *GARCH* formalizzato da Bollerslev(1986), vedi [3]. Adesso, concentreremo la nostra discussione sui modelli *Generalized-ARCH* e sulla progressione avuta nel nostro lavoro.

La possibile applicazione del modello *GARCH* per i dati finanziari viene fatta solitamente sui profitti(returns), sui tassi di cambio di una moneta e sui tassi di interesse.

### 3.1 GARCH

Il modello *GARCH* può essere scritto come un *ARMA*(AutoRegressive Moving Average) modello lineare non-Gaussiano. Quindi, passiamo a vedere come viene formulato un modello *GARCH*(p,q). Il termine errore è dato da:

$$u_t = z_t h_t^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

dove  $z_t$  è una sequenza di indipendenti identicamente distribuite(i.i.d.) variabili aleatorie con media zero. Proseguendo, assumiamo che:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j u_{t-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad (3.2)$$

L'equazione 3.2 mostra che la varianza condizionale è funzione dei p recenti valori della variabile  $u_t$  e delle q stime della varianza. In questo modo, si cercano di cogliere gli effetti legati al breve e brevissimo periodo nell'evoluzione della variabile e quelli legati nel lungo periodo per mantenere la persistenza della volatilità dei dati.

Per poter assicurare la *positività* della varianza condizionale  $h_t$  dobbiamo introdurre delle restrizioni nella 3.2. Utilizzando i parametri  $\alpha_j \geq 0$  con  $j = 1, \dots, q$  e  $\beta_j \geq 0$  con  $j = 1, \dots, p$ . Queste sono condizioni necessarie e sufficienti per poter ottenere la *positività*.

Nel caso in cui il modello specificato sia  $p=q=1$ , allora la sua rappresentazione sarà GARCH(1,1), cioè:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1} + \beta_1 h_{t-1}$$

Perchè si abbia un modello con covarianza stazionaria, si dovrà rispettare il seguente vincolo:

$$\alpha_1 \nu_2 + \beta_1 < 1$$

con  $\nu_2 = E\|z_t^2\| < \infty$ , come dimostrato da Nelson e Cao(1992).

Mentre nel caso si abbia:

$$\alpha_1\nu_2 + \beta_1 = 1$$

allora il modello rappresentato sarà un Integrated-GARCH(IGARCH).

## 3.2 GARCH-Stabile

Il primo sviluppo interessante ed importante del nostro lavoro è la modellazione di un *GARCH-Stabile*. Infatti, la parte del GARCH-Normal è una comune applicazione che è già stata intensamente discussa in letteratura.

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la distribuzione stabile, adesso vediamo l'applicazione nel caso di modelli matematici per applicazioni finanziarie.

Vediamo la definizione:

**Definizione 3.1** Una sequenza di variabili aleatorie  $\{Y_n, n \in Z\}$  è detto processo *Stabile-GARCH*( $\alpha, p, q$ ) se:

1.  $u_n = \sigma_n S_n$ , dove  $S_n \stackrel{iid}{\sim} S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$
1. esistono costanti non-negative  $\theta_i$  con  $i = 1, \dots, q$  e  $\phi_j$  con  $j = 1, \dots, p$  e  $\theta_0 > 0$ , tali che

$$\sigma_n = \theta_0 + \sum_{i=1}^p \theta_i |u_{n-i}| + \sum_{j=1}^q \phi_j \sigma_{n-j} \quad (3.3)$$

I parametri  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sono i parametri visti nel capitolo precedente e si utilizzano le già viste considerazioni. Questo nuovo approccio è stato introdotto

perchè la natura dei dati finanziari lo imponeva. Infatti, il GARCH-Normal non ha le proprietà necessarie per rispecchiare i dati finanziari, che sono heavy-tailed o si può dire che hanno un *eccesso di leptokurtosis* e la caratteristica di essere *volatility clustering*.

Una particolarità del modello introdotto è che nella distribuzione stabile non esiste finito il secondo momento.

Come abbiamo già sviluppato in 3.1 possiamo anche ridurre il sistema, nel caso di SGARCH( $\alpha, 1, 1$ ) nel seguente modo:

$$\sigma_n = \theta_0 + \theta_1 |u_{n-1}| + \phi_1 \sigma_{n-1} \quad (3.4)$$

Le suddette rappresentazioni 3.3 e 3.4 mettono in mostra il legame che c'è tra il termine di errore e la varianza condizionale del modello.

Possiamo esprimere il modello anche in ulteriori forme del tipo, ad esempio il *power-GARCH*, Mittnik in [11] utilizza  $S_{\alpha,\beta}^\delta GARCH(p, q)$ :

$$y_t = \mu + \sigma_t u_t, \quad u_t^\delta = \theta_0 + \sum_{i=1}^p \theta_i |y_{t-i} - \mu|^\delta + \sum_{j=1}^q \phi_j c_{t-j}^\delta$$

dove  $u_t \stackrel{iid}{\sim} S_{\alpha,\beta}(0, 1)$  con  $S_{\alpha,\beta}(0, 1)$  che denota lo standard stabile asimmetrico con indice stabile  $\alpha$ , parametro di skewness  $\beta$  e parametro di locazione pari a zero, mentre il parametro di scala pari a uno.

### 3.3 GARCH-MixtureStabile

Una naturale e successiva estensione del precedente modello è stata quella di utilizzare un insieme di componenti di distribuzioni stabili, come già presentato nel precedente capitolo. Quindi, siamo passati ad analizzare un modello di misture stabili applicate al GARCH, il *GARCH-MixStabile*.

Il processo stocastico viene generato attraverso l'uso di una mistura con i soliti ben noti vincoli per le distribuzioni stabili, adesso, però, ci sono nuovi parametri che dovrebbero essere trattati. Infatti, sia il numero di componenti che il peso che ha ogni componente sul modello diventano di nostro interesse. Ricordiamo il vincolo sul peso delle componenti:

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad \text{con } k \text{ numero di componenti}$$

Per il numero di componenti necessarie a spiegare i dati finanziari, non viene posto nessun vincolo, magari solo empiricamente potrebbero essere fatte delle assunzioni.

Vediamo qual è la formulazione per il modello:

$$y_t = \mu_j + \sigma_{j,t} u_{j,t} \quad \text{con probabilità } w_j \text{ e } j = 1, \dots, k \quad (3.5)$$

la sequenza  $u_{j,t}$  rappresenta un processo di iid variabili aleatori stabili.

L'approccio che abbiamo seguito, per la simulazione di questo modello, è quello descritto da Salas e Kuruoglu in [15], escludendo il modulo di simulazione del numero di componenti, ma decidendo apriori il numero di com-

ponenti.

Le novità che introduciamo nel nostro modello, sono un utilizzo più approfondito del parametro  $\alpha$  per la distribuzione. Infatti, Mittnick in [11] considera il parametro  $\alpha$  compreso nell'intervallo  $(1,2]$ , mentre il nostro utilizzo è in un intervallo più aperto rispetto al precedente, rendendo maggiormente libero lo spostamento del parametro nelle simulazioni. Questo significa che andiamo ad indagare in un numero di distribuzioni possibili più ampio.

L'altro aspetto che rende interessante questo lavoro è l'impiego di un algoritmo MCMC per la simulazione dei parametri, mentre in [11] viene impiegato il Fast Fourier Transform(FFT). Le potenzialità offerte dai metodi MCMC e nello specifico dagli algoritmi MH e Gibbs sono già state presentate in 1.3 e successivi paragrafi.

# Capitolo 4

## Simulazioni

In questo capitolo saranno presentati i risultati ottenuti dalle simulazioni effettuate, frutto dell'applicazione sviluppata. Il poter giungere al modello previsionale, per confrontare i vari modelli studiati, è dato da una molteplicità di interessanti e rilevanti parametri, che abbiamo già analizzato nei capitoli precedenti. Non tratteremo solo il confronto fra i risultati ottenuti, ma è di fondamentale interesse capire attraverso quali sviluppi successivi si è arrivati ad un giudizio. Mostreremo, parallelamente, sia i parametri relativi al modello GARCH-Stabile che quelli relativi al modello GARCH-MixStabile.

I dati utilizzati per le simulazioni sono il logaritmo dei profitti giornalieri percentuali del German DAX index coprendo un periodo che va dal 1/1/1992 al 31/12/1999. I profitti  $r_t$  vengono calcolati come segue:

$$r_t = 100(\ln p_t - \ln p_{t-1})$$

## 4.1 Sviluppo del modello applicativo

Il modello applicativo è stato sviluppato attraverso l'implementazione degli algoritmi MCMC. Sia nella determinazione dei parametri per la distribuzione  $\alpha$ -stabile che per il resto delle variabili che intervengono nel modello GARCH, ci si è basati o sull'algoritmo *Metropolis-Hasting* o sul *Gibbs Samplers*. Il cuore dell'applicazione per la creazione del modello GARCH si basa sul *Metropolis-Hasting*, come quasi la totalità dei parametri calcolati per poter utilizzare la distribuzione stabile. Mentre, il calcolo dei pesi(weights) delle componenti, nel caso di mistura, impiega l'algoritmo di *Gibbs* .

### 4.1.1 Problematiche affrontate

Vediamo alcune problematiche incontrate nel modello applicativo.

Il problema principale è stato quello di giungere ad una *stabilizzazione* dei parametri simulati.

Il primo passo è stato quello di determinare un punto di partenza nelle simulazioni e decidere in maniera empirica in quale momento si può avere una parziale stabilizzazione. Il significato di parziale stabilizzazione è derivante dal fatto che il parametro simulato, dopo una prima fase, inizierà ad oscillare in un range di valori ristretto rispetto a quello iniziale. Questo fase è conosciuta come *burn - in*. L'analisi sui parametri inizierà dopo la fase di burn-in, quindi avremo una serie di simulazioni che non saranno rilevate e poi una serie di simulazioni che saranno utilizzate per i nostri scopi.

Le simulazioni presentate prevedono una finestra di burn-in di duemila iterazioni ed una finestra di utilizzo di quattromila iterazioni.

## 4.2 Parametri distribuzione $\alpha$ -stabile

In questa sezione mostreremo i risultati ottenuti per i parametri della distribuzione  $\alpha$ -stabile, dandone una visione ed un'interpretazione.

Successivamente, faremo una comparazione fra il modello GARCH-Stabile ed il modello GARCH-MixStabile. Per effetto del burn-in le prime duemila iterazioni hanno un valore di default. Dopo le duemila iterazioni verranno registrati i cambiamenti.

### 4.2.1 Simulazione $\alpha$ stimato

Nelle figure 4.1 e 4.2 sono presentati i risultati ottenuti dopo il periodo, che empiricamente riteniamo necessario per la stabilizzazione, per  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  calcolato per la prima e la seconda componente, caso GARCH-MixStabile e  $\alpha$  calcolato per il modello GARCH-Stabile. Possiamo notare come in entrambi i modelli si ottenga che il range di spostamento per il parametro di stabilità sia (1.6, 1.8). Il criterio di scelta del parametro del modello, può essere del seguente tipo:

- la media di tutti i valori
- la media di ogni cinque valori.

Il secondo approccio dovrebbe ridurre la correlazione, ma tutto ciò empiricamente sembra non verificarsi. A sostegno di questa nostra affermazione riportiamo i risultati conseguiti:

Le scelte discusse sono da considerarsi valide anche per i successivi parametri.

$\alpha_1$	$\alpha_2$
1.7114	1.7157

Tabella 4.1: Risultati ottenuti senza considerare la possibile autocorrelazione. Media su tutti i valori. GARCH-MixStabile.

$\alpha_1$	$\alpha_2$
1.7134	1.717

Tabella 4.2: Risultati ottenuti considerando l'autocorrelazione. Media su ogni 5 valori. GARCH-MixStabile.

#### 4.2.2 Simulazione $\beta$ stimato

Analizziamo i risultati relativi al parametro di simmetria della distribuzione. Possiamo notare nelle figure 4.3 e 4.4 che per entrambi i modelli si hanno delle oscillazioni in un range di valori negativi compresi fra  $(-0.5, 0)$ . Sono presenti sporadici campioni con valore positivo.

$\beta_1$	$\beta_2$
-0.2847	-0.2325

Tabella 4.3: Risultati ottenuti senza considerare la possibile autocorrelazione. Media su tutti i valori. GARCH-MixStabile.

$\beta_1$	$\beta_2$
-0.2836	-0.2322

Tabella 4.4: Risultati ottenuti considerando l'autocorrelazione. Media su ogni 5 valori. GARCH-MixStabile.

### 4.2.3 Simulazione $\gamma$ stimato

Presentiamo la sequenza di campionatura relativa al parametro di scala. Come possiamo notare nelle figure 4.5 e 4.6 nelle ultime mille iterazioni il range si riduce a (0.65,0.70). Probabilmente, per questo parametro, sarebbero necessarie ulteriori iterazioni.

$\gamma_1$	$\gamma_2$
0.6791	0.6815

Tabella 4.5: Risultati ottenuti senza considerare la possibile autocorrelazione. Media su tutti i valori. GARCH-MixStabile.

$\gamma_1$	$\gamma_2$
0.6803	0.6826

Tabella 4.6: Risultati ottenuti considerando l'autocorrelazione. Media su ogni 5 valori. GARCH-MixStabile.

### 4.2.4 Simulazione $\delta$ stimato

Per il parametro di locazioni sono stati ottenuti i campionamenti presenti nelle figure 4.7 e 4.8. Possiamo notare che il parametro oscilla nel range  $(-0.2, 0)$ .

$\delta_1$	$\delta_2$
-0.0859	-0.0574

Tabella 4.7: Risultati ottenuti senza considerare la possibile autocorrelazione. Media su tutti i valori. GARCH-MixStabile.

$\delta_1$	$\delta_2$
-0.0846	-0.0574

Tabella 4.8: Risultati ottenuti considerando l'autocorrelazione. Media su ogni 5 valori. GARCH-MixStabile.

#### 4.2.5 Simulazione pesi stimati

Per la gestione dei pesi abbiamo deciso di utilizzare il risultato dell'ultima iterazione, così mantenendo il vincolo della somma dei pesi pari ad uno. Quindi come risultato finale vediamo la seguente tabella:

$w_1$	$w_2$
0.44096	0.55904

Tabella 4.9: Pesi per il modello GARCH-MixStabile.

### 4.3 Risultati Empirici: Confronto fra modelli

In questa sezione presenteremo i risultati che sono stati ottenuti per il forecasting del German DAX.

Il modello previsionale utilizzato è il *realised volatility* e il periodo stimato va dal 3 Gennaio 2000 al 31 Dicembre 2001. Gli orizzonti di forecasting sono dati dalla variabile  $steps(s)$ .

Il tipo di errore utilizzato è il *MAPE* (Mean Absolute Percentage Error), con la seguente formulazione:

$$\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1}{S-T} \sum_{t=T}^S \frac{|\left(\sqrt{\bar{h}_{t,t+s}^{(l)}} - \sqrt{h_{t,t+s}}\right)|}{\sqrt{h_{t,t+s}}} \quad (4.1)$$

dove  $s$  rappresenta la variabile steps,  $S$  rappresenta la fine del periodo previsionale,  $T$  la fine del periodo stimato, il valore  $L$  è il numero di campioni usati per il forecasting. Mentre gli altri parametri utilizzati sono ottenuti nel seguente modo:

$$\sqrt{\bar{h}_{t,t+s}} = \sqrt{\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \bar{h}_{t+i|t}} \quad (4.2)$$

$$\sqrt{h_{t,t+s}} = \sqrt{\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s y_{t+i}^2} \quad (4.3)$$

la predetta volatility è  $\sqrt{\bar{h}_{t,t+s}}$ , mentre il realised volatility è  $\sqrt{h_{t,t+s}}$ .

Vediamo quali risultati abbiamo ottenuto nella modalità appena espressa.

<i>Modello</i>	<i>steps = 1</i>	<i>steps = 2</i>	<i>steps = 3</i>	<i>steps = 4</i>	<i>steps = 5</i>
GARCH-Norm	3.1881	0.9923	0.5476	0.4064	0.3504
GARCH-Stabile	2.9796	0.8863	0.4887	0.3817	0.3519
GARCH-MixStabile	3.0598	0.9080	0.4936	0.3777	0.3419

Tabella 4.10: Tabella dei Risultati ottenuti con MAPE.

Possiamo notare come nessun modello di quelli presentati riesca ad avere un buon termine di errore nel caso di  $steps = 1$  e come all'incremento del periodo di previsione i valori siano in miglioramento. Fino ad arrivare ad ottenere un MAPE migliore nel caso di  $steps = 5$ .

La mistura che abbiamo presentato è a due componenti e secondo risultati empirici non è performante, questa considerazione è contenuta in [8]. Possiamo notare come il modello GARCH-MixStabile abbia un MAPE migliore degli altri in caso di steps = 4 , con MAPE = 0.3777 e per steps = 5 , con MAPE = 0.3419.

Vediamo i grafici relativi ai parametri.

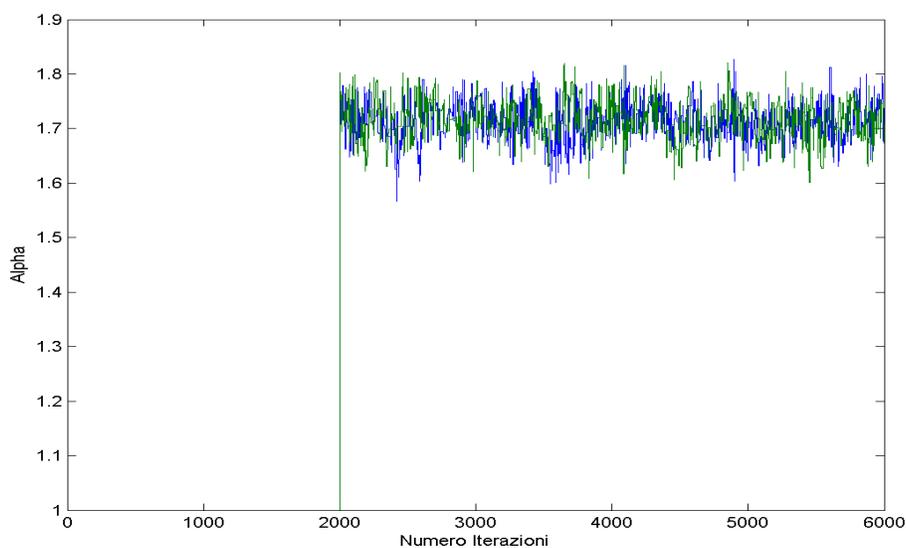


Figura 4.1: Parametri simulati  $\alpha_1$   $\alpha_2$  per GARCH-MixStabile.

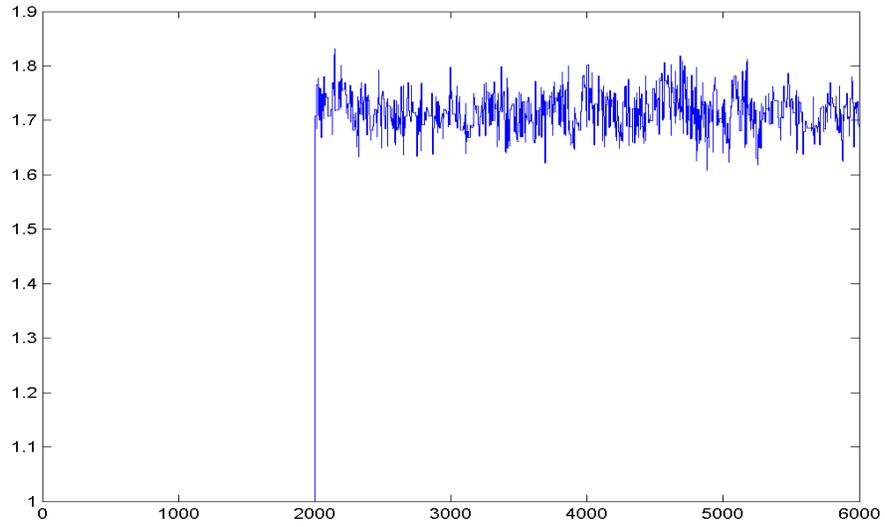


Figura 4.2: Parametro simulato  $\alpha$  per GARCH-Stabile.

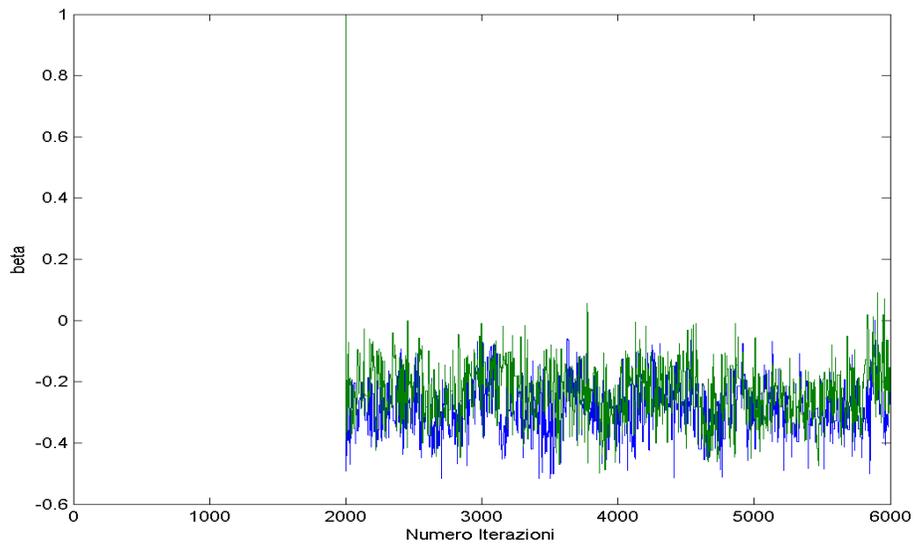


Figura 4.3: Parametri simulati  $\beta_1$   $\beta_2$  per GARCH-MixStabile.

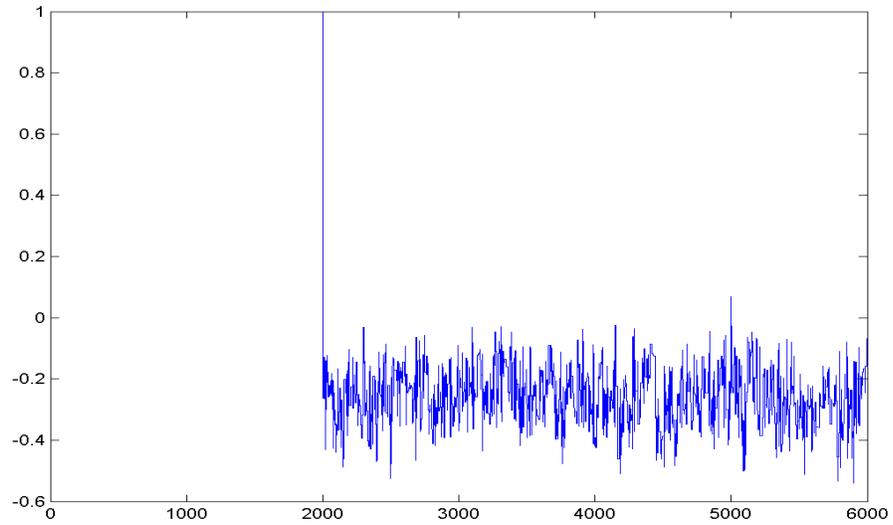


Figura 4.4: Parametro simulato  $\beta$  per GARCH-Stabile.

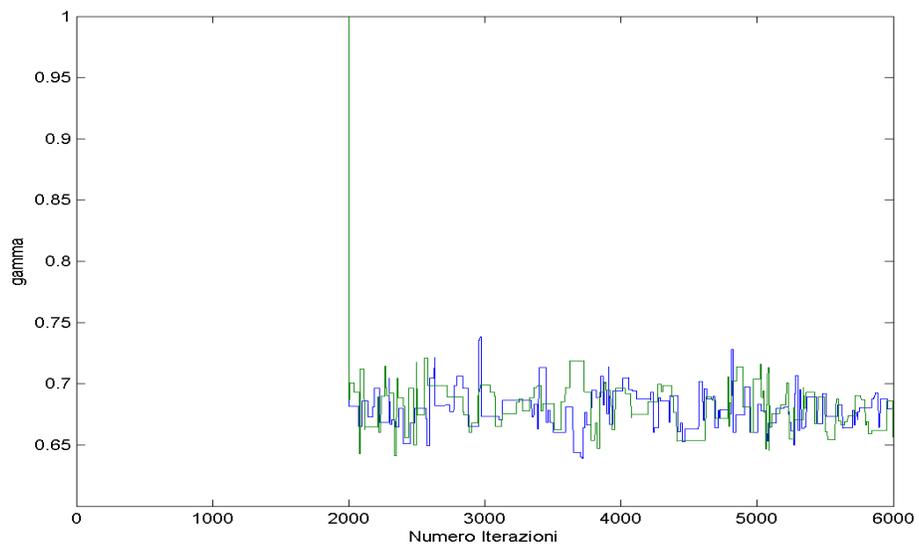


Figura 4.5: Parametri simulati  $\gamma_1$   $\gamma_2$  per GARCH-MixStabile.

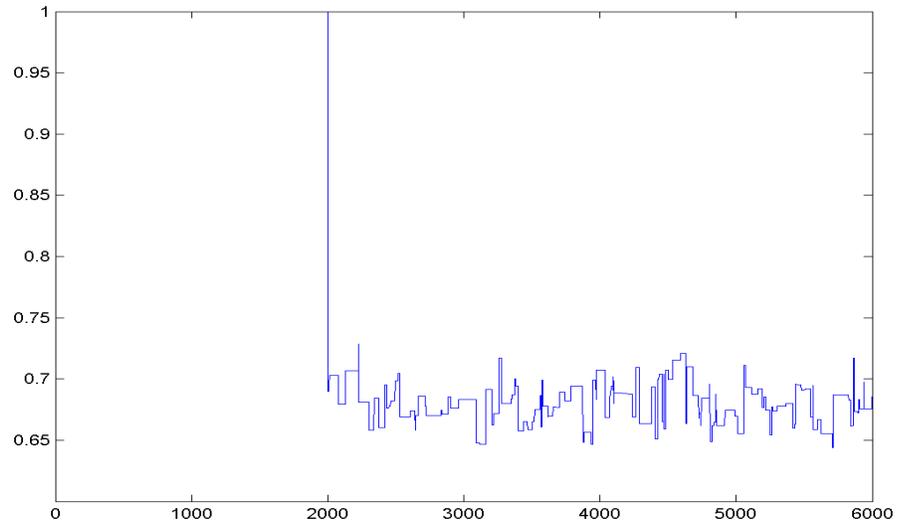


Figura 4.6: Parametro simulato  $\gamma$  per GARCH-Stabile.

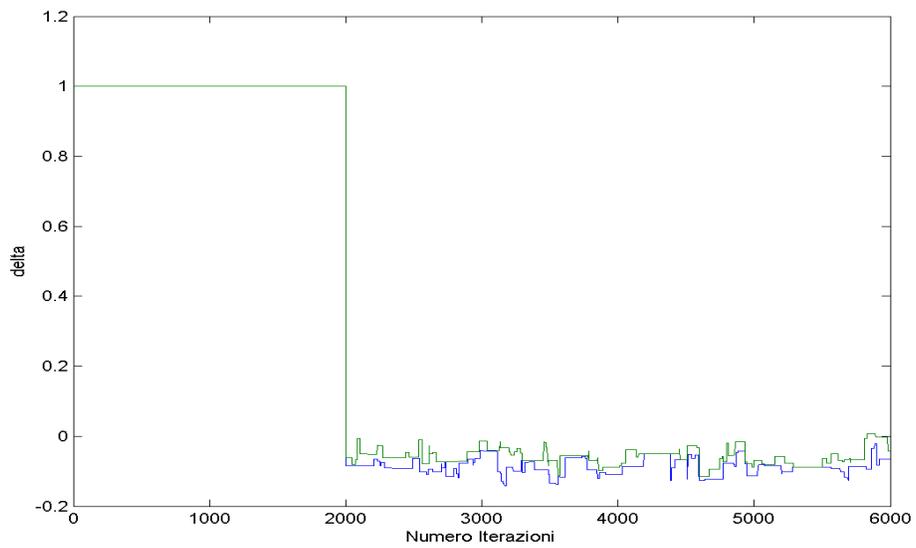


Figura 4.7: Parametri simulati  $\delta_1$   $\delta_2$  per GARCH-MixStabile.

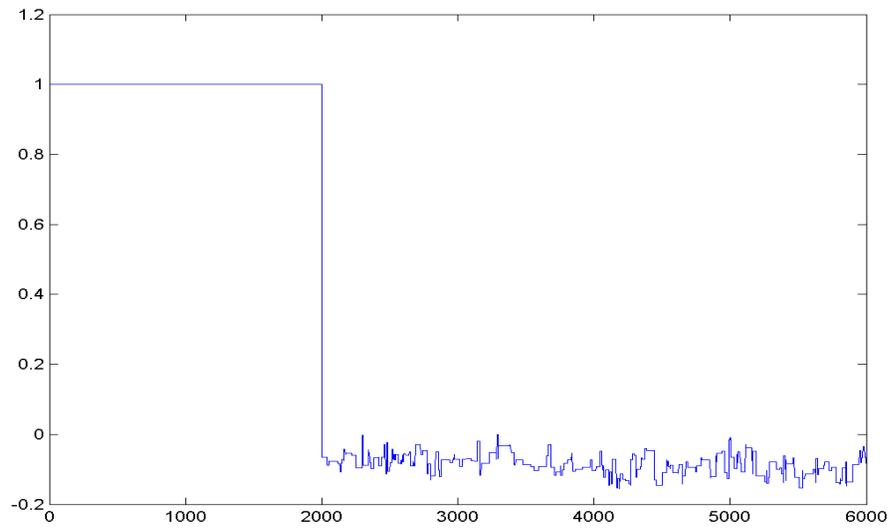


Figura 4.8: Parametro simulato  $\delta$  per GARCH-Stabile.

# Capitolo 5

## Conclusioni e sviluppi futuri

Il lavoro presentato mostra un'applicazione econometrica dell'impiego di distribuzioni  $\alpha$ -Stabili.

Le caratteristiche innovative adottate sono:

- L'impiego di Misture  $\alpha$ -Stabili
- L'utilizzo di un approccio random-walk Metropolis-Hasting con il suo caso speciale Gibbs Sampler.

Per quanto riguarda l'utilizzo delle Misture possiamo dire che il parametro  $\alpha$  è stato lasciato libero di assumere parametri che appartengono al suo range di applicazione. Questo risulta interessante perchè determina una maggiore gamma di possibili scelte di distribuzione rispetto al lavoro di Mittnick.

Per l'impiego di MCMC possiamo dire che è una pratica usata in ambito econometrico, ma differisce rispetto al lavoro di Mittnick, che impiega un approccio FFT.

I risultati ottenuti evidenziano come su alcuni periodi previsionali, il modello

proposto riesca ad apportare un sensibile miglioramento nel forecasting.

Riepilogando, con questa applicazione possiamo applicare i seguenti modelli finanziari:

- GARCH-Normal
- GARCH-MixNormal
- GARCH-SimmStabile
- GARCH-Stabile
- GARCH-MixSimmStabile
- GARCH-MixStabile

La novità introdotta è data dai modelli GARCH-MixSimmStabile e GARCH-MixStabile.

Possiamo considerare questa analisi un punto di partenza per sempre più approfonditi e performanti impieghi di questo tipo di distribuzione.

Una direzione su cui lavorare riguarda il modello predittivo e il termine di errore introdotti. Potremmo rendere sia più efficiente che variegata la possibilità di analizzare i dati finanziari.

Un'altra naturale conseguenza del nostro sviluppo è quella di avere un modello decisionale per il numero di componenti da impiegare. Abbiamo già implementato questa idea, ma è necessario realizzare delle opportune simulazioni.

# Elenco delle figure

2.1	Distribuzione normale $N(0,1)$ . . . . .	25
2.2	Distribuzione normale $N(1,2)$ . . . . .	25
2.3	Distribuzione Stabile $S(0.5,0.5,1,0)$ . . . . .	26
2.4	Distribuzione normale, espressa come stabile. . . . .	33
2.5	Distribuzioni stabili totalmente asimmetriche, una a sinistra ( $\beta = -1$ ) ed una a destra ( $\beta = 1$ ). . . . .	34
2.6	Mistura di normali $0.5N(0,4)+0.5N(7,2)$ . . . . .	36
2.7	Mistura di normali $0.5N(0,1)+0.5N(5,2)$ . . . . .	37
2.8	Mistura di normali $0.2N(-2,2)+0.8N(7,1)$ . . . . .	38
2.9	Mistura di normali $0.8N(-2,2)+0.2N(7,1)$ . . . . .	38
2.10	Mistura di Stabili $0.2S(1.9,0,1,0)+0.8S(0.7,0,1,10)$ . . . . .	40
2.11	Mistura di Stabili $0.8S(1.9,0,1,0)+0.2S(0.7,0,1,10)$ . . . . .	40
4.1	Parametri simulati $\alpha_1 \alpha_2$ per GARCH-MixStabile. . . . .	55
4.2	Parametro simulato $\alpha$ per GARCH-Stabile. . . . .	56
4.3	Parametri simulati $\beta_1 \beta_2$ per GARCH-MixStabile. . . . .	56
4.4	Parametro simulato $\beta$ per GARCH-Stabile. . . . .	57
4.5	Parametri simulati $\gamma_1 \gamma_2$ per GARCH-MixStabile. . . . .	57
4.6	Parametro simulato $\gamma$ per GARCH-Stabile. . . . .	58

4.7	Parametri simulati $\delta_1$ $\delta_2$ per GARCH-MixStabile. . . . .	58
4.8	Parametro simulato $\delta$ per GARCH-Stabile. . . . .	59

# Elenco delle tabelle

4.1	Risultati ottenuti senza considerare la possibile autocorrelazione. Media su tutti i valori. GARCH-MixStabile. . . . .	51
4.2	Risultati ottenuti considerando l'autocorrelazione. Media su ogni 5 valori. GARCH-MixStabile. . . . .	51
4.3	Risultati ottenuti senza considerare la possibile autocorrelazione. Media su tutti i valori. GARCH-MixStabile. . . . .	51
4.4	Risultati ottenuti considerando l'autocorrelazione. Media su ogni 5 valori. GARCH-MixStabile. . . . .	51
4.5	Risultati ottenuti senza considerare la possibile autocorrelazione. Media su tutti i valori. GARCH-MixStabile. . . . .	52
4.6	Risultati ottenuti considerando l'autocorrelazione. Media su ogni 5 valori. GARCH-MixStabile. . . . .	52
4.7	Risultati ottenuti senza considerare la possibile autocorrelazione. Media su tutti i valori. GARCH-MixStabile. . . . .	53
4.8	Risultati ottenuti considerando l'autocorrelazione. Media su ogni 5 valori. GARCH-MixStabile. . . . .	53
4.9	Pesi per il modello GARCH-MixStabile. . . . .	53
4.10	Tabella dei Risultati ottenuti con MAPE. . . . .	54

# Bibliografia

- [1] ANDRIEU, C., DE FREITAS, N., DOUCET, A., AND JORDAN, M. I. An introduction to mcmc for machine learning. *Machine Learning* 50, 1 (January 2003), 5–43.
- [2] BALDI, P. *Calcolo delle probabilità e statistica (seconda edizione)*. McGraw-Hill, 1998.
- [3] BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 3 (April 1986), 307–327.
- [4] COSTAGLI, M., AND KURUOGLU, E. Image separation using particle filters. *Digit. Signal Process.* 17, 5 (2007), 935–946.
- [5] ENGLE, R. F., AND PATTON, A. J. What good is a volatility model? *Quantitative Finance* 1, 2 (2001), 237–245.
- [6] GALLARDO, J. R., MAKRAKIS, D., AND OROZCO-BARBOSA, L. Use of  $\alpha$ -stable self-similar stochastic processes for modeling traffic in broadband networks. *Perform. Eval.* 40, 1-3 (2000), 71–98.

- [7] GERMAN, A., CARLIN, J., STERN, H., AND RUBIN, D. *Bayesian Data Analysis*. ed. CHAPMAN & HALL, 1998.
- [8] HAAS, M., MITTNICK, S., PAOLELLA, M., AND STEUDE, S. Stable mixture garch models. Tech. rep., 2005.
- [9] LEVY, P. *Calcul des Probabilités*. Paris: Gauthier-Villars, 1925.
- [10] MALMSTEN, H., AND TERÄSVIRTA, T. Stylized facts of financial time series and three popular models of volatility. Working Paper Series in Economics and Finance 563, Stockholm School of Economics, Aug. 2004.
- [11] MITTNICK, S., PAOLELLA, M., AND RACHEV, S. Stationarity of stable power-garch processes. *Journal of Econometrics* 106, 1 (2002), 97–107.
- [12] NIKIAS, C. L., AND SHAO, M. *Signal processing with alpha-stable distributions and applications*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1995.
- [13] NOLAN, J. P. *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Birkhäuser, Boston, 2007. In progress, Chapter 1 online at [academic2.american.edu/~jpnolan](http://academic2.american.edu/~jpnolan).
- [14] ROSS, S. *Stochastic Processes (Second Edition)*. ed. John Wiley & Sons, 1996.
- [15] SALAS-GONZALEZ, D., AND KURUOGLU, E. Bayesian mixture of stable distribution matlab codes v1.0. Tech. rep., ISTI-CNR, 2006.
- [16] SAMORODNITSKY, G., AND TAQQU, M. *Stable Non-Gaussian Random processes*. ed. CHAPMAN & HALL, 1994.

- [17] ZOLOTAREV, V. M. One-dimensional stable distributions. *American Mathematical Society* 20, 2 (1989), 270–277.

# Ringraziamenti

Non è stato semplice arrivare alla fine di questo lavoro. L'impegno profuso è stato notevole, ma l'interesse per la materia era ed è tuttora forte.

I primi e più sentiti ringraziamenti vanno ai miei genitori e a mia sorella Sabrina, che nonostante tutto hanno creduto in me.

Come non ringraziare Alessandra che in questo periodo mi ha aiutato a sfogarmi e soprattutto a finire questa Università.

Un ringraziamento particolare va al Dott. Ercan E. Kuruoglu, che è stato uno stimolo continuo anche nei momenti di difficoltà e mi ha insegnato come funziona il mondo della ricerca e mi ha dato sempre l'incoraggiamento per trovare nuove idee e nuove soluzioni.

Un grazie anche a tutti quelli che mi hanno aiutato o sopportato in qualche maniera in questa lunga parte della mia vita.