





TDBM: TWO-DIMENSION BALLISTIC MOTION  
Programma per la simulazione del moto di un velivolo  
non propulso dotato di resistenza e portanza  
in un'atmosfera planetaria

Carmen Pardini

Luciano Anselmo

Rapporto interno C91-09

29 Maggio 1991

CNUCE - Istituto del C.N.R.  
Via S. Maria, 36 - 56100 Pisa  
Tel. - (050) 593111  
Telex - 500371 CNUCE  
Telefax - (050) 576751



## Indice

<b>Sommario</b> .....	1
<b>Perturbazioni orbitali</b> .....	3
Forze aerodinamiche .....	4
<b>Densita' atmosferica</b> .....	9
Modelli semiempirici .....	10
Modelli empirici .....	14
Modelli di densita' utilizzati dal programma TDBM .....	14
<b>Equazioni del moto e metodi di soluzione</b> .....	17
Integratori numerici lineari .....	17
Equazioni del moto di velivoli sottoposti ad accelerazioni aerodinamiche .....	20
<b>Parametri di rientro</b> .....	27
<b>Applicazioni numeriche</b> .....	29
Verifiche di funzionalita' del modello .....	29
Frammentazione della stazione spaziale Salyut 7 dopo il rientro nell'atmosfera terrestre .....	36
Missile balistico intercontinentale .....	42
Ricerca dello step-size ottimale per l'integratore di Eulero .....	44
<b>Modulo TDBM</b> .....	47
<b>Bibliografia</b> .....	59



## Sommario

Scopo del presente documento e' quello di descrivere il modello di calcolo implementato nel programma TDBM (*Two-Dimension Ballistic Motion*) per simulare il moto di un velivolo non propulso dotato di resistenza e portanza in un'atmosfera planetaria. Si tratta di un codice di calcolo che andra' a far parte del sistema integrato per l'analisi e la pianificazione di missioni spaziali terrestri, sviluppato al CNUCE per conto dell'Agenzia Spaziale Italiana.

Dopo aver esaminato le diverse forze che perturbano l'orbita kepleriana di un satellite ruotante attorno ad un pianeta, sono state modellizzate le accelerazioni aerodinamiche che questo subisce muovendosi all'interno dell'atmosfera.

Sono state scritte le equazioni generali per rappresentare il moto secondo il formalismo di Cowell e sono stati presentati alcuni metodi di integrazione lineare utilizzabili per ottenerne la soluzione. Infine, ci si e' ricondotti al caso specifico di velivoli in fase di rientro nell'atmosfera e si sono formulate le equazioni del moto assumendo che l'orbita fosse perturbata in modo dominante dalle forze aerodinamiche.

In base a diverse ipotesi semplificatrici, ma pur sempre giustificabili, le equazioni del moto sono state espresse in un sistema di riferimento inerziale bidimensionale considerando le forze di portanza e di frenamento aerodinamico proporzionali al quadrato della velocita' del velivolo. Il pianeta e' stato considerato non ruotante.

Per l'integrazione delle equazioni del moto sono stati implementati gli algoritmi numerici di Eulero (soluzione al primo ordine) e di Runge-Kutta (dell'ottavo ordine). Dalla soluzione, espressa in termini di posizione e velocita' del velivolo a vari istanti di tempo, sono stati ricavati i parametri di rientro piu' rappresentativi, ovvero la gittata, l'altezza sul pianeta, la velocita', l'accelerazione, il fattore di carico e il *flight path angle*.

Il programma TDBM e' stato testato confrontando, per alcuni casi particolari riportati nel documento, i risultati da esso ottenuti con quelli di Rif.1.

Un esempio delle possibilita' di utilizzo del codice di calcolo implementato e' stato invece fornito sulla base delle seguenti applicazioni numeriche:

1. valutazione della distribuzione dei frammenti della stazione spaziale sovietica Salyut 7, rientrata nell'atmosfera il 7 febbraio 1991;
2. simulazione del volo sub-orbitale di un missile balistico intercontinentale.

Infine, dal confronto dei risultati trovati usando prima l'integratore di Eulero e successivamente quello di Runge-Kutta, e' stato possibile risalire ad una stima del

passo d'integrazione ottimale che l'utente potrà scegliere in input qualora decida di usare l'algoritmo di Eulero.

Segue la descrizione del modulo implementato, sia per quanto concerne la struttura (main, subroutines...) che la gestione dei parametri di ingresso e uscita.

## Perturbazioni orbitali

Un satellite artificiale che si muovesse attorno ad un pianeta perfettamente sferico ed omogeneo, privo di atmosfera e infinitamente lontano da altri corpi (Sole e/o pianeti), descriverebbe un'orbita kepleriana.

Nella realtà, tuttavia, tali situazioni ideali non sono mai soddisfatte e l'approssimazione kepleriana, pur conservando la sua utilità pratica quale soluzione del moto imperturbato, deve essere modificata per poter seguire l'evoluzione della traiettoria del satellite sottoposto a svariate perturbazioni.

Di regola, le forze perturbatrici agenti su un satellite vengono classificate in due gruppi principali. Uno di questi comprende le forze conservative, quali quella dovuta alla parte non centrale del campo gravitazionale del pianeta (termini multipolari) o le forze, sempre di natura gravitazionale, esercitate sul satellite da altre masse attrattive che non siano il corpo centrale. L'altro gruppo è costituito dalle forze non conservative, spesso indicate come forze di superficie. Di queste fanno parte le forze di frenamento aerodinamico e quelle causate dalla pressione di radiazione solare (diretta e indiretta).

Le **accelerazioni gravitazionali** subite da un satellite dipendono soltanto dalla distribuzione delle masse attrattive attorno al satellite e derivano da interazioni di tipo newtoniano. Da un punto di vista matematico sono esprimibili come il gradiente di una funzione scalare detta 'potenziale' e perturbano la traiettoria in modo indipendente dalla massa, dalla geometria e dallo stato fisico e termico del satellite.

Tutte le forze non conservative danno luogo ad **accelerazioni non gravitazionali** che sono direttamente correlate a degli scambi di quantità di moto sulla superficie del satellite. Per questo motivo sono anche dette forze di superficie e, in virtù della loro dipendenza dalla geometria del satellite, possono essere sfruttate in situazioni particolari per 'pilotare' il satellite stesso. È possibile, ad esempio, aggiustare la data e il luogo di rientro nell'atmosfera di un satellite agendo sul suo assetto, ovvero, sul frenamento aerodinamico. Si può modificare un'orbita esponendo grandi superfici al flusso fotonico solare (vele solari), o la si può controllare con degli spari effettuati a istanti e in punti ben precisi. Ma al di là di qualche loro vantaggio applicativo, le forze di superficie non sono facilmente modellizzabili. Uno dei motivi riguarda il calcolo della densità atmosferica, un altro è associato alla difficoltà di descrivere in modo rigoroso le varie forze in funzione della geometria e dell'assetto del satellite.

L'effetto risultante di tutte le perturbazioni si traduce in un'evoluzione nel tempo del vettore di stato (elementi kepleriani o posizione e velocità) del satellite. Tale evoluzione può essere calcolata o in maniera analitica, sviluppando opportunamente le

varie perturbazioni in funzione del tempo (equazioni di Lagrange per trattare le accelerazioni gravitazionali o di Gauss per modellizzare le forze di superficie) o in modo numerico, risolvendo le equazioni generali del moto (formulate in base alla seconda legge della dinamica e scritte in un sistema di riferimento cartesiano inerziale) per integrazione numerica.

Va in ogni caso sottolineato che, mentre i metodi analitici hanno la necessita' di assumere delle ipotesi opportune per modellizzare le accelerazioni in gioco, quelli numerici non richiedono nessuna assunzione di base sull'ampiezza delle perturbazioni. Percio', soprattutto per quelle forze difficilmente modellizzabili, quali senza dubbio le forze aerodinamiche agenti su un satellite in fase di rientro, i metodi numerici sono i piu' adatti per calcolare la traiettoria.

## **Forze aerodinamiche**

La presenza dell'atmosfera induce sul satellite delle forze dette aerodinamiche causate dalle continue collisioni delle particelle dell'aria con la superficie del satellite. La loro intensita' dipende, oltre che dalla geometria del satellite e dalla sua posizione rispetto al pianeta (altezza, latitudine e longitudine), anche dai parametri dell'atmosfera variabili con il flusso solare, l'attivita' geomagnetica ecc..

Nel caso di un'orbita relativamente eccentrica il frenamento si fa sentire soprattutto al perigeo e produce un abbassamento dell'apogeo e quindi una diminuzione dell'eccentricita' fino ad una circolarizzazione dell'orbita all'altezza di perigeo. La decelerazione e' invece praticamente costante lungo un'orbita quasi circolare, che resta dunque tale, ma con un'altezza via via decrescente. Se si tiene conto che su un periodo la perdita in altezza e' di circa qualche metro intorno ai 600 Km, di qualche decina di metri intorno ai 400 Km e di qualche centinaio di metri vicino ai 200 Km, si capisce che un satellite al di sotto dei 300 Km circa, se non piu' controllato e quindi manovrato, sara' destinato irrimediabilmente a rientrare sulla terra in tempi brevi.

In pratica, tutti i satelliti terrestri con altezza inferiore a 1000 Km si muovono con una velocita' relativamente elevata (dai 7 ai 10 Km/sec) in un'atmosfera caratterizzata da una certa densita' residua. Le accelerazioni aerodinamiche da essi subite, essendo proporzionali al prodotto della velocita' al quadrato del satellite per la densita' atmosferica, non possono percio' essere trascurate e il loro effetto, che si manifesta in una riduzione secolare del semiasse maggiore e dell'eccentricita' dell'orbita, e' significativo per orbite basse (fra i 200 e i 400 Km) e resta comunque sensibile fino a circa 1000 Km di altezza.

La modellizzazione delle forze aerodinamiche agenti su un satellite viene fatta generalmente in sistemi di riferimento particolari legati al satellite e al suo moto. La relazione fondamentale che permette di calcolare l'**accelerazione aerodinamica** in un sistema di riferimento generico e' la seguente (Rif.2):

$$\vec{y} = -\frac{1}{2} \rho V_R^2 \frac{A}{m} (C_x, C_y, C_z) \quad [1]$$

dove:

- $C_x$ ,  $C_y$ , e  $C_z$  sono dei coefficienti aerodinamici adimensionali i cui valori dipendono dalla definizione adottata per la superficie di riferimento ( $A$ ) del satellite, dalla geometria del satellite e dal sistema di riferimento ( $x,y,z$ );
- $m$  e' la massa del satellite;
- $\rho$  e' la densita' dell'atmosfera;
- $V_R$  e' la velocita' del satellite rispetto all'atmosfera.

Se si considera, ad esempio, il sistema di riferimento  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{w})$  con

*l'origine ( $O$ ) situata nel centro di massa del satellite, l'asse  $O\vec{t}$  tangente al vettore velocita' del satellite, l'asse  $O\vec{w}$  diretto secondo il momento angolare dell'orbita osculatrice ed infine l'asse  $O\vec{n}$  tale da formare con i precedenti una terna destrorsa,*

e si assume che le forze aerodinamiche siano applicate tangenzialmente e normalmente alla traiettoria, si possono definire due coefficienti aerodinamici, denominati rispettivamente di *lift* ( $C_L$ ) e di *drag* ( $C_D$ ). La forza di *drag*, o di frenamento, e' quella applicata tangenzialmente, nel verso opposto alla velocita' planetocentrica del satellite. La forza di *lift*, o portanza, e' invece quella normale alla traiettoria.

I coefficienti aerodinamici di frenamento (*drag*) e portanza (*lift*) vengono pertanto formalmente espressi in funzione della forza parallela  $F_{\parallel}$  e di quella perpendicolare  $F_{\perp}$  alla velocita' del satellite rispetto all'atmosfera e risultano essere dati da:

$$C_D = \frac{F_{\parallel}}{\frac{1}{2} \rho V_R^2 A}, \quad [2]$$

$$C_L = \frac{F_{\perp}}{\frac{1}{2} \rho V_R^2 A}.$$

Nel caso di un satellite sferico si ha che  $C_L = 0$  e  $C_D \neq 0$  per cui, nel sistema di riferimento  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{w})$ , l'espressione dell'accelerazione perturbatrice diventa:

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{2} \rho V_R^2 \frac{A}{m} (C_D, 0, 0). \quad [3]$$

Se l'assetto del satellite e' incontrollato, la portanza cambia continuamente direzione nel giro di secondi o minuti e avra' alla fine una media temporale praticamente nulla. Nel caso di satelliti stabilizzati rispetto allo spazio inerziale la portanza cambia segno due volte per rivoluzione. Se poi consideriamo satelliti stabilizzati in modo da mantenere una orientazione fissa rispetto alla verticale locale, allora la portanza non cambia mai segno. Tuttavia, quasi sempre il modulo della portanza e' inferiore ad un decimo del modulo della resistenza per cui la forza aerodinamica totale agente su un satellite puo' essere espressa con ottima approssimazione da:

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{2} \rho \vec{V}_R |\vec{V}_R| \frac{A}{m} C_D \quad [4]$$

Descriviamo ora singolarmente le variabili che compaiono nella 4.

- **m** e' la **massa del satellite**, che puo' variare solo in seguito a manovre orbitali o distacco di sezioni;
- $\vec{V}_R$  rappresenta la **velocita' del satellite rispetto all'atmosfera** ed e' data da:

$$\vec{V}_R = \vec{V} - \vec{V}_{\oplus} \quad [5]$$

dove  $\vec{V}$  e  $\vec{V}_{\oplus}$  sono rispettivamente la velocita' del satellite e quella dell'atmosfera in un sistema di riferimento inerziale.

La velocita' dell'atmosfera e' dovuta sia al trascinamento dell'atmosfera prodotto dalla rotazione del pianeta che alle correnti d'alta quota.

Pertanto, indicati con  $\vec{\omega}_R$  la velocita' di rotazione d'insieme dell'atmosfera, con  $\vec{V}_w$  la velocita' del vento e con  $\vec{r}$  il raggio vettore del satellite nel riferimento planetocentrico, la velocita' dell'atmosfera puo' essere calcolata come:

$$\vec{V}_{\oplus} = \vec{\omega}_R \wedge \vec{r} + \vec{V}_w. \quad [6]$$

Sulla base di osservazioni fatte studiando l'evoluzione dell'inclinazione di 32 satelliti terrestri aventi altezze medie comprese fra 200 e 400 Km, e' risultato che l'atmosfera non a tutte le quote ruota solidalmente con il nostro pianeta e quindi la velocita' di rotazione  $\vec{\omega}_R$  puo' essere diversa dalla velocita' di rotazione della terra ( $\vec{\omega}$ ).

Cio' ha portato alla formulazione del cosiddetto *tasso di superrotazione* (o parametro rotazionale dell'atmosfera terrestre) cosi' definito:

$$\Gamma = \frac{\vec{\omega}_R}{\vec{\omega}}. \quad [7]$$

Sempre in base alle misure fatte dai satelliti risulta' che il valore di  $\Gamma$  era compreso fra circa 1.10 (a 200 Km di quota) e 1.40 (a 350 Km). Ad altezze superiori ai 350 Km fu osservata invece una rotazione dell'atmosfera solidale con la terra, ovvero un valore di  $\Gamma$  uguale a uno. Si fa notare che un valore di  $\Gamma$  pari a 1.5 implica una velocita' dell'atmosfera di 600 m/sec all'equatore, corrispondente a circa il 10% della velocita' di un satellite in orbita bassa.

- $A$  rappresenta l' **area del satellite normale al flusso di particelle d'aria**.

A dipende dalla forma del satellite, dalla sua posizione sull'orbita e dal suo assetto. Per satelliti non più controllati, il che succede spesso durante le fasi terminali del decadimento orbitale, tale superficie può essere calcolata in due diversi modi (Rif.3):

1. *equivalent-tumbling method*;
2. *equivalent-sphere method*.

Il primo è applicabile a satelliti aventi forma cilindrica ( $l/d \geq 2$ ) o simili a dischi ( $l/d \leq 1/2$ ) di lunghezza  $l$  e diametro  $d$ , e assume che la rotazione attorno al massimo momento d'inerzia avvenga con una velocità angolare superiore a quella del moto orbitale. In questo caso, poiché la direzione dell'asse di rotazione è generalmente sconosciuta, è necessario che sia individuato il valor medio lungo l'orbita della sezione efficace normale al flusso. King-Hele (Rif.4) mostrò come ottenere queste medie e concluse che l'indeterminazione sui risultati ottenuti poteva essere superiore al 15% per satelliti cilindrici e dell'ordine del 20% per satelliti simili a dischi.

Per satelliti sferici o quasi sferici non può essere identificato nessun asse di massimo momento d'inerzia. Il metodo *equivalent-sphere* approssima  $A$  considerandola pari a circa  $1/4$  dell'area superficiale totale del satellite. L'errore in questa approssimazione tende evidentemente a zero man mano che la forma del satellite si avvicina a quella di una sfera.

In generale, se un qualsiasi corpo convesso assume tutte le orientazioni possibili con uguale frequenza, la sezione efficace media è sempre uguale a  $1/4$  della superficie totale del corpo.

- $C_D$  è il coefficiente di frenamento aerodinamico che dipende dalla geometria del satellite, dalle qualità riflesse ed emmissive delle diverse superfici, dalla temperatura e dalla composizione dell'atmosfera.

Per satelliti aventi forme semplici, ma comunque ben rappresentative (cono, cilindro, sfera), e sotto diverse condizioni di interazione delle molecole dell'aria con la superficie del satellite,  $C_D$  varia fra 2 e 3, in accordo con i risultati ottenuti in Rif.5, che suggeriscono un  $C_D = 2.5 \pm 20\%$ .

$C_D$  è in ogni caso un parametro molto difficile da calcolare, sia a causa delle incertezze con cui sono note la densità e la temperatura atmosferiche che della difficoltà di modellizzare le interazioni delle particelle dell'aria con la superficie del satellite, soprattutto per satelliti non sferici e ad assetto variabile.

- $\rho$  rappresenta la densità atmosferica.



## Densita' atmosferica

Al congresso di Brussels del 1951 l'Unione Internazionale di Geodesia e Geofisica stabilì la nomenclatura riportata in Fig.1 per classificare la struttura dell'atmosfera terrestre (Rif.6).

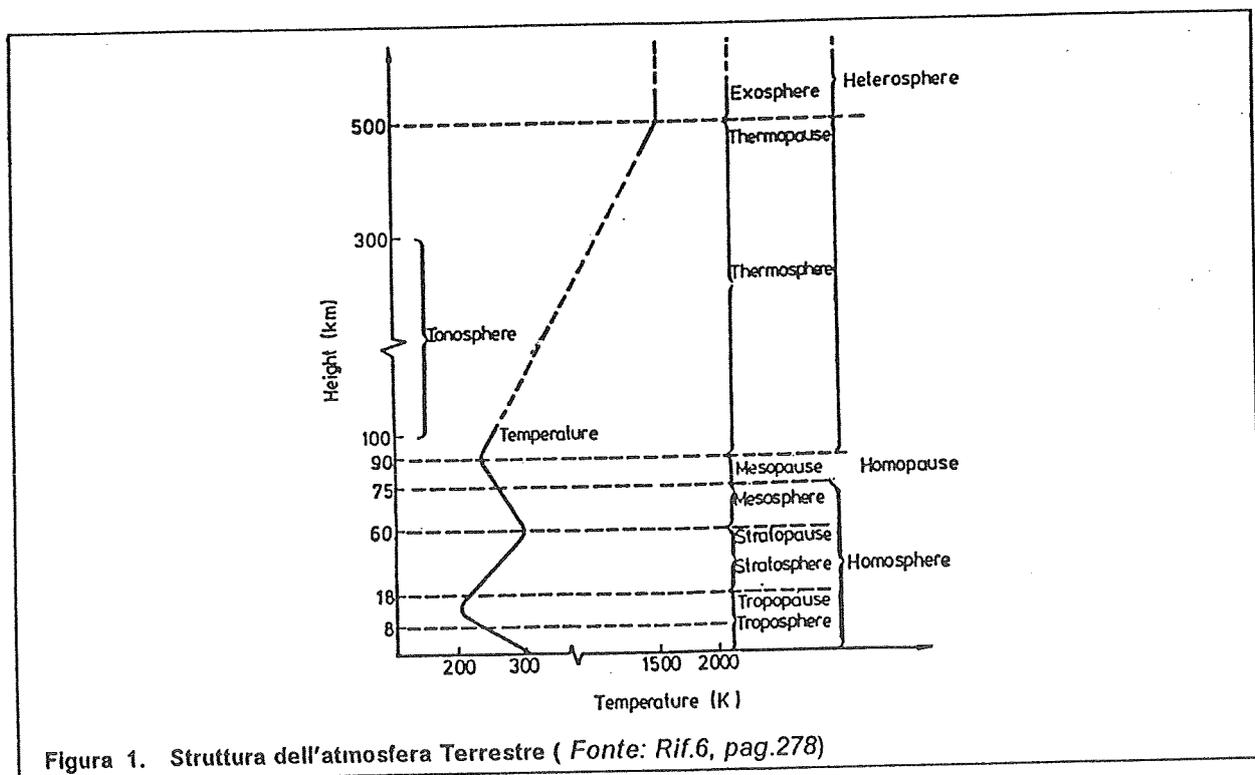


Figura 1. Struttura dell'atmosfera Terrestre (Fonte: Rif.6, pag.278)

In base alla composizione chimica l'atmosfera terrestre puo' essere suddivisa in due parti: l'omosfera e l'eterosfera. L'omosfera si estende dalla superficie planetaria fino a circa 90-100 Km di quota ed e' caratterizzata da una composizione uniforme, poiche' i gradienti verticali di temperatura prevalenti mantengono livelli di turbolenza tali da garantire un certo rimescolamento (Rif.7). I principali costituenti dell'omosfera sono l'azoto molecolare, con una concentrazione in volume del 78.084%, seguito dall'ossigeno con il 20.9476%, dall'argo con lo 0.934%, dall'anidride carbonica con lo 0.0314% e da altre sostanze in tracce.

Fra i 15 e i 40 Km di quota si riscontra uno scostamento dall'omogeneita' composizionale dell'atmosfera. Infatti la radiazione ultravioletta di origine solare dissocia le molecole di ossigeno e la successiva combinazione di ossigeno atomico e molecolare provoca la formazione di ozono.



Sopra i 90 Km di quota la radiazione ultravioletta estrema (EUV: 40-2000 Å ) comincia a provocare dapprima la dissociazione dell'ossigeno (a circa 105 Km), quindi anche quella dell'azoto, mentre i processi di trasporto diffusivo, divenuti importanti, separano le diverse specie atomiche e molecolari presenti, creando una composizione variabile con la quota. Questa regione piu' esterna prende il nome di eterosfera ed e' separata dalla regione inferiore dall'omopausa, che segna il confine fra le masse d'aria dominate dal rimescolamento turbolento e quelle dominate dall'equilibrio diffusivo.

In base alla temperatura l'atmosfera puo' essere suddivisa in cinque strati: troposfera, stratosfera, mesosfera, termosfera ed esosfera (Fig.1).

La struttura dell'atmosfera puo' inoltre essere classificata in base al grado di ionizzazione. La ionosfera e' quella regione in grado di riflettere le onde radio a causa della parziale ionizzazione dei suoi costituenti ad opera della radiazione EUV e dei raggi cosmici. Si estende a partire dalla quota di circa 60 Km fino a confondersi con il plasma interplanetario.

### Modelli semiempirici

Per poter stabilire delle relazioni matematiche fra i parametri atmosferici (temperatura, densita', pressione...) sono stati generati svariati modelli sulla base della validita' dell'equazione barometrica nell'atmosfera e di quella dell'equilibrio diffusivo nell'eterosfera.

L'equazione barometrica:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{T}{\bar{M}} d\left(\frac{\bar{M}}{T}\right) - \frac{\bar{M}}{RT} g dz \quad [8]$$

esprime la dipendenza della densita' ( $\rho$ ) dalla temperatura ( $T$ ), dalla massa molecolare media ( $\bar{M}$ ) e dall'altezza geometrica ( $z$ ).  $R$  e' la costante universale dei gas mentre la forza specifica dovuta alla gravita' e' data da:

$$g = \frac{g_a R_a^2}{(R_a + z)^2}, \quad [9]$$

dove  $g_a = 9.80665 \frac{m}{sec^2}$  per  $R_a = 6356.766 Km$ .

L'equazione di diffusione descrive indipendentemente il comportamento di ogni costituente  $i$ -esimo dell'eterosfera:

$$\frac{dn_i}{n_i} = -(1 + \alpha_i) \frac{dT}{T} - dz \left[ \frac{M_i g}{RT} + \frac{\Phi_i}{Dn_i} \right], \quad [10]$$



dove  $n_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $M_i$ ,  $\Phi_i$  e  $D$  sono, rispettivamente, la concentrazione volumetrica, il coefficiente di diffusione termica, la massa molecolare, il flusso di diffusione verticale (nullo tranne che per l'idrogeno) e il coefficiente di diffusione. Se  $T$  indica la temperatura in  $^{\circ}K$  ed  $N$  la concentrazione totale di atomi ( $N = \sum_i n_i$ ), il coefficiente di diffusione e' calcolato come:

$$D = 2.0 \times 10^{20} \frac{\sqrt{T}}{N} \quad [11]$$

La massa molecolare media ( $\bar{M}$ ) e la densita' ( $\rho$ ) sono infine ottenute dalle relazioni:

$$\bar{M} = \frac{\sum_i n_i M_i}{N} \quad [12]$$

$$\rho = \frac{\bar{M} N}{A} \quad [13]$$

con  $A = 6 \times 10^{23}$  (numero di Avogadro).

I profili di densita' atmosferica vengono ricavati per integrazione numerica delle Eqq. 8 e 10. Il calcolo richiede la conoscenza dei:

1. parametri di stato dell'atmosfera (temperatura, densita', massa molecolare media) alla quota piu' bassa di riferimento;
2. profili di temperatura  $T(z)$ ;
3. profili della massa molecolare media  $\bar{M}(z)$ .

Le Eqq. 8 e 10 esprimono una dipendenza esplicita della densita' dalla quota e non dalla latitudine e/o longitudine, ovvero, assumono che le colonne verticali di atmosfera siano indipendenti fra loro.

I parametri di stato sono noti al limite inferiore dell'alta atmosfera (da 90 a 120 Km a seconda dei modelli).

I profili di temperatura vengono ottenuti da relazioni empiriche in grado di fittare i dati reali sul frenamento aerodinamico sperimentato dai satelliti. Profili tipici riportano un aumento della temperatura, dal valore di riferimento  $T_o$ , alla quota  $z_o$ , fino ad un punto di flesso  $T_x$ , a  $z_x$ , dal quale la temperatura tende poi asintoticamente alla temperatura esosferica  $T_{\infty}$ .

Il modello J77 (Rif.8) assume, ad esempio,  $z_o = 90$  Km,  $T_o = 188^{\circ} K$  e  $z_x = 125$  Km. I profili di temperatura sono caratterizzati dalla temperatura esosferica, che costituisce quel parametro del modello in grado di rappresentare diverse variazioni di densita'.

Queste ultime vengono generalmente classificate come:

1. variazioni note;

2. variazioni prevedibili;
3. variazioni casuali.

Le prime sono trattate matematicamente dai modelli deterministici e comprendono sia le variazioni di densità cosiddette statiche che quelle dinamiche. Mentre le componenti statiche esprimono solo la dipendenza della densità dall'altezza, quelle dinamiche tengono anche conto dei cambiamenti di densità nel tempo.

Se dunque si assumono delle condizioni particolari di riscaldamento dell'alta atmosfera, ovvero, se si definiscono dei profili di temperatura corrispondenti ad una temperatura esosferica fissata ( $T_{\infty F}$ ), la densità statica ( $\rho_s$ ) può essere espressa in funzione di un'altezza ( $z$ ) variabile e del parametro  $T_{\infty F}$  nel seguente modo:

$$\rho_s = \rho_s(z, T_{\infty F}) \quad [14]$$

mentre i profili di densità possono essere ricavati risolvendo le equazioni barometrica e di diffusione. Si può definire in particolare una densità statica media in corrispondenza di condizioni di riscaldamento medie dell'atmosfera, ovvero di  $T_{\infty F} = 1000^\circ K$ .

Le variazioni di densità nel tempo possono essere dovute sia a fenomeni di natura termica che non. Quegli effetti causati dal riscaldamento si manifestano in cambiamenti della temperatura esosferica e quindi la 14 è ancora formalmente corretta, a patto naturalmente che vi si consideri una temperatura esosferica variabile nel tempo ( $T_{\infty}$ ). Per questo motivo ogni modello di densità ha ricavato delle relazioni empiriche opportune per poter rappresentare la dipendenza di  $T_{\infty}$  dai parametri che misurano l'entità del riscaldamento. È noto da tempo che il flusso solare a 10.7 cm risulta direttamente correlato con il riscaldamento dell'alta atmosfera prodotto dalla radiazione solare incidente. Pertanto, l'attività solare è propriamente valutata dall'intensità di questa radiazione, ovvero dall'indice  $F_{10.7}$  (frequenza 2800 MHz e lunghezza d'onda 10.7 cm). Il flusso  $F_{10.7}$  proviene dalla corona solare e comprende una componente costante, associata alle regioni calme della corona, ed una impulsiva legata alle eruzioni da parte dei centri attivi. Per un Sole quieto osservato al minimo della sua attività, il flusso risulta pari a circa 66 unità (1 unità di flusso =  $10^{-22} W m^{-2} Hz^{-1}$ ), mentre vicino ad un massimo tale flusso può variare dalle 200 (ciclo debole) alle 400 (ciclo forte) unità.

Le variazioni riscontrate nella termosfera e nell'esosfera a causa dell'attività solare sono essenzialmente di due tipi. Una è lenta e si estende su un periodo di 11 anni circa, in corrispondenza della variazione del flusso solare medio durante un intero ciclo. L'altra è una variazione piuttosto rapida che si manifesta su scale giornaliere. In particolare si ha che:

- in un giorno il flusso solare varia molto lentamente e può essere considerato praticamente costante;
- in qualche giorno le variazioni sono piuttosto irregolari e possono ricoprire un intervallo di diverse decine di unità, seguendo o meno l'apparizione di macchie solari;

- su scala mensile si nota un ripetersi grossolano del ciclo ogni 27 giorni (periodo di rotazione del Sole).

I modelli di densità formulano una dipendenza empirica della temperatura esosferica dal flusso solare a 10.7 cm. Il modello Jacchia 71 (Rif.9), ad esempio, stabilisce una relazione lineare fra il flusso solare mediato su tre rotazioni solari (81 giorni) e la temperatura esosferica minima durante la notte, sempre mediata su 81 giorni. La relazione è la seguente:

$$\bar{T}_{\infty} = 379 + 3.24 \bar{F}_{10.7} \quad (^{\circ}K) \quad [15]$$

La temperatura esosferica notturna minima globale per un dato giorno è invece data da:

$$T_c = \bar{T}_{\infty} + 1.3 (F_{10.7} - \bar{F}_{10.7}) \quad (^{\circ}K) \quad [16]$$

dove  $F_{10.7}$  è il flusso solare relativo al giorno corrispondente. Le relazioni 15 e 16 si riferiscono a condizioni geomagnetiche calme. È noto però che il Sole emette incessantemente un plasma neutro chiamato vento solare. Dalle interazioni di questo con la magnetosfera derivano dei cambiamenti della temperatura e della densità dell'atmosfera superiore. In occasione di tempeste geomagnetiche, quando a causa di eventi molto energetici che avvengono sul Sole, come i brillamenti, possono essere eruttate nello spazio nubi di plasma e campi associati di elevata intensità, quei cambiamenti possono essere rilevanti. L'effetto del vento solare sull'atmosfera viene espresso dall'indice geomagnetico planetario  $K_p$  usato per misurare le variazioni mediate nell'arco di tre ore del campo magnetico terrestre.

Il modello di Jacchia 71 apporta la seguente correzione alla temperatura esosferica:

$$\Delta T_{\infty} = 28 K_p + 0.03 e^{K_p} \quad (^{\circ}K) \quad \text{per } z > 200Km, \quad [17]$$

$$\Delta T_{\infty} = 14 K_p + 0.02 e^{K_p} \quad (^{\circ}K) \quad \text{per } z < 200Km. \quad [18]$$

Il rigonfiamento diurno dell'atmosfera prodotto dal riscaldamento solare è centrato pressapoco nel punto sub-solare e dipende sia dal flusso  $F_{10.7}$  che dalla declinazione del Sole ( $\delta_s$ ). Inoltre, la latitudine geodetica ( $\psi$ ) e l'angolo orario solare (H) esprimono la posizione del satellite rispetto al punto sub-solare.

I fenomeni finora descritti hanno un'origine termica e come già accennato sono delle variabili della funzione temperatura esosferica, che può simbolicamente essere espressa come:

$$T_{\infty} = T_{\infty} (F_{10.7}, K_p, \psi, H, \delta_s) \quad [19]$$

e sostituita nell'Eq.14 per ottenere la componente dinamica della densità.

Le variazioni non termiche di densità risultano generalmente poco note e sono spesso associate al ciclo semiannuo o alle variazioni stagionali e/o latitudinali.

Vengono formalmente considerate moltiplicando il termine di destra della 14 per un fattore  $D(t, z, \psi, \delta_s)$ .

Il carattere di casualita' nella previsione della densita' atmosferica e' una conseguenza della difficulta' di prevedere l'attivita' solare e i disturbi associati alla magnetosfera. Alla base delle fluttuazioni non prevedibili vi sono invece i disturbi associati con le regioni attive del disco solare e le tempeste geomagnetiche risultanti.

## **Modelli empirici**

I primi modelli empirici dell'atmosfera furono ricavati dalle misure di densita' derivate dallo studio delle perturbazioni orbitali di satelliti. In seguito divennero disponibili misure dirette di temperatura compiute da diverse stazioni radar con la tecnica della diffusione incoerente di onde radio ad opera delle fluttuazioni termiche stocastiche della densita' elettronica nella ionosfera (Rif.7). Inoltre, misure compiute con lo spettrometro di massa dal satellite OGO 6, ad esempio, permisero di analizzare la composizione dell'alta atmosfera.

L'insieme dei risultati sperimentali ha consentito di generare dei modelli globali di atmosfera. L'intervallo di tempo coperto dai dati si estende generalmente su dei periodi di diversi anni e include dei flussi solari a 10.7 cm in un intervallo sufficientemente esteso.

## **Modelli di densita' utilizzati dal programma TDBM**

Il programma TDBM calcola il valore della densita' atmosferica terrestre a diverse altezze usando i modelli riportati di seguito:

1. **al di sotto di 86 Km:** modello *Vandenberg AFB reference atmosphere (VRA-71, Rif.13)*;
2. **fra 86 Km e 1000 Km :** modello *U.S. Standard Atmosphere 1976 (USSA-76, Rif.10)*.

Sopra i 1000 Km di altezza viene considerata una densita' uguale a zero.

Entrambi i modelli rappresentano una densita' statica sfericamente simmetrica. Il modello 2, in particolare, riporta i valori della densita' statica media, ovvero, quella corrispondente ad una temperatura esosferica di 1000 °K.

I profili di densita' e di temperatura sono raccolti in tabelle per certe altezze assegnate. Quei valori di densita' compresi fra i punti assegnati vengono ottenuti per interpolazione esponenziale nel primo caso (sotto 86 Km) e per interpolazione lineare nel secondo.

Alla base dell'interpolazione esponenziale si trova la legge che regola l'andamento della densita' ( $\rho$ ) con l'altezza ( $z$ ):

$$\rho = \rho_0 \exp\left[-\frac{(z - z_0)}{H}\right] \quad [20]$$

dove  $z_0$  e' l'altezza di riferimento e  $\rho_0$  e' la densita' all'altezza di riferimento mentre la quantita'  $H$ , che caratterizza le variazioni verticali di densita', e' detta altezza di scala ed e' data da:

$$\frac{1}{H} = -\frac{d\rho}{\rho dz} \quad [21]$$

L'introduzione dell'altezza di scala e' necessaria per tener conto delle discontinuita' riscontrate nella densita' atmosferica a varie altezze. Infatti, per altezze basse (dai 100 ai 200 Km), dove la densita' atmosferica dipende fundamentalmente dalla quota, una differenza in altezza di qualche Km puo' manifestarsi in raddoppi della densita'. D'altra parte, per altezze elevate (sopra 400 Km circa), dove la densita' dipende soprattutto dalla temperatura esosferica, salti anche di diverse decine di Km possono non avere un riscontro apprezzabile sulla densita'.



## Equazioni del moto e metodi di soluzione

Il moto di un satellite e' dato dalla soluzione della seguente equazione:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{P} \quad [22]$$

dove  $t$  e' il tempo fisico,  $\mu$  e' il parametro gravitazionale del corpo centrale,  $\vec{r}$  e' il raggio vettore del satellite e  $\vec{P}$  e' la somma di tutte le accelerazioni perturbatrici. Sia  $\vec{r}$  che  $\vec{P}$  sono espressi nel riferimento rettangolare equatoriale planetocentrico.

Il **metodo delle perturbazioni speciali** consiste nel calcolare la traiettoria di un satellite per integrazione numerica dell'Eq.22.

Esiste un altro modo per scrivere e risolvere le equazioni del moto di un satellite ed e' quello che prevede uno sviluppo analitico delle perturbazioni in funzione del tempo. Tale metodo, anche detto delle perturbazioni generali o assolute, richiede pero' l'assunzione di ipotesi particolari relative all'ampiezza delle accelerazioni in gioco e quindi, dove non e' possibile derivare una teoria generale delle perturbazioni, l'integrazione numerica offre il solo mezzo per calcolare accuratamente le traiettorie.

Il modello che abbiamo sviluppato per calcolare la traiettoria di un velivolo nell'atmosfera usa il metodo di Cowell e assume che l'Eq.22 possa essere riscritta nella forma equivalente:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad [23]$$

dove la funzione  $\vec{F}$  e' data dalla somma del termine centrale e delle varie perturbazioni agenti sul satellite.

### *Integratori numerici lineari*

Se viene usato il metodo delle perturbazioni speciali, la traiettoria perturbata di un satellite e' calcolata integrando numericamente l'Eq.22 (o 23).

Esistono molti algoritmi di integrazione già descritti ampiamente in letteratura. Qui ci limitiamo a presentare, nonché ad utilizzare, una sottoclasse di quelli di tipo lineare di primo grado, ovvero, gli integratori cosiddetti a *single-step*, dei quali fa parte fra l'altro il metodo di Runge-Kutta.

Premettiamo che un integratore lineare può essere applicato solo ad equazioni differenziali del primo ordine, alle quali deve pertanto essere ricondotta una qualsiasi equazione di ordine superiore. Detto questo, se con  $\vec{V}$  si indica la velocità planetocentrica del satellite, l'Eq.23 può essere riformulata nelle relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{V}, \\ \frac{d\vec{V}}{dt} &= \vec{F}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad [24]$$

che possono essere risolte usando la regola di approssimazione sulla quale sono basati gli integratori lineari.

Se per semplicità di notazione si riscrive ciascuna delle 24 nella sua forma equivalente:

$$\dot{y} = f(y, t), \quad [25]$$

l'approssimazione suddetta si esprime nel seguente modo:

$$\frac{y_{n+1} + \sum_{p=p_0}^{p=P} a_p y_{n+1-p}}{h} = \sum_{p=n_0}^{p=N} b_p f_p \quad [26]$$

dove  $h$  è il passo di integrazione,  $a_p$  e  $b_p$  sono dei coefficienti opportunamente scelti,  $y_n$  è il valore della soluzione dell'Eq.25 all'istante  $t_n = t_0 + nh$  mentre  $y_{n+1}$  è il valore da stimare al tempo  $t_{n+1}$ .

Il termine di sinistra della 26 fornisce una valutazione della derivata prima ( $\dot{y}$ ), ottenuta come una media ponderata dei valori  $y_n$  presi a date equidistanti  $t_n$ . Il termine di destra rappresenta invece una valutazione della funzione  $f(y,t)$  come una certa media ponderata dei valori  $f_p$  presi vicini alla data  $t_{n+1}$ .

La formulazione presentata finora è valida sia per algoritmi a *single-step* che per algoritmi a *multi-step* (altra sottoclasse degli integratori lineari). Ciò che distingue un metodo dall'altro è la scelta del reticolo di punti  $(y_p, t_p)$  vicini a  $(y_n, t_n)$  dove viene calcolata la funzione  $f(y,t)$ . Infatti, un integratore è detto a *single-step* se la costruzione del reticolo  $(y_p, t_p)$  dipende soltanto da  $(y_n, t_n)$ , ovvero, se la valutazione di tutte le  $f_p$  ad ogni passo di integrazione è indipendente dai calcoli fatti ai passi precedenti. Questo fatto costituisce di per sé un vantaggio a favore degli integratori a *single-step*, dal momento che questi non richiedono particolari inizializzazioni del processo, come invece succede per i tipi a *multi-step*.

Il metodo di Runge-Kutta e' del tipo a *single-step* ed e' basato sulle seguenti formule di approssimazione:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{p=1}^N h b_p f_p \quad [28]$$

dove N sta per quante volte viene valutata la funzione  $f(y,t)$ ,  $b_p$  sono i pesi e le  $f_p$  sono delle funzioni che soddisfano la seguente relazione per ricorrenza:

$$f_p = f\left(y_n + \sum_{j=1}^N a_{pj} f_j, t_n + c_p h\right) \quad p = 1, \dots, N. \quad [29]$$

A seconda di quali regole vengono seguite per costruire il reticolo  $(y_p, t_p)$  e quindi per scegliere le costanti  $a_{pj}$  e  $c_p$  e i coefficienti di ponderazione  $b_p$ , si individuano gli integratori di Runge-Kutta del quarto, del sesto e dell'ottavo ordine. E' ovvio che aumentando l'ordine aumenta il numero di termini della serie in cui viene sviluppata la soluzione e diminuiscono pertanto gli errori di troncamento che si commettono nell'accettare una serie troncata al posto della soluzione esatta.

Gli errori di troncamento risultano in generale tanto piu' grandi quanto piu' N e' piccolo e il passo di integrazione e/o la durata dell'integrazione sono grandi.

Esiste anche un'altra causa di errore commesso da un integratore numerico ed e' l'errore di arrotondamento. Questo dipende sostanzialmente dal numero di operazioni elementari effettuate e dal condizionamento delle stesse ed e' tanto piu' grande quanto piu' il passo e' piccolo e le integrazioni sono di lunga durata.

Esiste un passo d'integrazione ottimale, che aumenta con N, per il quale gli errori di arrotondamento e di troncamento sono equivalenti e l'errore totale risulta minimo.

Inoltre, la convergenza dell'equazione differenziale del moto alla soluzione esatta e' una proprieta' desiderabile in ogni metodo. Questo significa che, a mano a mano che il metodo diviene piu' raffinato (usando sempre piu' termini di una serie, o passi h via via piu' piccoli), la successione delle soluzioni approssimate tende a convergere alla soluzione esatta.

Per un integratore del primo ordine (integratore di Eulero) si ha che:

$$p_0 = P = 1, \quad n_0 = N = 1, \quad a_1 = -1, \quad b_1 = +1$$

$$f_1 = f(y_n, t_n)$$

e l'Eq.26 diventa:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(y_n, t_n) \quad [27]$$

## **Equazioni del moto di velivoli sottoposti ad accelerazioni aerodinamiche**

Il modello di calcolo che e' stato sviluppato e implementato nel programma TDBM considera il moto di veicoli spaziali all'interno di un'atmosfera planetaria e puo' simulare

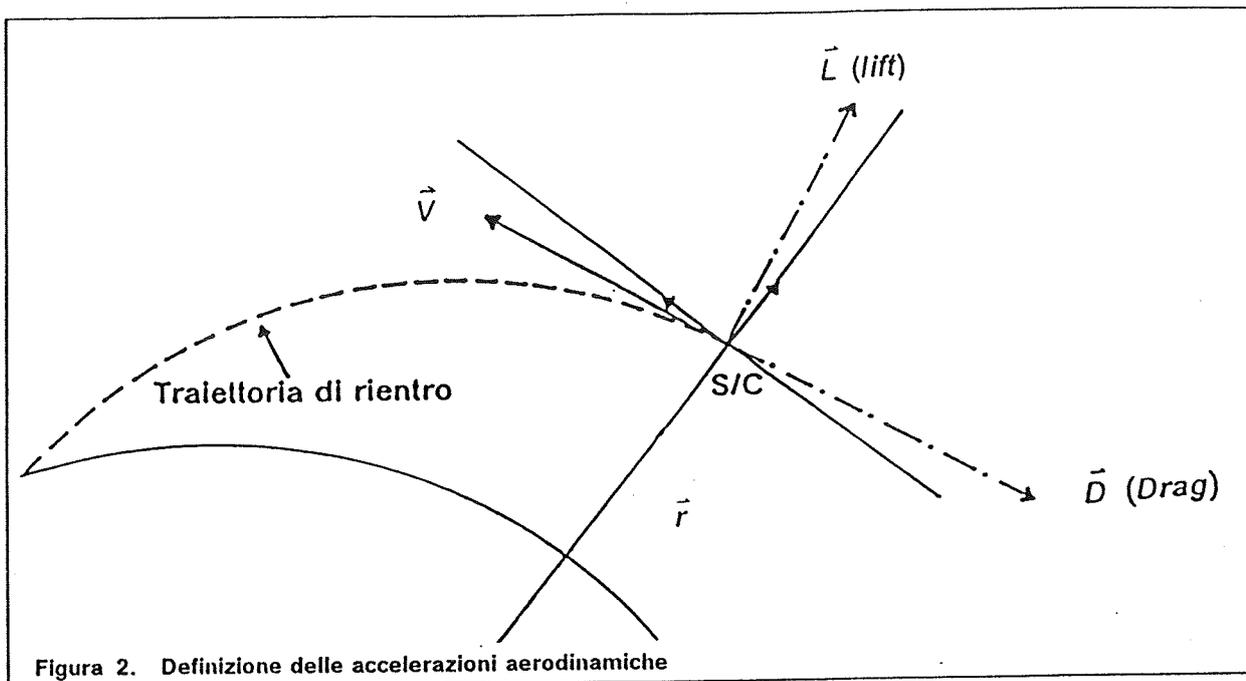
- la traiettoria di un satellite dal rientro nell'atmosfera fino all'impatto al suolo,
- la fase di rientro di un velivolo a fusoliera portante,
- le fasi di volo balistiche di un missile;

assumendo le seguenti ipotesi semplificatrici:

1. il pianeta e' considerato sferico e non ruotante (viene tenuto conto soltanto del termine di monopolo gravitazionale proporzionale a  $r^{-2}$ );
2. vengono ignorate le perturbazioni gravitazionali di altri corpi che non siano quello centrale;
3. non viene considerata la pressione di radiazione solare;
4. le accelerazioni aerodinamiche sono assunte proporzionali alla velocita' al quadrato del velivolo;
5. la forza aerodinamica agisce lungo le direzioni tangenziale (frenamento) e normale (portanza) al moto del velivolo (Fig.2);
6. si suppone che l'atmosfera sia in quiete e sfericamente simmetrica ( $V_{\oplus}$  nell'espressione 4 risulta nulla e la velocita' del satellite rispetto all'atmosfera coincide con la velocita' propria del satellite, ossia:  $\vec{V}_R = \vec{V}$ );
7. il parametro balistico e' costante;
8. la portanza e' costante.
9. il moto del velivolo viene descritto in uno spazio inerziale bidimensionale (X,Z) con origine nel centro di massa del pianeta.

### **Accelerazioni aerodinamiche**

In base all'ipotesi 5 sono state calcolate due accelerazioni aerodinamiche, una dovuta al frenamento, l'altra alla portanza.



Il frenamento agisce lungo la stessa direzione, ma nel verso opposto, alla velocità del velivolo e l'accelerazione risultante può essere modellizzata usando l'Eq.4.

Se si introduce il parametro balistico B così definito:

$$B = \frac{AC_D}{2m} \quad [30]$$

l'Eq.4 può anche essere riscritta come:

$$\vec{\gamma} = -\rho V_R |\vec{V}_R| B \quad [31]$$

L'accelerazione dovuta alla portanza agisce perpendicolarmente alla direzione del moto del velivolo e può essere modellizzata in modo analogo a quella dovuta al frenamento introducendo la portanza L, così definita:

$$L = \frac{AC_L}{2m} \quad [32]$$

Usando l'Eq.31 e in base all'ipotesi 6 sono state ottenute le equazioni per l'accelerazione dovuta al frenamento lungo gli assi X ( $\ddot{X}_D$ ) e Z ( $\ddot{Z}_D$ ) del riferimento inerziale planetocentrico:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_D &= -B\rho V^2 \frac{\dot{X}}{|\vec{V}|}, \\ \ddot{Z}_D &= -B\rho V^2 \frac{\dot{Z}}{|\vec{V}|}. \end{aligned} \quad [33]$$

Per calcolare l'accelerazione aerodinamica dovuta alla portanza basta tener conto che questa agisce in direzione perpendicolare all'accelerazione dovuta al frenamento (Fig.2). Le sue componenti lungo gli assi X e Z sono:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_L &= -L\rho V^2 \frac{\dot{Z}}{|\vec{V}|}, \\ \ddot{Z}_L &= L\rho V^2 \frac{\dot{X}}{|\vec{V}|}.\end{aligned}\quad [34]$$

### Equazioni del moto

In base a tutte le ipotesi assunte dal modello e ai risultati finora ottenuti sono state scritte le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= -\frac{\mu}{r^3} X - B\rho V^2 \frac{\dot{X}}{|\vec{V}|} - L\rho V^2 \frac{\dot{Z}}{|\vec{V}|}, \\ \ddot{Z} &= -\frac{\mu}{r^3} Z - B\rho V^2 \frac{\dot{Z}}{|\vec{V}|} + L\rho V^2 \frac{\dot{X}}{|\vec{V}|}\end{aligned}\quad [35]$$

dove

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{X^2 + Z^2} \quad [36]$$

e

$$v = |\vec{V}| = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Z}^2} \quad [37]$$

sono rispettivamente il raggio vettore e la velocità del velivolo nel riferimento inerziale planetocentrico.

Le Eqq.35 sono state ricondotte ad un sistema di 4 equazioni differenziali del primo ordine (vedi Eqq.24), in modo da poter essere integrate con uno dei metodi standard di integrazione lineare. In particolare sono stati usati l'integratore di Eulero, che per la sua semplicità è particolarmente adatto per ottenere delle soluzioni approssimate del moto con un tempo molto piccolo di esecuzione, e quello di Runge-Kutta, che permette di ottenere soluzioni più accurate, indipendenti dal passo di integrazione.

### Condizioni iniziali

Le condizioni iniziali nello spazio di coordinate (X,Z) sono state espresse, rispettivamente per la posizione e la velocità del velivolo, come:

$$\vec{r}_0 = (X_0, Z_0)$$

$$\vec{V}_o = (\dot{X}_o, \dot{Z}_o).$$

Indicati con:

- $R_E$  il raggio del pianeta;
- $\gamma_o$  il *flight path angle* iniziale;
- $V_o$  il modulo del vettore velocità iniziale;
- $q_o$  l'altezza iniziale del satellite sulla superficie del pianeta;

dette condizioni iniziali diventano:

per la posizione

$$X_o = 0$$

$$Z_o = q_o + R_E$$

e per la velocità

$$\dot{X}_o = V_o \cos \gamma_o$$

$$\dot{Z}_o = V_o \sin \gamma_o$$

### Integratore di Eulero

Si tratta di un integratore numerico del primo ordine del tipo a *single-step*. L'algoritmo utilizzato è formalmente molto semplice e le soluzioni delle Eqq.35 sono state ottenute come segue:

- se  $h$  individua il passo di integrazione usato (*step-size*), mantenuto fisso durante il calcolo e uguale al valore assegnatogli inizialmente, si ha che ad ogni istante di tempo:

$$t_{n+1} = t_n + h;$$

- le soluzioni delle equazioni del moto sono:

$$X_{n+1} = X_n + h\dot{X}_n$$

$$Z_{n+1} = Z_n + h\dot{Z}_n$$

$$\dot{X}_{n+1} = \dot{X}_n + h\ddot{X}_n$$

$$\dot{Z}_{n+1} = \dot{Z}_n + h\ddot{Z}_n$$

Si noti però che, sebbene formalmente molto semplice, il metodo di Eulero limita al primo ordine lo sviluppo in serie della soluzione, la bontà della quale è fra l'altro condizionata dal passo d'integrazione scelto.

### Integratore di Runge-Kutta

Il programma TDBM usa l'algoritmo a *single-step* di Runge-Kutta estratto da Rif.11. Questo è basato sulla stima della soluzione all'ottavo ordine e considera un passo d'integrazione variabile.

Le equazioni usate sono naturalmente descritte in Rif.11. Qui accenniamo solo all'insieme dei controlli necessari per stabilire se cambiare o meno il passo d'integrazione durante il calcolo, oltre naturalmente al modo in cui tale passo viene ottenuto a partire dalle tolleranze assoluta e relativa, che ogni step deve mantenere (assegnate in input), e dall'errore di troncamento, valutato in base al confronto della soluzione all'ottavo ordine con quella stimata invece al settimo ordine.

Tenuto conto che il metodo di Runge-Kutta dell'ottavo ordine impone che lo sviluppo della soluzione, calcolata dalle Eqq. 28 e 29, sia limitato a  $N = 12$ , mentre quello di ordine 7 limita lo sviluppo a  $N = 10$ , l'errore di troncamento (TERR) viene calcolato come:

$$TERR = \frac{41}{840} |(f_0 + f_{10} - f_{11} - f_{12})| h_0 \quad [38]$$

dove  $h_0$  è il passo d'integrazione prima di essere modificato.

Elenchiamo di seguito i controlli fatti. Si calcola la quantità:

$$RATIO = \left[ \frac{|\hat{y}_{n+1}| RT + AT}{TERR} \right], \quad [39]$$

dove RT e AT sono rispettivamente la tolleranza relativa e quella assoluta che ogni step deve mantenere, mentre  $\hat{y}_{n+1}$  rappresenta la soluzione della Eq.28 al settimo ordine. Quindi:

1. si pone l'errore  $ERR = RT$ ;
2. si confronta ERR con  $1/RATIO$ , in modo che se  $(1/RATIO)$  supera ERR allora  $ERR = 1/RATIO$ ;
3. se  $ERR > 1$  si scarta  $h_0$  e si propaga lo stato corrente  $y_n$  usando il nuovo passo ( $h_1$ ) così calcolato:

$$h_1 = h_0 (RATIO)^{\frac{1}{8}} .$$

[40]

Per concludere, si puo' dire che in generale i metodi di Runge-Kutta

- seguono la soluzione abbastanza bene,
- hanno errori di troncamento relativamente piccoli,
- non richiedono nessuna procedura di inizializzazione dei valori.



## Parametri di rientro

Facendo riferimento a quanto illustrato in Fig.3 ed indicati con:

- $R_E$  il raggio planetario;
- $\ddot{X}_{LD}$  e  $\ddot{Z}_{LD}$ , le componenti dell'accelerazione, ad esclusione di quella di gravita', rispettivamente lungo gli assi X e Z;
- $g_o$  l'accelerazione gravitazionale;
- $R_o$  il range iniziale;

si elencano le variabili che sono state definite e calcolate come parametri di rientro.

- RANGE (R)

$$R = R_o + R_E \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{X}{Z}\right) \quad [41]$$

- ALTEZZA (h)

$$h = \sqrt{X^2 + Z^2} - R_E \quad [42]$$

- VELOCITA' ( $V_{S/C}$ )

$$V_{S/C} = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Z}^2} \quad [43]$$

- ACCELERAZIONE ( $A_{S/C}$ , in unita' di  $g_o$ )

$$A_{S/C} = \frac{\sqrt{\ddot{X}^2 + \ddot{Z}^2}}{g_o} \quad [44]$$

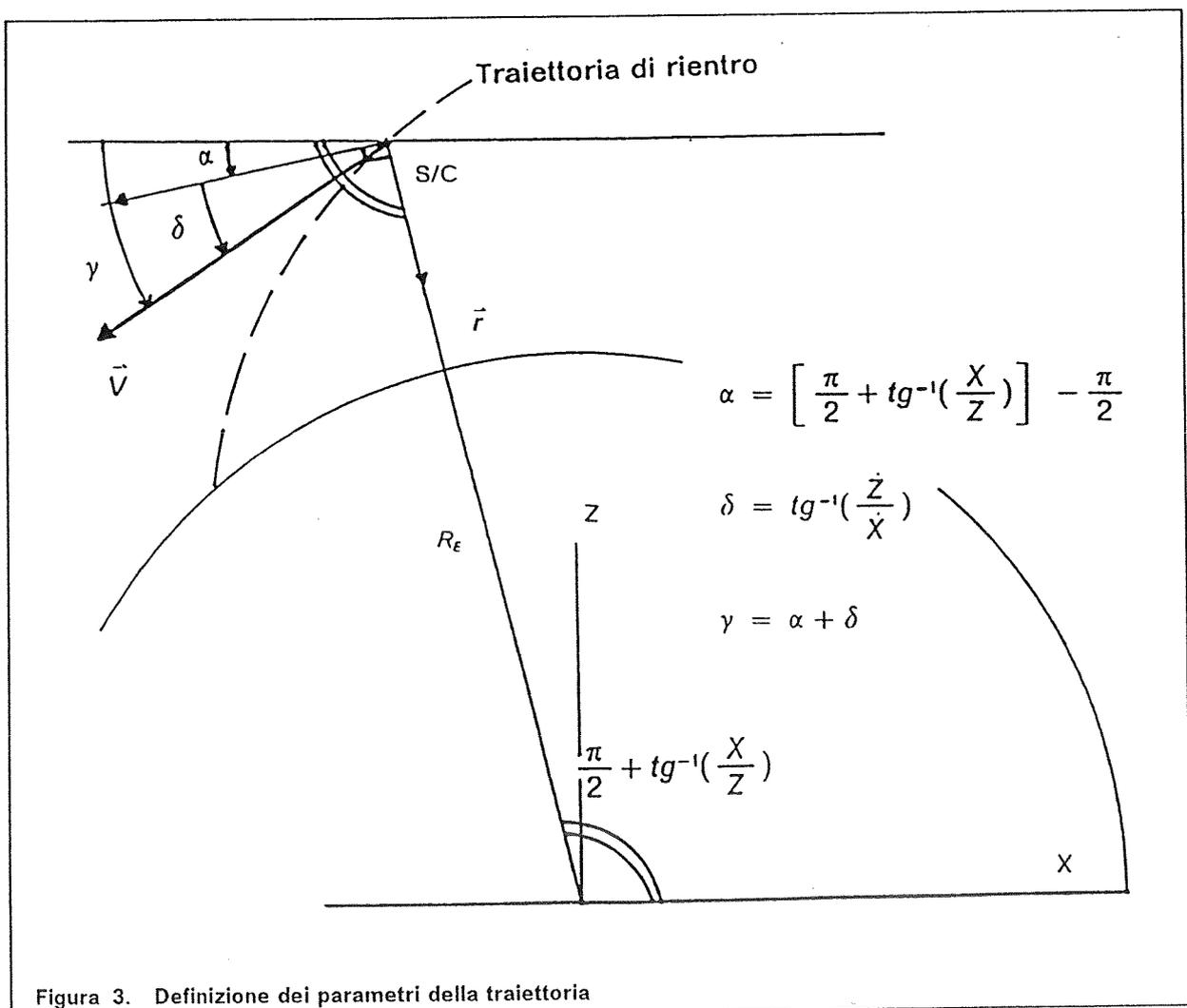
- FATTORE DI CARICO (LDF, in unita' di  $g_o$ )

$$LDF = \frac{\sqrt{\ddot{X}_{LD}^2 + \ddot{Z}_{LD}^2}}{g_0} \quad [45]$$

• FLIGHT PATH ANGLE ( $\gamma$ )

$$\gamma = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\dot{X}}{\dot{Z}}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\dot{Z}}{\dot{X}}\right) \quad [46]$$

Il **fattore di carico** rappresenta l'accelerazione come viene sentita da un pilota o dagli apparati strumentali. In altri termini e' quell'accelerazione dovuta soltanto alle forze di *lift* e di *drag*. Il *flight path angle* viene calcolato a partire dalla geometria illustrata in Fig.3.



## Applicazioni numeriche

### Verifiche di funzionalità del modello

Il programma TDBM è stato testato riproducendo i risultati riportati in Rif.1 per alcuni casi particolari di velivoli sottoposti alle forze aerodinamiche di *lift* e/o di *drag*. Nelle 5 figure (da Fig.4 a Fig.8) relative ai casi considerati, la parte superiore si riferisce a quanto ottenuto in Rif.1, mentre quella inferiore illustra i risultati grafici derivati dal modulo TDBM. La loro comprensione non richiede particolari spiegazioni: qui si elencano semplicemente le variabili di input usate per ottenere ciascuna figura.

FIGURA 4: Variazione della velocità con l'altezza per un rientro con  $L=0$ .

Assumendo che il parametro balistico (B) sia costante, sono state ottenute due curve parametriche in corrispondenza di:

- $B = 159.25 \times 10^{-9} \frac{Km^2}{Kg} (= 25 \frac{ft^2}{slug})$ ,
- $B = 0.318 \times 10^{-9} \frac{Km^2}{Kg} (= 0.05 \frac{ft^2}{slug})$ .

I parametri iniziali erano:

- $\gamma_0 = -1^\circ$ ,
- $V_0 = 7620 \text{ m/sec}$ ,
- $q_0 = 91.440 \text{ Km}$ .

FIGURA 5: Variazione del flight path angle con l'altezza per il caso riportato in Fig.4.

FIGURA 6: Profili caratteristici dell'altitudine in funzione della velocità per veicoli dotati di portanza, nei due casi:

1.  $L/B = 1$ ,
2.  $L/B = 3$ ,

$$\text{con } B = 0.0205 \frac{m^2}{Kg} = 3.22 \frac{ft^2}{slug}.$$

I parametri iniziali erano:

- $\gamma_0 = -10^\circ$ ,

- $V_o = 7620 \text{ m/sec}$ ,
- $q_o = 91.440 \text{ Km}$ .

**FIGURA 7: Influenza della velocità iniziale di rientro sui profili altitudine-velocità per veicoli dotati di portanza:**

- $\gamma_o = -1^\circ$ ,
- $L/B = 0.5$ ,
- $B = 0.234 \times 10^{-3} \frac{m^2}{Kg}$ ,
- $q_o = 91.4 \text{ Km}$ .

Il confronto dei risultati ottenuti con quelli di Rif.1 è stato fatto per diverse velocità iniziali: 4.57 Km/sec, 6.10 Km/sec e 7.31 Km/sec.

**FIGURA 8: Andamento della decelerazione con l'altezza per un rientro con  $L=0$ .**

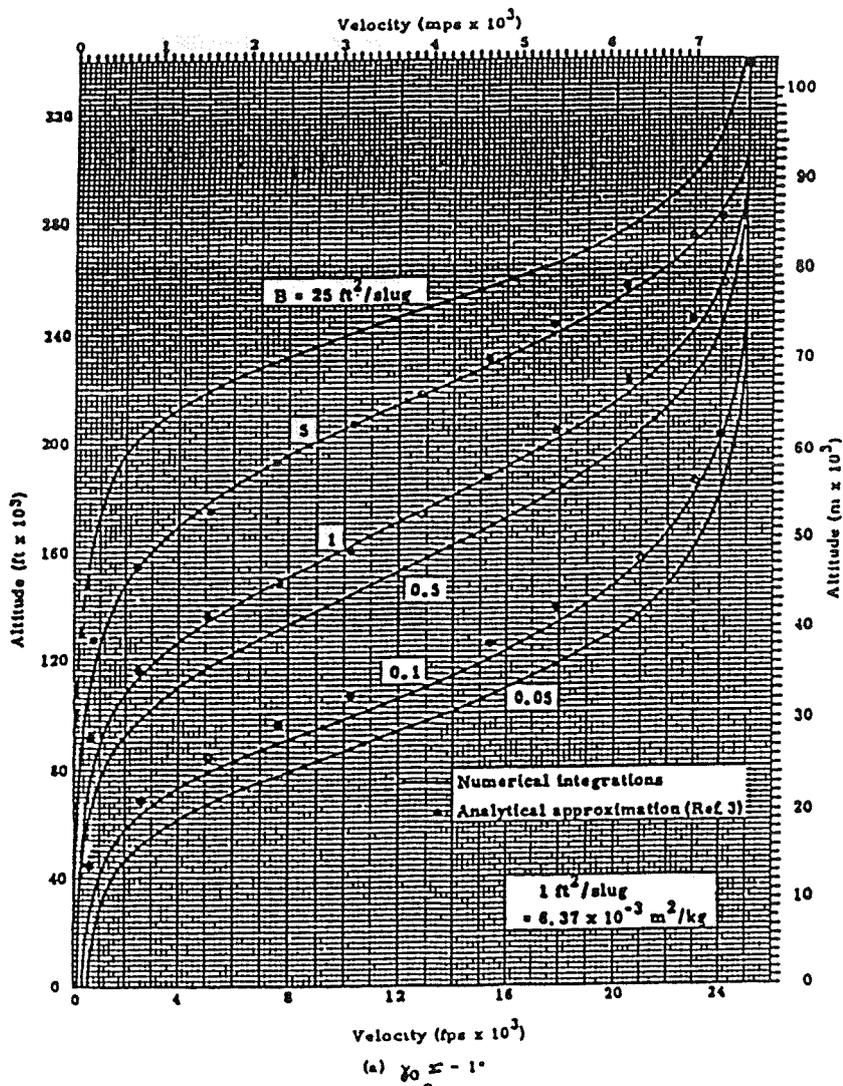
Il parametro balistico era:  $B = 6.37 \times 10^{-3} \frac{m^2}{Kg}$  e i parametri iniziali erano:

- $\gamma_o = 0^\circ$ ,
- $V_o = 7820 \text{ m/sec}$ ,
- $q_o = 161 \text{ Km}$ .

Com'è possibile osservare da Fig.8, la decelerazione scende a zero al di sotto di circa 15 Km. Una tale condizione fisica si realizza quando viene raggiunta la velocità terminale che corrisponde ad una forza di frenamento pari al peso del velivolo.

**N.B.:** Le unità di misura usate in Rif.1 non corrispondono a quelle inserite nel programma TDBM. Per un confronto delle figure da 4 a 8 si forniscono dunque i seguenti fattori di conversione:

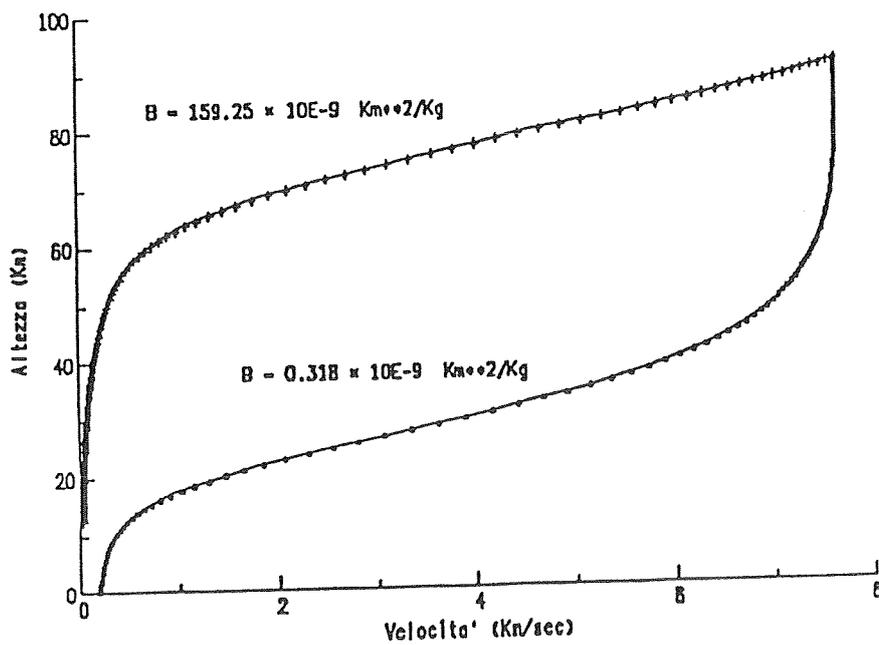
- $1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$ ,
- $1 \text{ slug} = 14.59390294 \text{ Kg}$ .

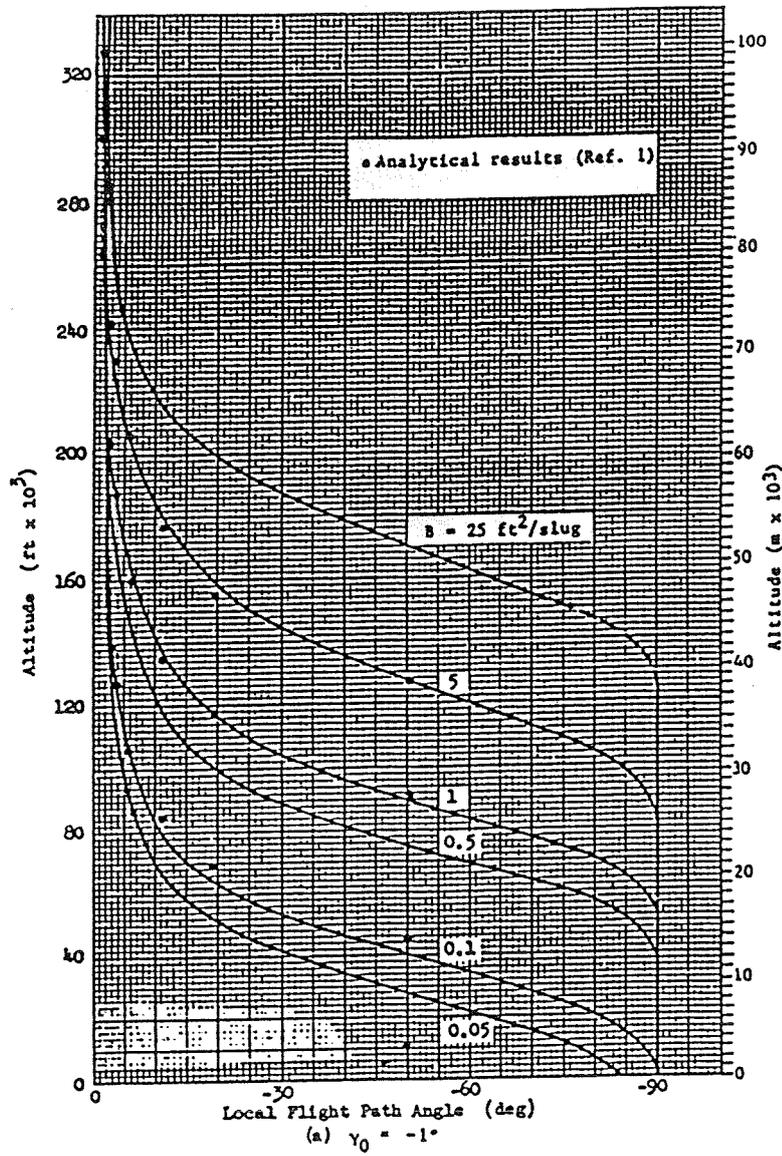


### Velocity Variation with Altitude

( $h_0 = 300000 \text{ ft} = 91.440 \text{ Km}$ ,  $V_0 = 25000 \text{ fps} = 7620 \text{ mps}$ ,  $L/D = 0$ )

FIGURA 4

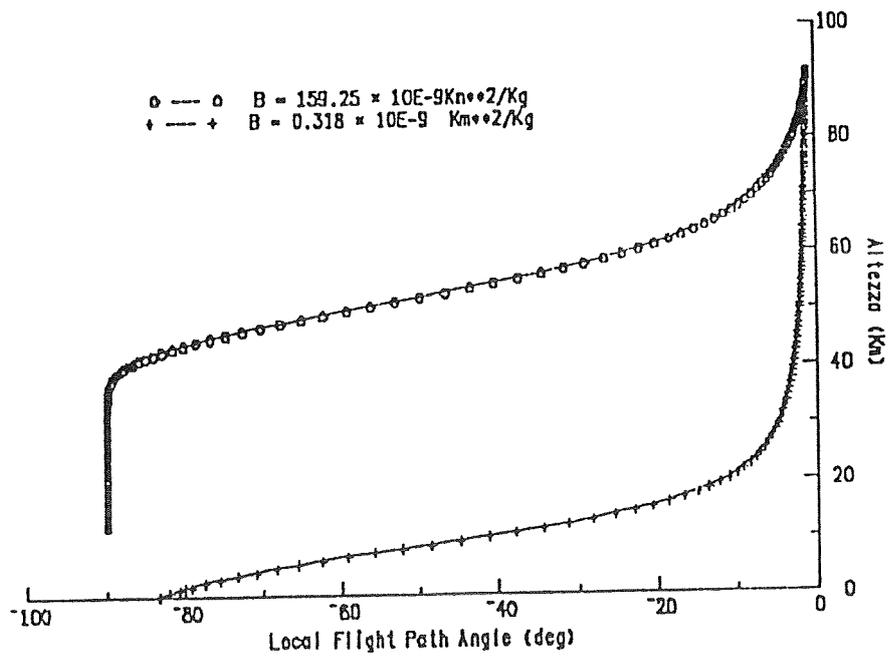




Flight Path Angle Variation with Altitude

FIGURA 5

( $h_0 = 300000 \text{ ft} = 91.440 \text{ Km}$ ,  $V_0 = 25000 \text{ fps} = 7620 \text{ mps}$ )



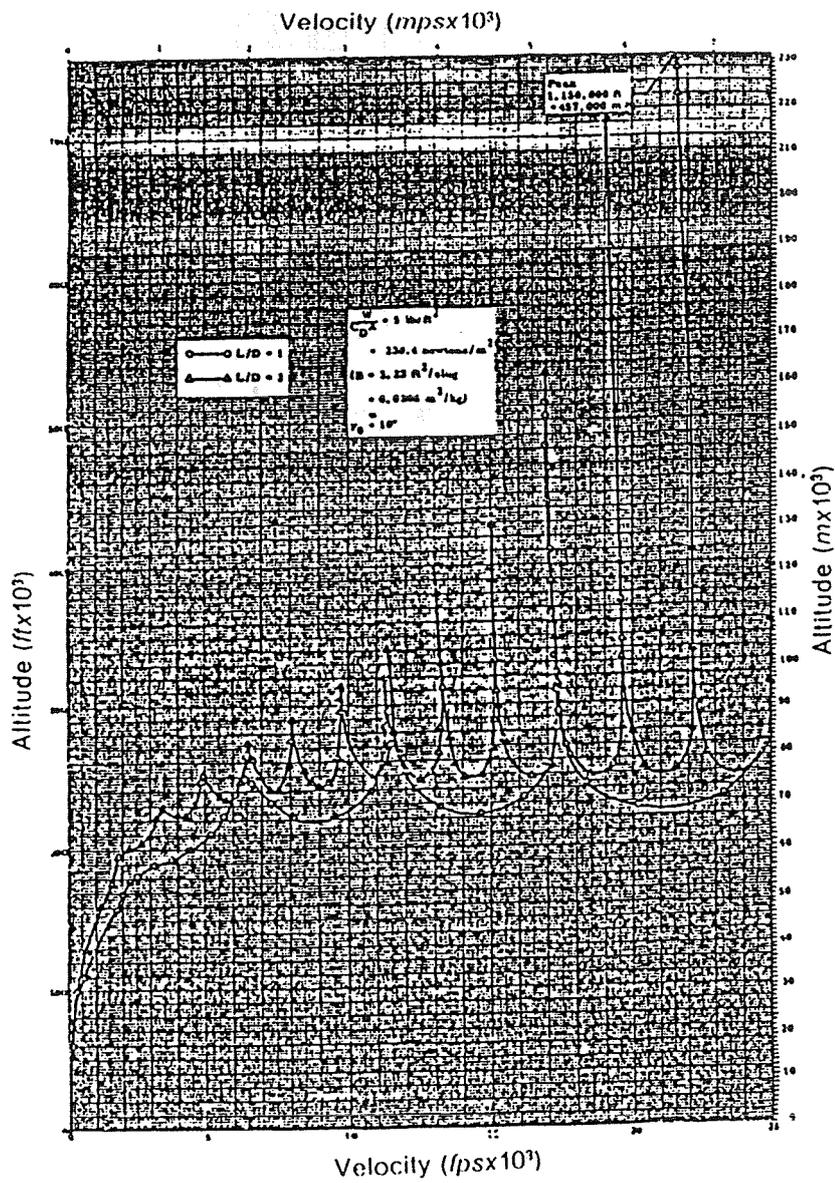
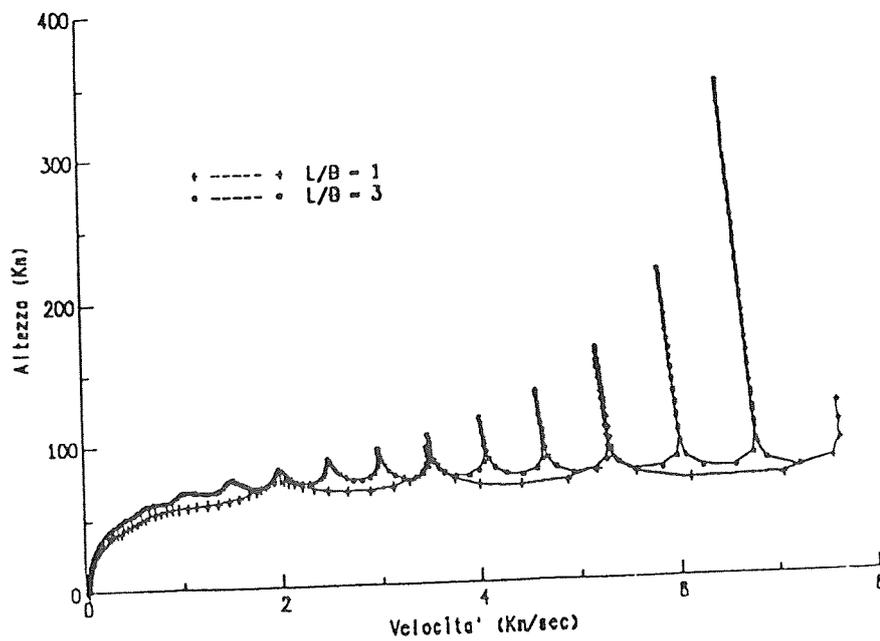


FIGURA 6

Characteristic Re-Entry Altitude-Velocity Profiles for Lifting Vehicles



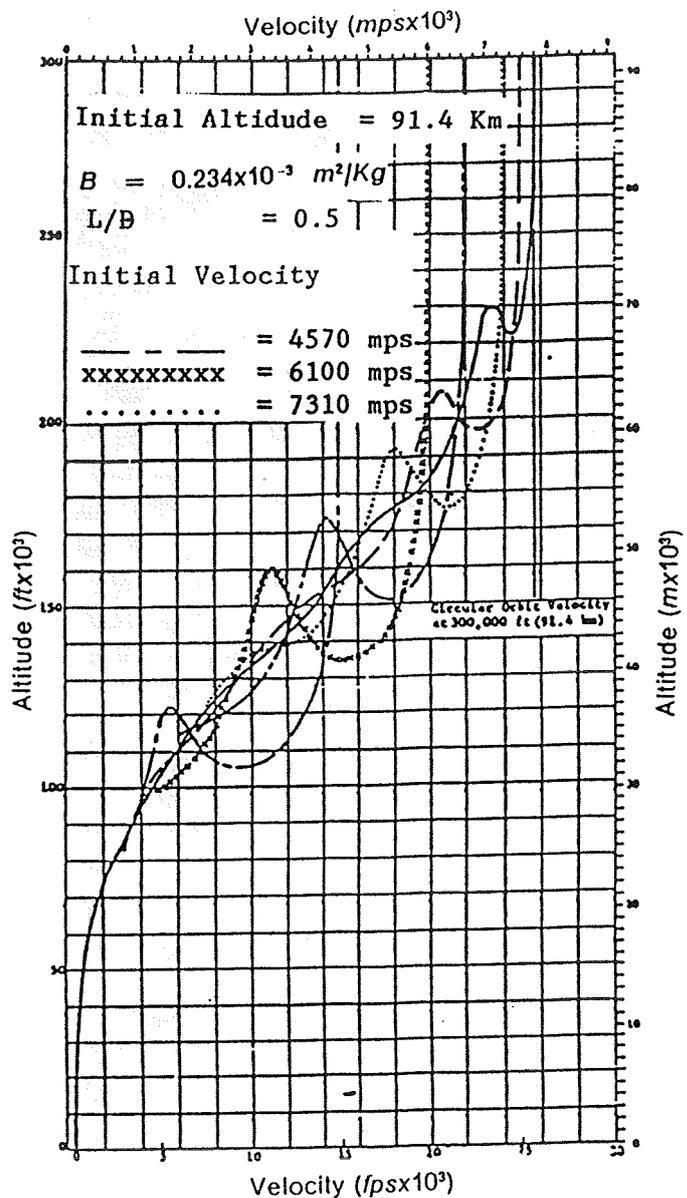
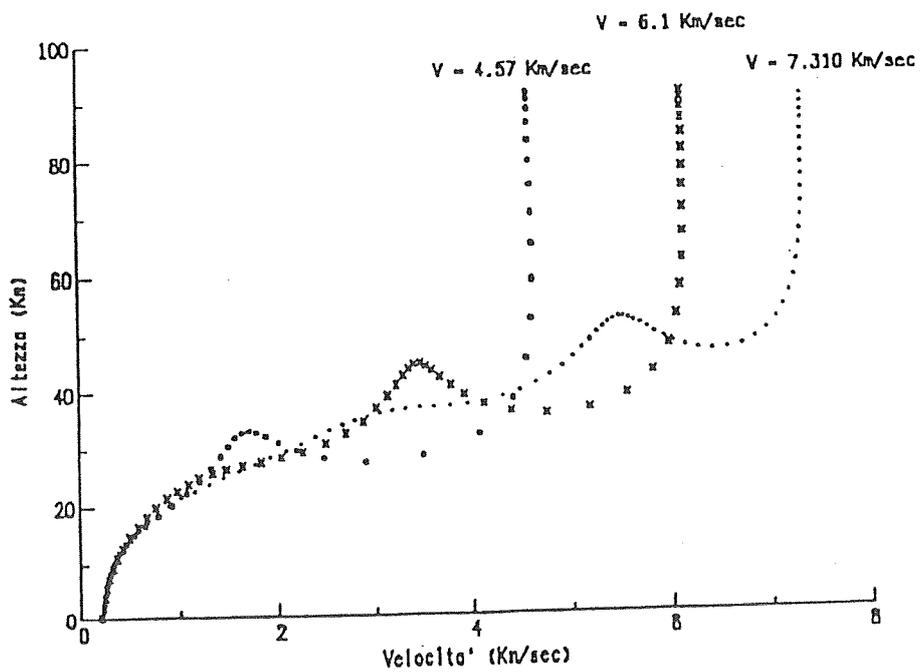
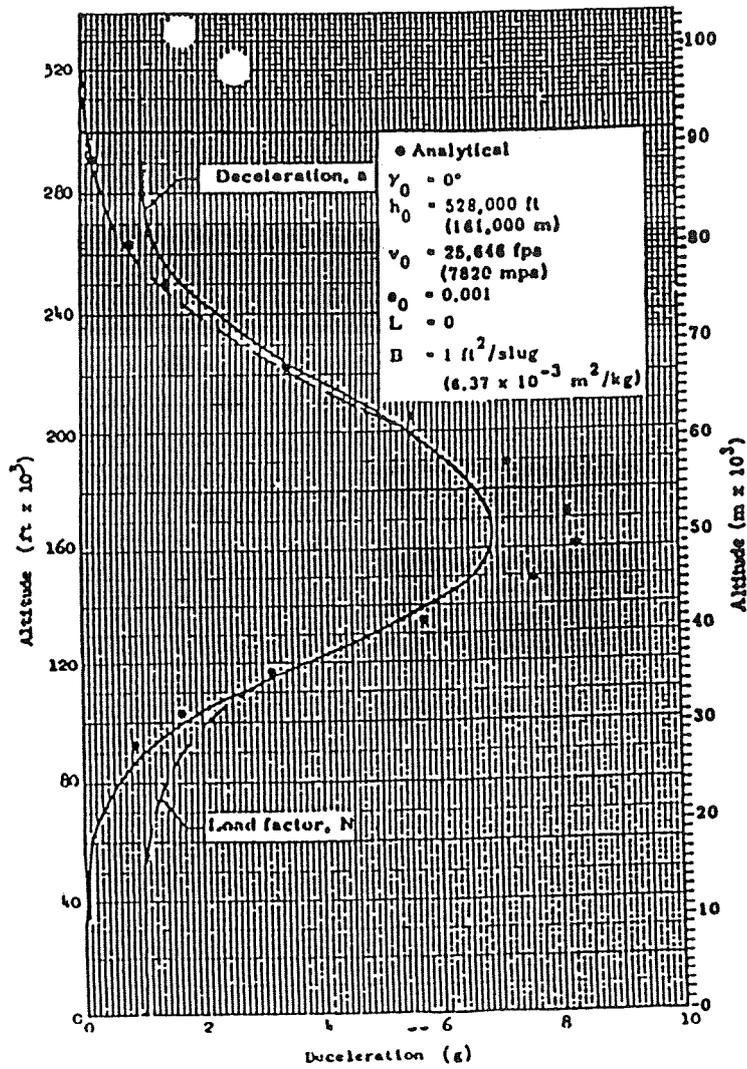


FIGURA 7

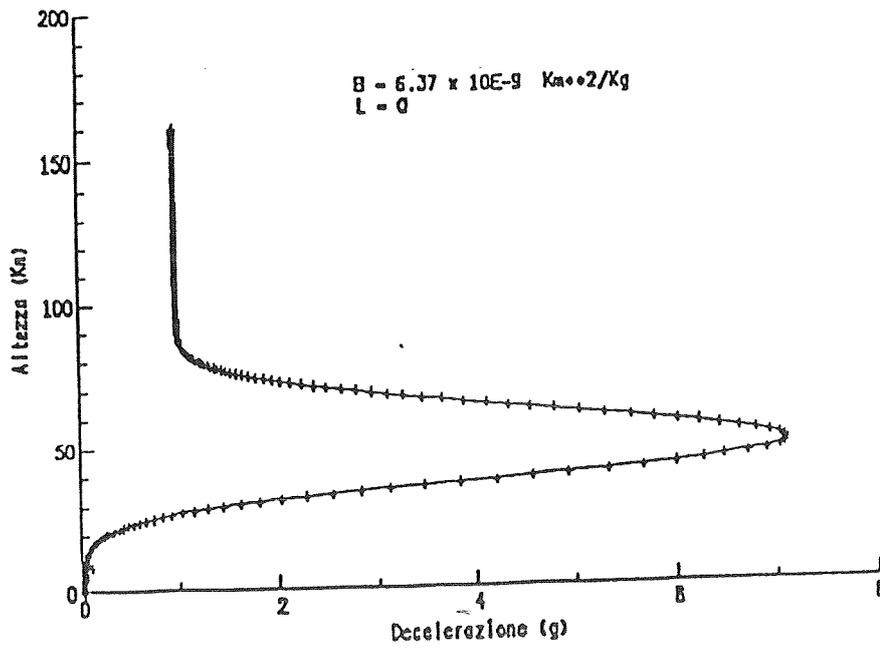
Effect of Entry Velocity on Altitude-Velocity Profile





Deceleration Profile for Satellite Re-Entry

FIGURA 8



## **Frammentazione della stazione spaziale Salyut 7 dopo il rientro nell'atmosfera terrestre**

La stazione spaziale sovietica Salyut 7 venne lanciata il 19 Aprile 1982. Lunga 15 m, con un diametro massimo di 4.15 m e pesante 19 tonnellate, venne inserita su un'orbita di 212 x 260 Km inclinata di 51.6 gradi rispetto all'equatore. In seguito l'altitudine venne portata al di sopra dei 340 Km per mezzo di una serie di manovre.

Il modulo Cosmos 1686, che e' rimasto unito alla stazione fino a rientro avvenuto, venne lanciato il 27 settembre 1985 e si aggancio' alla Salyut 7 il 2 ottobre. Lungo 13 m, con un diametro massimo di oltre 4 m e pesante circa 20 tonnellate costitui' insieme alla stazione un complesso orbitale lungo 28 m e pesante circa 40 tonnellate.

A partire dal 19 settembre 1989 nessuna trasmissione e' stata piu' captata dal complesso e cio' fece supporre che questo, senza piu' propellente e contatti radio con la terra, sarebbe precipitato sul nostro pianeta.

Le osservazioni radar della rete globale di sorveglianza del Comando Spaziale americano hanno confermato che la stazione spaziale sovietica Salyut 7/Cosmos 1686 e' di fatto rientrata nell'atmosfera alle 4:44 ora italiana del 7 febbraio 1991. Fonti sovietiche hanno affermato che il complesso ha completato la disintegrazione alle 4:47.

Il gruppo di dinamica del volo del CNUCE e' stato impegnato, fin dal giugno del 1990, nei calcoli delle previsioni di rientro della stazione. Tuttavia, la discussione dei risultati ottenuti a riguardo non rientra nello scopo del documento. Qui ci siamo interessati invece alla fase di volo terminale, ovvero, quella che, dal rientro del velivolo nell'atmosfera lo accompagna fino alla caduta a terra.

Dal momento che un satellite e' destinato solitamente a perdere la sua integrita' fisica durante il rientro, sia a causa delle decelerazioni subite, che dei carichi aerodinamici e del riscaldamento, sono stati considerati, oltre alla stazione intera, anche i possibili frammenti che potessero derivare dalla rottura del complesso. Di questi frammenti non e' ovviamente possibile stabilire a priori la massa, la composizione o le dimensioni. Si puo' invece trovare un intervallo di valori ragionevoli del loro parametro balistico in base alla conoscenza delle caratteristiche dei materiali di cui un satellite e' generalmente costituito. Sono stati considerati, ad esempio, i valori delle densita' per alcuni materiali riportati in Tab.1 e sono stati calcolati i valori del parametro balistico per frammenti cubici di diverse dimensioni lineari (d) dalla relazione:

$$B = \frac{C_D A}{2 M} \cong \frac{A}{\rho V} = \frac{1}{\rho d} \quad [47]$$

dove  $\rho$  e' la densita', V il volume, A l'area ed M la massa del frammento.

**Tabella 1**

MATERIALE	DENSITA' (g/cm <sup>3</sup> o ton/m <sup>3</sup> )
circuiti elettronici	2.0
alluminio, vetro, basalto	2.7
acciaio	8.0

I risultati sono quelli illustrati in Tab.2 e danno un'idea indicativa dell'intervallo di valori assunti dal parametro balistico (in  $m^2/ton$ ) di diversi frammenti originati dalla rottura di un satellite qualsiasi.

**Tabella 2**

dimensione (m)	B (circuiti)	B (alluminio)	B (acciaio)
1.00	0.5	0.37	0.125
0.10	5.0	3.70	1.250
0.01	50.0	37.00	12.500

Immaginando in particolare la rottura della stazione Salyut 7, sono stati calcolati i seguenti parametri balistici:

1. se si considerava la stazione spaziale nel complesso, pesante circa 40 tonnellate e con una sezione efficace media di  $125 m^2$ , il parametro balistico risultante era  $B \simeq 3 m^2/ton$ . Lo stesso B corrispondeva anche ad un frammento di stazione di 2 m con vuoti, pesante 1200 Kg, o ad uno di alluminio o vetro di 10 cm, pesante 2.7 Kg, o infine ad un pezzo di acciaio di 3 cm e 0.2 Kg;
2. un parametro balistico pari a 10 volte quello della stazione spaziale ( $B \simeq 30 m^2/ton$ ) si otteneva per un frammento di 20 cm con vuoti (1.2 Kg) o per pezzi di 1 cm di vetro o alluminio (2.7 g) o infine per 0.3 cm di acciaio (0.2 g);
3. un parametro balistico pari a 20 volte quello della stazione spaziale ( $B \simeq 60 m^2/ton$ ) era posseduto da un frammento di 10 cm con vuoti (150 g) o da pezzi di 0.5 cm di vetro o alluminio (0.3 g) o infine da 1.5 mm di acciaio (2.5 mg);
4. un valore di B pari a 100 volte quello della stazione spaziale ( $B \simeq 300 m^2/ton$ ) era associato ad un frammento di 1 mm di alluminio o vetro (2.7 mg), ad uno di acciaio di 0.3 mm (0.2 mg) o ad un pezzo di 2 cm con vuoti (1.2 g);
5. un  $B \simeq 0.3 m^2/ton$  si aveva per un blocco di 1 m di alluminio (2700 Kg) o per uno di acciaio di 30 cm (216 Kg).

E' molto probabile che i parametri balistici per tutti i frammenti che hanno potuto originarsi siano contenuti nell'intervallo dei valori suddetti, ovvero, riassumendo, fra  $B \simeq 0.3 m^2/ton$  e  $B \simeq 300 m^2/ton$ .

Per diversi valori di B sono stati quindi calcolati i parametri di rientro a partire dalle seguenti condizioni iniziali:

$$\gamma_0 = -0.591^\circ,$$

$$q_0 = 69.100 \text{ Km},$$

$$V_0 = 7.732 \text{ Km/sec},$$

$$R_0 = 0.0 \text{ Km}.$$

I valori della gittata e dei tempi trascorsi dal rientro nell'atmosfera (condizione iniziale) fino alla caduta a terra sono riportati in Tab.3.

**Tabella 3**

	Parametro Balistico (sqm/ton)	RANGE (Km)	TEMPO (sec)
1	319.8000	83	3120
2	31.9800	325	1050
3	3.1980	840	450
4	0.3198	1619	340

I risultati in forma grafica, corrispondenti ai casi 1 e 4, sono illustrati rispettivamente in Fig.9 e Fig.10.

Naturalmente, la gittata aumenta con l'aumentare della quota alla quale la frammentazione ha avuto luogo.

Sempre a partire da una quota di 69 Km si sono simulate le condizioni di arrivo a terra di quegli oggetti ritenuti potenzialmente piu' pericolosi, ovvero quelli con un B compreso fra 0.3 e 3  $m^2$ /ton. In corrispondenza di questi sono state valutate la massima velocita' d'impatto al suolo, la massima gittata ed i tempi di caduta, nonche' l'energia in tonnellate equivalenti di tritolo. La situazione riassunta e' la seguente:

- se si consideravano degli oggetti con  $B \simeq 0.3 \text{ m}^2/\text{ton}$  a partire da una quota di circa 69 Km, la loro gittata risultava di circa 1619 Km mentre il tempo di caduta era di circa 340 sec. Essi arrivavano a terra con un *flight path angle* di  $-84^\circ$  ed una velocita' d'impatto di circa 172 m/sec e raggiungevano la massima decelerazione, pari a 8.7 g, a circa 27 Km di altitudine;
- se si supposeva che alla quota di 27 Km questi potessero frammentarsi in altri pezzi con diverso B, ad esempio  $B \simeq 3 \text{ m}^2/\text{ton}$ , si aveva che questi ultimi avevano una gittata di circa 1566 Km, compresa dunque nella precedente, ma erano piu' lenti degli originali, impiegando in totale un tempo di 510 sec per cadere a terra. La loro velocita' d'impatto era di 50 m/sec, inferiore dunque alla precedente, inoltre, essi cadevano in verticale (*flight path angle* pari a  $-90^\circ$ );

- se dalla quota di 69 Km si facevano cadere dei pezzi con un  $B$  uguale a quello dell'intera stazione, ovvero  $B \simeq 3 \text{ m}^2/\text{ton}$ , si otteneva una gittata di circa 840 Km con un tempo di caduta di circa 450 sec. La massima decelerazione, pari a 7 g, era raggiunta a circa 40 Km di altitudine. Se a quella quota si fossero successivamente originati dei frammenti con  $B \simeq 0.3 \text{ m}^2/\text{ton}$  questi avrebbero avuto un range di circa 903 Km ed un tempo totale di caduta di 260 sec.

In base ai risultati trovati e' stato possibile stimare le seguenti quantita':

la **massima velocita' d'impatto al suolo** si otteneva per frammenti con  $B \simeq 0.3 \text{ m}^2/\text{ton}$ , ed era circa 172 m/sec, ovvero 619 Km/hr;

la **massima gittata** si aveva per frammenti con  $B \simeq 0.3 \text{ m}^2/\text{ton}$  ed era di circa 1619 Km se l'altitudine iniziale era di 69 Km;

i **tempi di caduta** variavano fra circa 6 minuti per frammenti con  $B \simeq 0.3 \text{ m}^2/\text{ton}$  e 52 minuti per pezzi con  $B \simeq 300 \text{ m}^2/\text{ton}$ .

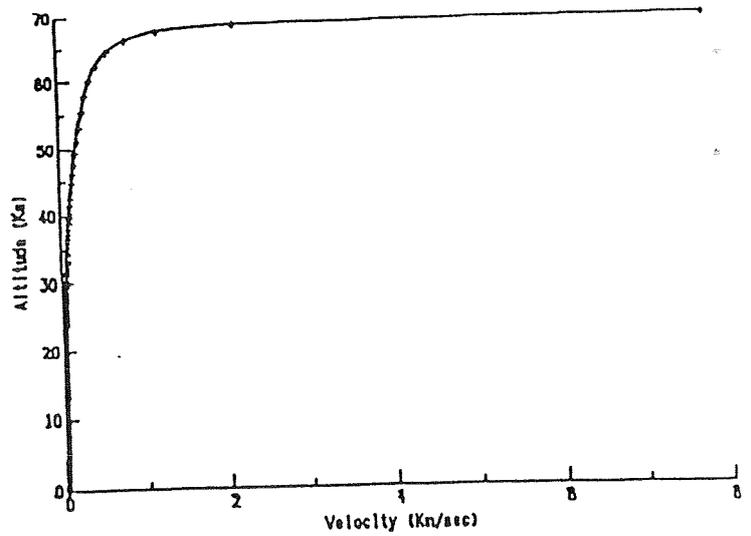
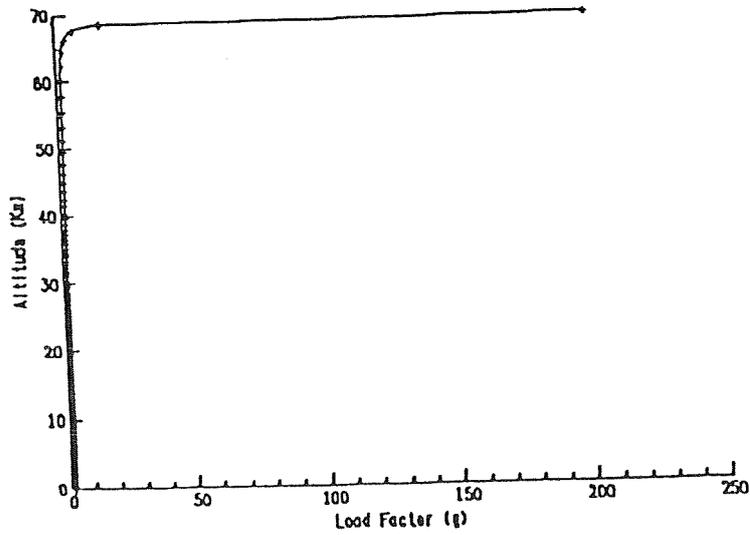
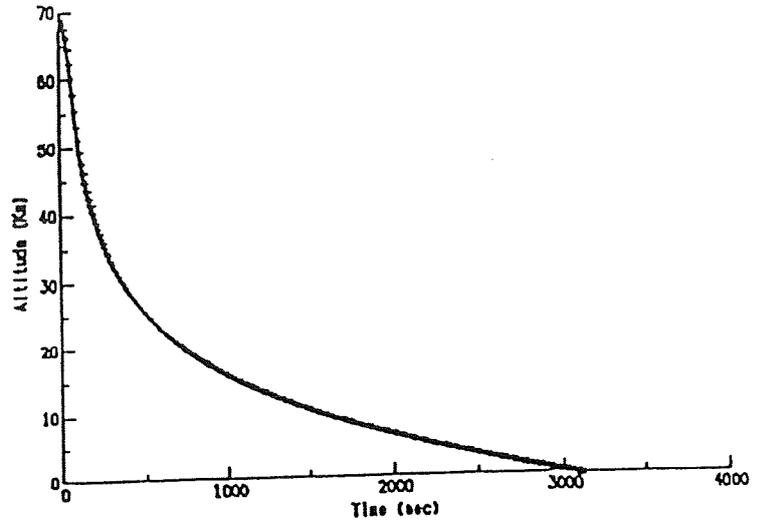
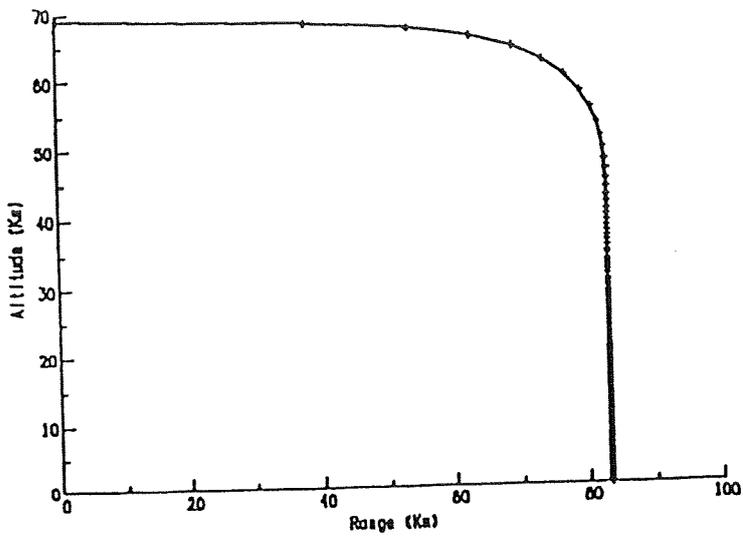
L'**energia d'impatto (E)** per quei frammenti con la massima velocita' d'urto, ovvero 30 cm di acciaio (216 Kg) o un blocco di alluminio di 1 m (2700 Kg), che avevano fra l'altro discrete probabilita' di arrivare al suolo senza dividersi ulteriormente, e' stata calcolata in tonnellate equivalenti di tritolo ( $4.20 \times 10^9 \text{ Joule} = 1 \text{ tonnellata equivalente di TNT}$ ). E' risultato che:

1. per 216 Kg di acciaio:  $E = 3.20 \times 10^6 \text{ Joule}$ ;
2. per 2700 Kg di alluminio:  $E = 39.94 \times 10^6 \text{ Joule}$ .

La prima corrispondeva a circa 8 etti di esplosivo, mentre la seconda a circa 10 Kg di esplosivo. Per avere un parametro di riferimento, si tenga presente che l'energia posseduta da una comune bomba a mano equivale a circa 50 grammi di esplosivo.

A titolo puramente informativo si trasmette quanto finora noto riguardo alla reale distribuzione dei frammenti che ha accompagnato il rientro della stazione Salyut 7. Si sa che il modulo Cosmos 1686 e' rimasto attaccato alla Salyut 7 fino al momento del rientro nell'atmosfera. Grossi pezzi della stazione e del Cosmos 1686 sono stati ritrovati nell'America del Sud. In particolare sono stati rinvenuti dei frammenti della stazione a circa 20 Km dalla capitale dell'Argentina. Un pezzo cilindrico con un diametro di 3.5 m e' caduto vicino alla citta' di Chaniar. Un anello del diametro di 1.5 m pesante 8 Kg e' stato ritrovato a 130 Km dalla citta' di Rosario, mentre un lungo tubo di 3.2 m pesante 4 Kg e' caduto nelle Ande vicino alla citta' cilena di Puerto Montt (Rif.12).

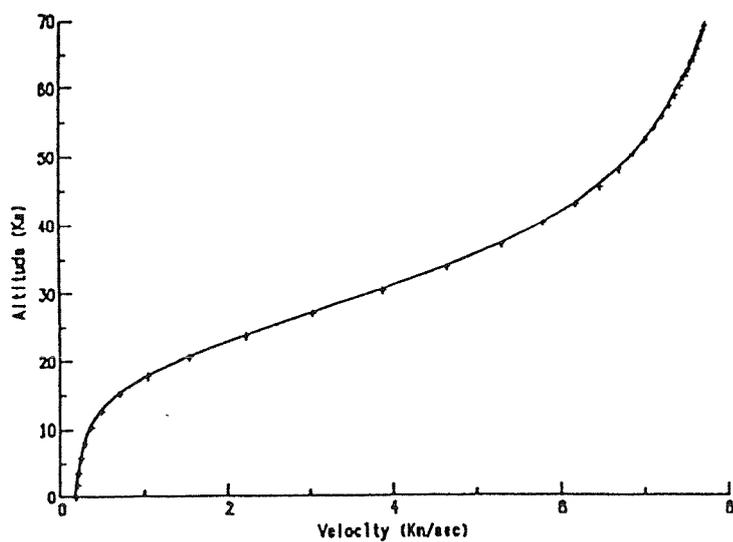
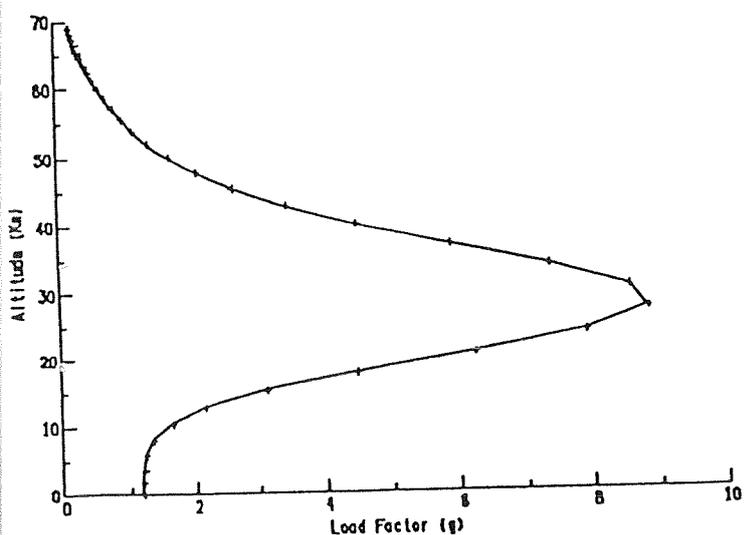
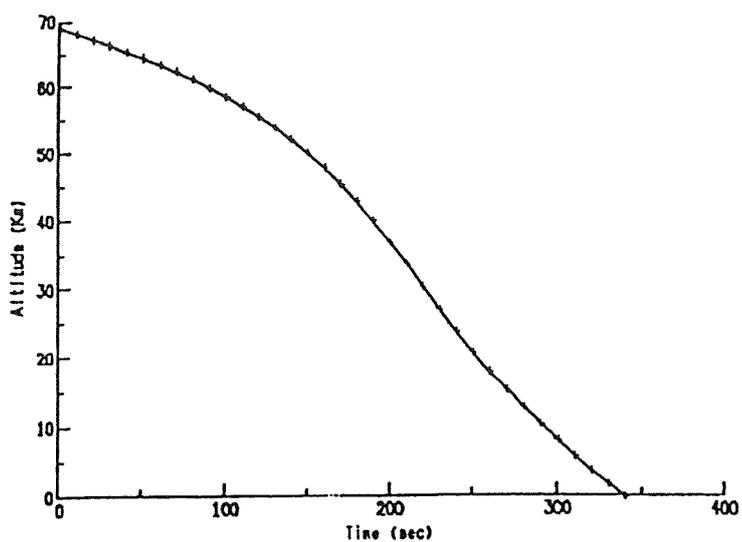
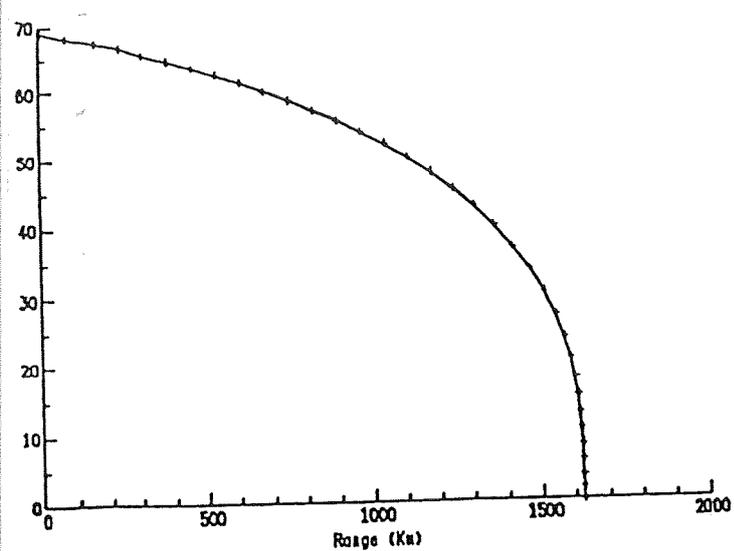
E' ovvio che i reperti a disposizione non consentono una verifica diretta del modello implementato, anche perche' non e' possibile conoscere con esattezza la reale quota alla quale certe frammentazioni possono aver avuto luogo. Cio' che invece il modello ha consentito di ottenere e' la stima dell'intervallo di distribuzione dei frammenti che, anche da quanto ritrovato, sembra essere di circa 1500 Km. La conoscenza inoltre dell'energia d'impatto, insieme ad altri parametri di rientro, e' necessaria per valutare in pratica quei danni che potrebbero derivare dall'impatto di certi frammenti con edifici, veicoli o impianti.



### RIENTRO SALYUT-7

B = 319.800 sqm/ton  
 Q0 = 69.100 Km  
 V0 = 7.732 Km/sec  
 FPA0 = -0.591 deg

FIGURA 9



### RIENTRO SALYUT-7

$B = 0.3198 \text{ sqm/ton}$   
 $Q_0 = 69.100 \text{ Km}$   
 $V_0 = 7.732 \text{ Km/sec}$   
 $FPA_0 = -0.591 \text{ deg}$

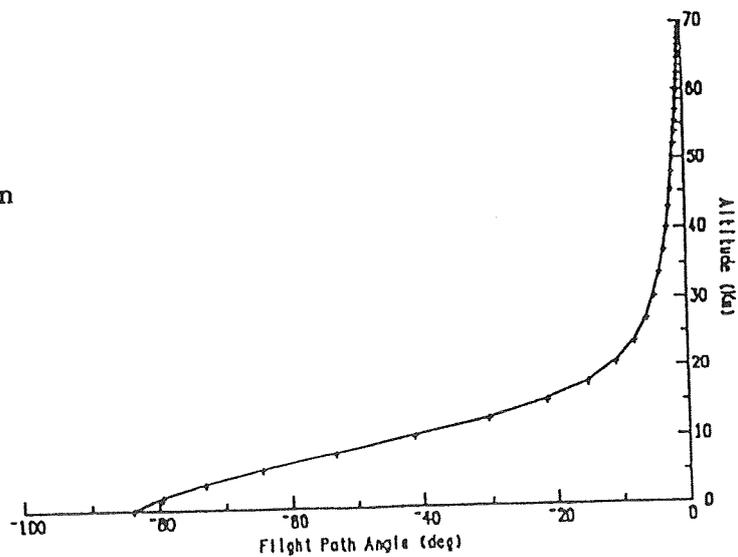


FIGURA 10

## Missile balistico intercontinentale

Un altro esempio riguarda la simulazione delle fasi di crociera e di rientro di un missile balistico intercontinentale (ICBM). Usando i seguenti parametri di input:

$$q_0 = 120.0 \text{ Km} ,$$

$$V_0 = 7.2 \text{ Km/sec} ,$$

$$R_0 = 0.0 \text{ Km} ,$$

$$\gamma_0 = 22.0^\circ ,$$

$$B = 0.51204 \times 10^{-10} \text{ Km}^2/\text{Kg} ,$$

$$L = 0.0 \text{ Km}^2/\text{Kg} ,$$

si e' calcolato che, dal momento in cui si conclude la fase di *boost* a 120 Km di altezza, le testate impiegano circa 35 minuti per schiantarsi a 10750 Km di distanza. I risultati sono stati riportati in Fig.11 e Fig.12.

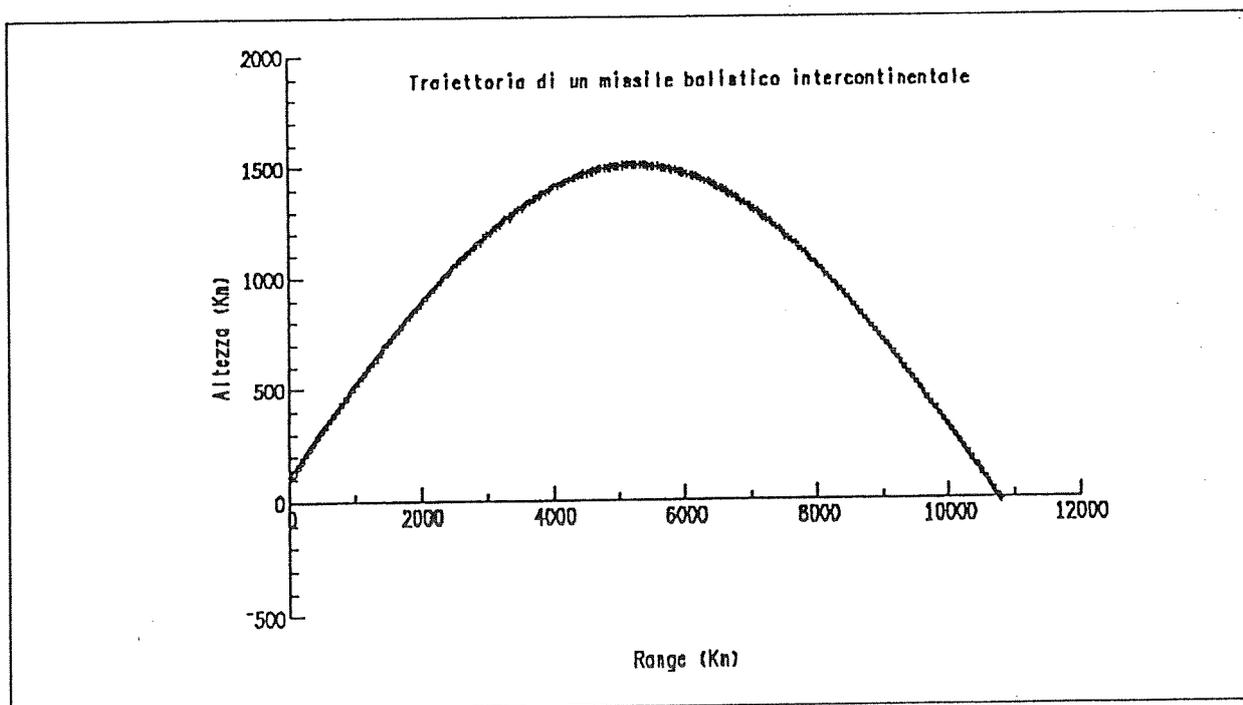


FIGURA 11

RIENTRO NELL'ATMOSFERA DI UN MISSILE BALISTICO INTERCONTINENTALE

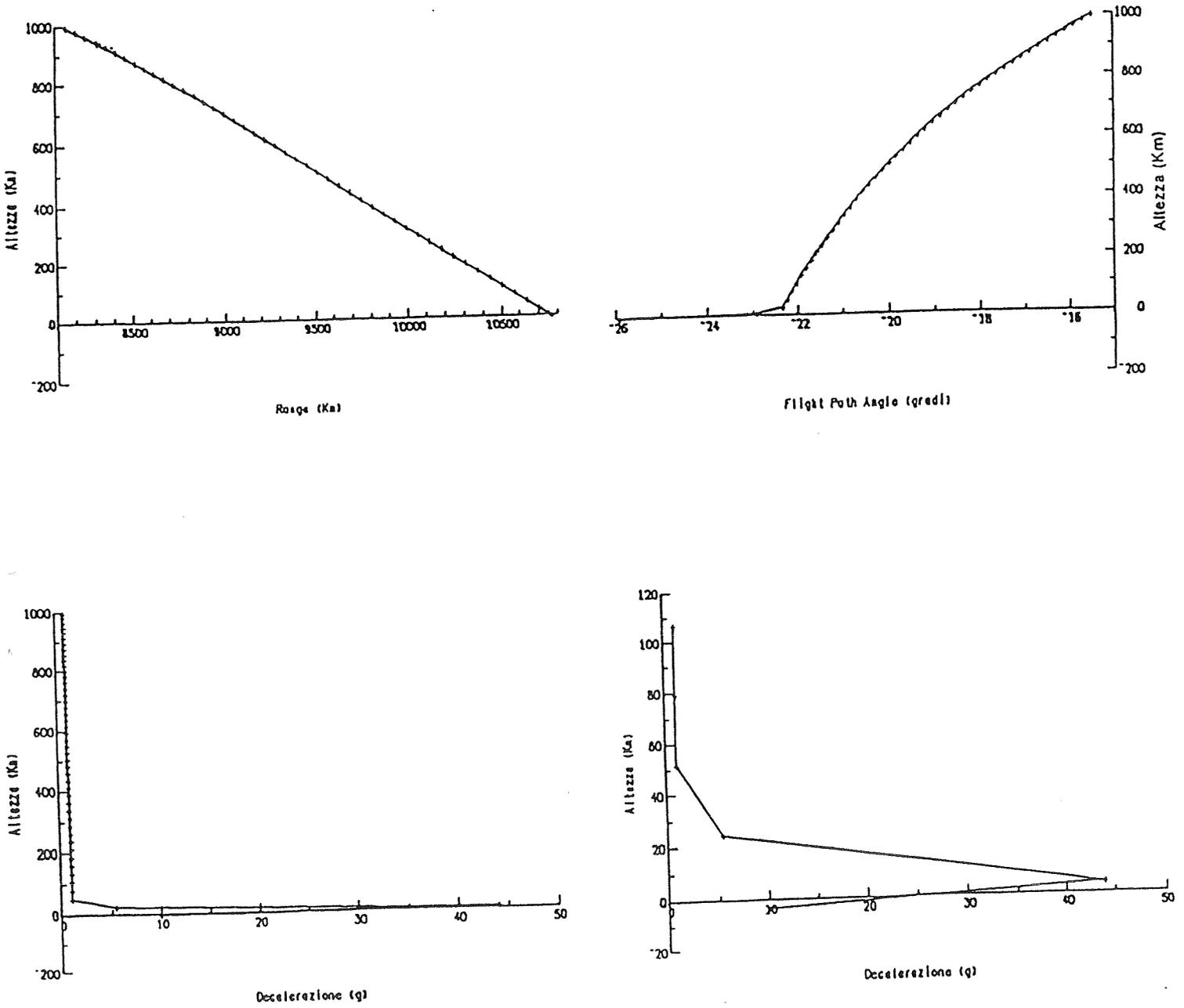


FIGURA 12

## ***Ricerca dello step-size ottimale per l'integratore di Eulero***

Il modulo TDBM ha la possibilità di utilizzare due tipi di algoritmi per integrare le equazioni del moto: uno è quello di Eulero, l'altro è un Runge-Kutta di ordine 8. Pur essendo formalmente molto semplice, il metodo di Eulero presenta però l'inconveniente di fornire dei risultati dipendenti dal passo d'integrazione scelto in input. Si capisce che tale passo deve essere sufficientemente piccolo, ma non esiste a priori un criterio di scelta, tale da assicurare una buona convergenza della soluzione trovata a quella esatta. Per questo motivo si è cercato, almeno indicativamente, di rispondere al problema posto confrontando i risultati ottenuti dall'integratore di Eulero, per diversi valori del passo di integrazione, con quelli trovati dal metodo di Runge-Kutta.

L'esempio che è stato considerato descrive la fase di rientro di un satellite e assume i seguenti parametri di input:

$$\gamma_0 = -1.093^\circ,$$

$$q_0 = 67.964 \text{ Km},$$

$$V_0 = 7.636 \text{ Km/sec},$$

$$R_0 = 0.0 \text{ Km},$$

$$B = 3.54375 \times 10^{-9} \text{ Km}^2/\text{Kg},$$

$$L = 0.0 \text{ Km}^2/\text{Kg}.$$

I valori del passo, assegnati in input all'integratore di Eulero, erano: 0.2, 0.1, 0.01 e 0.001 secondi, mentre le tolleranze assoluta e relativa per l'algoritmo di Runge-Kutta erano uguali a 1.D-6.

I risultati ottenuti nei vari casi (Eulero e Runge-Kutta) concordavano nel calcolare l'istante di caduta a terra del satellite in circa 430-440 secondi dal rientro nell'atmosfera.

Abbiamo confrontato i valori dei parametri di rientro ottenuti dopo 440 secondi, quando, come indicava il valore negativo dell'altitudine, era già avvenuto l'impatto del satellite al suolo.

I risultati sono elencati di seguito:

1. il *flight path angle* e la decelerazione erano gli stessi nei 5 casi esaminati e pari rispettivamente a  $-90^\circ$  e  $0.014 g_0$ ;
2. il fattore di carico era uguale a  $1.012 g_0$  per Runge-Kutta e  $1.013 g_0$  nei 4 casi di Eulero;

### 3. la velocita' era:

V(Km/sec)	Integratore	step-size (sec)
0.04731	Runge-Kutta	-
0.04731	Eulero	0.001, 0.01
0.04730	Eulero	0.1
0.04729	Eulero	0.2

### 4. l'altitudine era:

HGT (Km)	Integratore	step-size (sec)
-0.110	Runge-Kutta	-
-0.110	Eulero	0.001, 0.01
-0.113	Eulero	0.1
-0.116	Eulero	0.2

### 5. il range era:

RANGE (Km)	Integratore	step-size (sec)
665.214	Runge-Kutta	-
665.222	Eulero	0.001
665.304	Eulero	0.01
666.125	Eulero	0.1
667.038	Eulero	0.2

Come si puo' facilmente notare i passi di integrazione da noi scelti per l'algoritmo di Eulero permettono una buona convergenza della soluzione a quella di riferimento trovata con Runge-Kutta. Tuttavia, per non avere delle differenze superiori al Km sul range, e' consigliabile scegliere in input ad Eulero un passo non piu' grande di 0.01 sec.



## Modulo TDBM

**Scopo:** il modulo TDBM (Two-Dimension Ballistic Motion) e' stato implementato al CNUCE per simulare il moto in due dimensioni di un velivolo non propulso dotato di resistenza e portanza nell'atmosfera terrestre. La struttura del programma e' illustrata a pag.57.

Si riassumono le ipotesi fondamentali fatte, ovvero:

1. pianeta sferico non ruotante;
2. atmosfera VRA-71 sotto gli 86 Km di altezza e USSA-76 al di sopra di 86 Km;
3. parametro balistico costante;
4. portanza costante;
5. forze aerodinamiche proporzionali al quadrato della velocita'.

Le equazioni del moto sono state scritte usando il formalismo di Cowell e gli algoritmi di Eulero e di Runge-Kutta dell'ottavo ordine sono stati implementati per la loro integrazione.

La scelta di uno dei due metodi di integrazione viene fatta quando l'utente, dopo aver gia' mandato in esecuzione il programma, deve rispondere alla seguente domanda che gli appare direttamente a terminale:

```
TO SELECT THE INTEGRATOR TYPE:  
ENTER 0 IF EULERO  
ENTER 1 IF RUNGE-KUTTA
```

**Subroutine chiamate:** EULERO, RK78CN, RK78, DER, POUT

**Variabili in COMMON:**

- COMMON PARAM: GE, RE, B, P, G0, PIG
- COMMON TIME: TIME0, TF, RANGE0
- COMMON PASSO: STEP
- COMMON ERROR: RELERR, ABSERR

## Definizione delle variabili in COMMON

Variabile	Formato	I/O	Definizione
GE	R*8	I/O	parametro gravitazionale ( $\text{Km}^{**3}/\text{sec}^{**2}$ ) (default: GE = 398600.64 $\text{Km}^{**3}/\text{sec}^{**2}$ )
RE	R*8	I/O	raggio planetario (Km) (default: RE = 6378.14 Km)
B	R*8	I/O	parametro balistico ( $\text{Km}^{**2}/\text{Kg}$ ) (default: B = 0.0 $\text{Km}^{**2}/\text{Kg}$ )
P	R*8	I/O	parametro portante ( $\text{Km}^{**2}/\text{Kg}$ ) (default: P = 0.0 $\text{Km}^{**2}/\text{Kg}$ )
G0	R*8	I/O	accelerazione gravitazionale ( $\text{Km}/\text{sec}^{**2}$ ) (default: G0 = 0.00980665 $\text{Km}/\text{sec}^{**2}$ )
PIG	R*8	0	pi-greco
TIME0	R*8	I/O	tempo iniziale (sec) (default: TIME0 = 0.0 sec)
TF	R*8	I/O	tempo finale (sec) (default: TF = 0.0 sec)
RANGE0	R*8	I/O	range iniziale (Km) (default: RANGE0 = 0.0 Km)
STEP	R*8	I/O	passo di stampa (sec) (default: STEP = 1.0 sec)
RELERR	R*8	I/O	tolleranza relativa (default: RELERR = 0.000001)
ABSERR	R*8	I/O	tolleranza assoluta (default: ABSERR = 0.000001)

## Subroutine EULERO

**Scopo:** integra le equazioni del moto con il metodo classico di Eulero

**Sequenza chiamante:** CALL EULERO(TIME,X,DX,HEUL,TOUT)

**Argomenti della sequenza chiamante**

Argomento	Formato	I/O	Definizione
TIME	R*8	I	tempo corrente (sec)
X	R*8	I/O	vettore di stato (*)
DX	R*8	I	derivate delle equazioni del moto (+)
HEUL	R*8	I	passo di integrazione
TOUT	R*8	0	= TIME + HEUL

(\*) quattro coordinate cartesiane ( $X, Z, \dot{X}, \dot{Z}$ ) in Km e Km/sec

(+) quattro derivate in forma cartesiana ( $\dot{X}, \dot{Z}, \ddot{X}, \ddot{Z}$ ) in Km/sec e Km/sec<sup>2</sup>.

**Chiamata da:** programma principale

**Subroutine chiamate:** nessuna

**Variabili in COMMON:** nessuna

### Subroutine RK78CN

**Scopo:** calcola i coefficienti di Fehlberg per un integratore di Runge-Kutta dell'ottavo ordine.

**Sequenza chiamante:** CALL RK78CN

**Chiamata da:** programma principale

**Subroutine chiamate:** nessuna

**Variabili in COMMON:**

COMMON FELCON: CH(13), ALPH(13), BETA(13,12)

**Definizione delle variabili in COMMON**

Variabile	Formato	I/O	Definizione
CH	R*8	0	coefficiente di Fehlberg
ALPH	R*8	0	coefficiente di Fehlberg
BETA	R*8	0	coefficiente di Fehlberg

### Subroutine RK78

**Scopo:** integra le equazioni del moto con il metodo di Runge-Kutta dell'ottavo ordine.

**Sequenza chiamante:** CALL RK78(TIME,TOUT,X,HRK)

**Argomenti della sequenza chiamante**

Argomento	Formato	I/O	Definizione
TOUT	R*8	I	tempo di integrazione finale
TIME	R*8	I 0	tempo di integrazione iniziale a TOUT TIME=TOUT
X	R*8	I 0	vettore di stato da integrare (dimensione 4) (+) vettore di stato a TOUT
HRK	R*8	I	stima iniziale del passo di integrazione

(+) già definito nella subroutine EULERO

**Chiamata da:** programma principale

**Subroutine chiamate:** DER, POUT

**Variabili in COMMON:**

- COMMON FELCON: CH(13), ALPH(13), BETA(13,12)
- COMMON TIME: TIME0, TF, RANGE0
- COMMON PASSO: STEP
- COMMON ERROR: RELERR, ABSERR

**Definizione delle variabili in COMMON**

Le variabili in COMMON sono già state definite nel main e nella subroutine RK78CN.

### Subroutine DER

**Scopo:** calcola le derivate delle equazioni del moto

**Sequenza chiamante:** CALL DER(X,DX,AER)

**Argomenti della sequenza chiamante**

Argomento	Formato	I/O	Definizione
X	R*8	I	vettore di stato (dimensione 4) (+)
DX	R*8	0	derivate delle equazioni del moto (+)
AER	R*8	0	derivate delle equazioni del moto, ad esclusione del termine gravitazionale

(+) già definite nella subroutine EULERO.

**Chiamata da:** programma principale, subroutine RK78

**Subroutine chiamate:** DENS76

**Variabili in COMMON:**

COMMON PARAM: GE, RE, B, P, G0, PIG

**Definizione delle variabili in COMMON**

Le variabili in COMMON sono già state definite nel main.

### Subroutine POUT

**Scopo:** calcola i parametri di rientro e scrive l'output del programma

**Sequenza chiamante:** CALL POUT(T,X,DX,AER)

**Argomenti della sequenza chiamante**

Argomento	Formato	I/O	Definizione
T	R*8	I	tempo corrente (sec)
X	R*8	I	vettore di stato (dimensione 4) (+)
DX	R*8	I	derivate delle equazioni del moto (+)
AER	R*8	I	derivate delle equazioni del moto, ad esclusione del termine gravitazionale

(+) già definite nella subroutine EULERO

**Chiamata da:** programma principale, subroutine RK78

**Subroutine chiamate:** nessuna

**Function chiamate:** ARKTNS

**Variabili in COMMON:**

- COMMON PARAM: GE, RE, B, P, G0, PIG
- COMMON TIME: TIME0, TF, RANGE0

**Definizione delle variabili in COMMON**

Le variabili in COMMON sono già state definite nel main.

### Function ARKTNS

**Scopo:** calcola l'arcotangente di Y/X nei 4 quadranti

**Sequenza chiamante:** ARKTNS(N,X,Y)

**Argomenti della sequenza chiamante**

Argomento	Formato	I/O	Definizione
N	R*8	I	N = 360 se l'angolo calcolato varia nel range (0,360) gradi, N = 180 se l'angolo calcolato varia nel range (-180,180) gradi;
X	R*8	I	denominatore della funzione
Y	R*8	I	numeratore della funzione

- V0: velocità iniziale (Km/sec);
- RANGE0: range iniziale (Km);
- TIME0: tempo iniziale (sec);
- TF: tempo finale (sec); (\*)
- STEP: passo di stampa (sec);
- B: parametro balistico ( $Km^2/Kg$ );
- P: portanza ( $Km^2/Kg$ );
- HEUL: passo di integrazione per l'algoritmo di Eulero (sec);
- HRK: stima iniziale del passo di integrazione per l'algoritmo di Runge-Kutta (sec);
- RELERR: tolleranza relativa per l'integratore di Runge-Kutta;
- ABSERR: tolleranza assoluta per l'integratore di Runge-Kutta;
- RE: raggio planetario (Km);
- GE: parametro gravitazionale ( $Km^3/sec^2$ );
- G0: accelerazione gravitazionale ( $Km/sec^2$ );

(\*) Il tempo finale non è noto a priori quando si calcolano, ad esempio, la traiettoria di rientro o la fase balistica di un velivolo. Pertanto, il valore che gli va assegnato è del tutto indicativo e deve essere ragionevolmente scelto in base ad una stima della durata della fase di volo considerata. Si è voluto comunque introdurlo come parametro di input per offrire la possibilità, in certi casi, di limitare il calcolo della traiettoria entro intervalli di tempo predeterminati.

## FILE DI OUTPUT

Il programma TDBM genera il file TDBM OUTPUT contenente le seguenti variabili:

- TIME: tempo trascorso da TIME0 (sec);
- RANGE: range (Km);
- Q: altezza (Km);
- V: velocità (Km/sec);
- AC: accelerazione (in unità di G0);
- LDF: fattore di carico (in unità di G0);
- FPA: flight path angle (gradi).

## TDBM OUTPUT

The motion equations are numerically integrated  
using the 8th order Runge-Kutta algorithm

the relative tolerance is .10000D-05  
the absolute tolerance is .10000D-05

### INITIAL CONDITIONS:

Flight Path angle = -0.591 deg  
Altitude = 69.100 Km  
Velocity = 7.732 Km sec<sup>\*\*</sup>-1  
Range = 0.000 Km

The ballistic and lifting parameters are constant:

B = .31980D-09 Km<sup>\*\*</sup>2 Kg<sup>\*\*</sup>-1  
P = .00000D+00 Km<sup>\*\*</sup>2 Kg<sup>\*\*</sup>-1

Initial time = 0.000 sec  
printing step = 10.000 sec

### DEFINITION OF ABBREVIATIONS

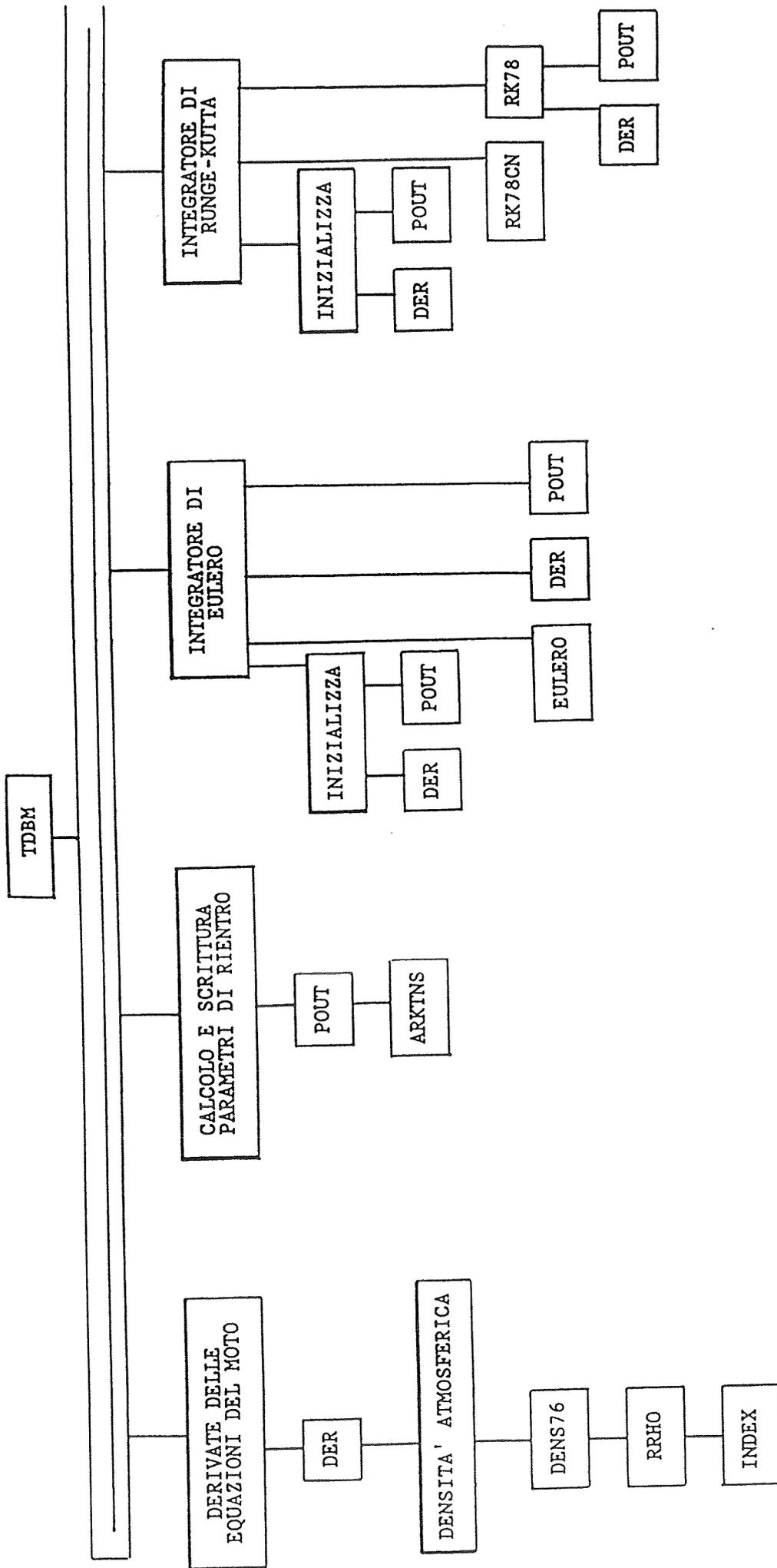
TIME = Elapsed time (sec)  
RANGE = Range (Km)  
HGT = Altitude (Km)  
V = Velocity (Km sec<sup>\*\*</sup>-1)  
ACC = Acceleration (g)  
LDF = Load factor (g)  
FPA = Flight Path Angle (deg)

TIME(SEC)	RANGE(KM)	HGT(KM)	V(KM/S)	ACC(G)	LDF(G)	FPA(DEG)
0.000	0.000	69.100	7.73237	0.996	0.200	-0.591
10.000	76.400	68.287	7.71271	0.998	0.222	-0.616
20.000	152.604	67.441	7.69081	1.003	0.247	-0.645
30.000	228.589	66.555	7.66634	1.010	0.276	-0.678
40.000	304.327	65.624	7.63884	1.018	0.310	-0.716
50.000	379.786	64.642	7.60781	1.029	0.349	-0.760
60.000	454.930	63.603	7.57282	1.042	0.393	-0.810
70.000	529.717	62.499	7.53321	1.060	0.445	-0.867
80.000	604.097	61.321	7.48802	1.083	0.509	-0.932
90.000	678.010	60.061	7.43607	1.114	0.586	-1.006

**TDBM OUTPUT (continua)**

100.000	751.382	58.707	7.37599	1.156	0.678	-1.090
110.000	824.125	57.249	7.30609	1.213	0.791	-1.188
120.000	896.132	55.674	7.22395	1.290	0.932	-1.300
130.000	967.266	53.967	7.12631	1.398	1.114	-1.430
140.000	1037.353	52.112	7.00862	1.551	1.348	-1.581
150.000	1106.164	50.094	6.86506	1.763	1.650	-1.759
160.000	1173.405	47.892	6.68668	2.068	2.072	-1.970
170.000	1238.666	45.491	6.46100	2.503	2.628	-2.224
180.000	1301.400	42.873	6.17033	3.123	3.432	-2.536
190.000	1360.825	40.030	5.78834	4.018	4.491	-2.927
200.000	1415.897	36.968	5.28707	5.205	5.874	-3.431
210.000	1465.298	33.719	4.64503	6.620	7.358	-4.101
220.000	1507.611	30.355	3.86793	7.985	8.527	-5.024
230.000	1541.743	26.986	3.01780	8.724	8.805	-6.333
240.000	1567.464	23.735	2.20348	8.362	7.889	-8.242
250.000	1585.638	20.689	1.52351	7.003	6.219	-11.084
260.000	1597.866	17.873	1.02403	5.185	4.455	-15.347
270.000	1605.867	15.253	0.68849	3.551	3.091	-21.628
280.000	1611.035	12.778	0.47888	1.975	2.134	-30.407
290.000	1614.371	10.395	0.35404	1.509	1.633	-41.444
300.000	1616.497	8.094	0.28115	0.861	1.349	-53.456
310.000	1617.826	5.882	0.23927	0.666	1.235	-64.520
320.000	1618.627	3.785	0.21162	0.453	1.198	-73.358
330.000	1619.089	1.835	0.19017	0.316	1.184	-79.742
340.000	1619.340	0.046	0.17141	0.218	1.178	-84.026
350.000	1619.469	-1.576	0.15443	0.190	1.158	-86.728

---



Struttura del programma TDBM



## Bibliografia

1. J.D. Kraft, Satellite Re-Entry, Martin Company (Baltimore), Aerospace Mechanics Department, March 1963.
2. O. Zarrouati, Trajectoires Spatiales, Centre National d'Etudes Spatiales, Cepadues-Editions, Toulouse, Janvier 1987.
3. J. Lafontaine, R. Mamen, "Orbit Lifetime Prediction and Safety Considerations", IAA-84-269.
4. D.G. King-Hele, Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere, Butterworths Publ. Co. London, 1969.
5. R. Schamberg, "A New Analytic Representation of Surface Interaction for Hyperthermal Free Molecule Flow with Application to Neutral-Particle Drag Estimates of Satellites", ASTIA Doc. No.AD215301, 1959.
6. A.E. Roy, Orbital Motion, Adam Hilger Ltd, Bristol 1982.
7. L. Anselmo, "Perturbazioni Orbitali Indotte dall'Atmosfera", Rapporto Interno CNUCE C85-09, Pisa, Luglio 1985.
8. J. Lafontaine, P.Hughes, "An Analytic Version of Jacchia's 1977 Model Atmosphere", *Celestial Mechanics*, Vol.29, 1983, pp.3-26.
9. L.G. Jacchia, "Revised Static Models of the Thermosphere and Exosphere with Empirical Temperature Profiles", *Smith.Astro.Obs.*, Special Report 332, 1971.
10. NOAA, NASA, USAF, U.S. Standard Atmosphere 1976, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., October 1976.
11. J.H. Kwok, ed., "The Artificial Satellite Analysis Program", Jet Propulsion Laboratory, 20 April 1987.
12. "The Final Days of Salyut-7", *Spaceflight*, Vol.33, April 1991, p.113.
13. J.W. Kaufmann, ed., "Terrestrial Environment (Climatic) Criteria Guidelines for Use in Aerospace Vehicle Development, 1977 Revision", NASA Technical Memorandum 78118, NASA, November 1977.

