



Consiglio Nazionale delle Ricerche

**Un' equazione costitutiva per travi in materiale non
resistente a trazione e con limitata resistenza a
compressione**

N. Zani

Report CNUCE-B4-2001-006

CNUCE

Pisa



Un' equazione costitutiva per travi in materiale non resistente a trazione e con limitata resistenza a compressione

Nicola ZANI

Dipartimento di Costruzioni

University of Florence, Piazza Brunelleschi 6, Florence, Italy

1. Introduzione

L'analisi strutturale delle costruzioni in muratura è ancora oggi un problema arduo per la difficoltà di modellare in modo realistico il comportamento costitutivo del materiale. Risultati interessanti sono stati ottenuti recentemente utilizzando l'equazione costitutiva del cosiddetto materiale masonry-like, che nella sua formulazione originaria [1] ipotizza la muratura non resistente a trazione e con infinita resistenza a compressione e che è stata successivamente generalizzata per tenere conto anche della limitata resistenza a compressione [2]. Infatti, con l'aiuto di appropriate tecniche numeriche, questa equazione costitutiva è stata applicata con successo allo studio della statica di alcuni importanti edifici storici. D'altra parte la complessità di queste analisi statiche e le difficoltà incontrate nel tentativo di estendere l'applicazione di questa equazione costitutiva ad analisi dinamiche [3], mettono in luce l'utilità di un legame costitutivo per elementi monodimensionali in muratura, formulato in termini di caratteristiche della sollecitazione e della deformazione.

In questo lavoro viene presentata una equazione costitutiva per travi di sezione rettangolare, costituite da materiale elastico non lineare, non resistente a trazione e con limitata resistenza a compressione. Facendo l'ipotesi che le sezioni rimangano piane e ortogonali alla linea d'asse deformata e tenendo conto del solo sforzo assiale, si individua l'insieme Σ delle caratteristiche di deformazione (deformazione estensionale ϵ e cambiamento di curvatura κ della linea d'asse) ammissibili. Questo insieme risulta naturalmente suddiviso in otto regioni; per ciascuna di esse si determina la relazione costitutiva che esprime le caratteristiche della sollecitazione (forza normale N e momento flettente M) in funzione delle caratteristiche della deformazione. L'immagine di Σ è il ben noto insieme Ω delle caratteristiche della sollecitazione ammissibili. Poiché l'equazione costitutiva determinata è iniettiva, anche Ω risulta naturalmente suddiviso in otto regioni e per ciascuna di esse è ben definito il legame costitutivo inverso che esprime le caratteristiche di deformazione in funzione di quelle di sollecitazione. Successivamente, il legame viene generalizzato introducendo un limite alla deformabilità, sia in trazione che in compressione, e ciò conduce alla definizione degli insiemi ammissibili ridotti $\bar{\Sigma} \subset \Sigma$ e $\bar{\Omega} \subset \Omega$ che sono opportuni sottoinsiemi dei corrispondenti insiemi definiti precedentemente. La procedura mostrata è del tutto generale e può essere utilizzata per ricavare il legame costitutivo per altri tipi di sezione trasversale, come la sezione rettangolare cava [4], la sezione circolare, ecc..

Successivamente si studia il problema di una trave incastrata agli estremi, soggetta ad uno stato iniziale di precompressione e caricata in mezzzeria con un forza concentrata incrementata progressivamente fino al collasso. Per ogni valore del carico e della precompressione si determina esplicitamente la soluzione del problema di equilibrio e ciò consente di evidenziare alcune caratteristiche dell'equazione costitutiva presentata. Infine si specializza la soluzione per il caso di materiale con infinita resistenza a compressione.

2. Equazione costitutiva

In questo paragrafo viene descritta una equazione costitutiva per travi di sezione rettangolare costituite da materiale elastico non lineare, non resistente a trazione e con limitata resistenza a compressione.

Come noto, supponendo che i carichi agiscano in un piano di simmetria della trave ed accettando la classica ipotesi di Eulero-Bernoulli, la deformazione è completamente descritta dalla deformazione estensionale ϵ e dal cambiamento di curvatura κ dell'asse baricentrico longitudinale della trave. Inoltre, considerando solo la componente longitudinale dello sforzo, lo stato di sollecitazione è rappresentato dalla forza normale N e dal momento flettente M .

2.1. Equazione costitutiva: nessun limite alla deformazione

Allo scopo di determinare la relazione costitutiva che lega le caratteristiche di sollecitazione (N, M) alle caratteristiche di deformazione (ϵ, κ), osserviamo intanto che il legame costitutivo considerato, in regime di sollecitazione mono-assiale, è descritto dalla trilatera mostrata nella fig. 1, dove sono stati indicati con σ_0 (< 0) il minimo sforzo di compressione ammissibile e con ϵ_0 la corrispondente deformazione.

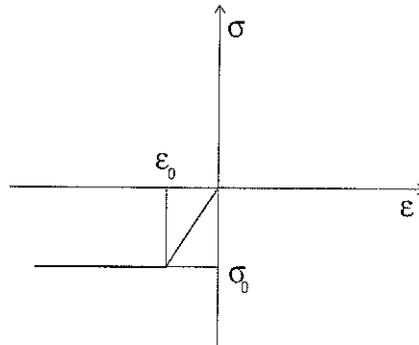


Fig 1. Diagramma σ - ϵ

Allora, una generica fibra longitudinale di cui è costituita la trave, subirà lo sforzo assiale

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 & \text{se } \epsilon < \epsilon_0 \\ E\epsilon & \text{se } \epsilon_0 \leq \epsilon \leq 0 \\ 0 & \text{se } \epsilon > 0, \end{cases}$$

dove E è il modulo di Young del materiale in compressione.

Consideriamo una generica sezione trasversale della trave di lati b e h ($b < h$); in vista delle ipotesi fatte sul comportamento deformativo e sul legame costitutivo monoassiale, l'andamento σ nella generica sezione è uno tra quelli descritti nella figura 2.

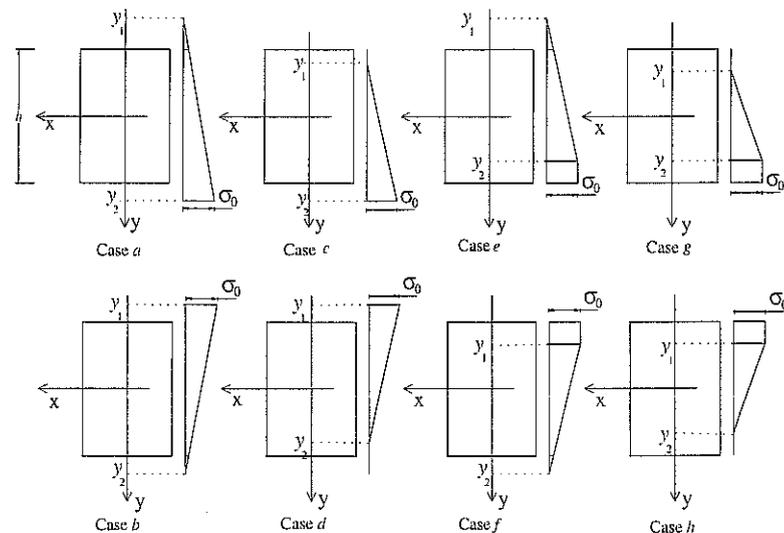


Fig. 2. Andamento della σ nella sezione.

Ciascuno di questi casi differisce dagli altri esclusivamente per la posizione nella sezione dell'asse neutro (laddove lo sforzo si annulla) e dell'asse di transizione (laddove lo sforzo passa da lineare a costante). La posizione di questi assi può essere facilmente espressa in funzione di ϵ e κ e ciò consente di individuare nel piano ϵ, κ le otto regioni mostrate in fig. 3, ciascuna delle quali costituita da tutte e sole le caratteristiche della deformazione a cui corrisponde un andamento dello sforzo di uno dei tipi mostrati in fig. 2. L'unione Σ di queste otto regioni è costituita da tutte e sole le caratteristiche di deformazione (ϵ, κ) ammissibili.

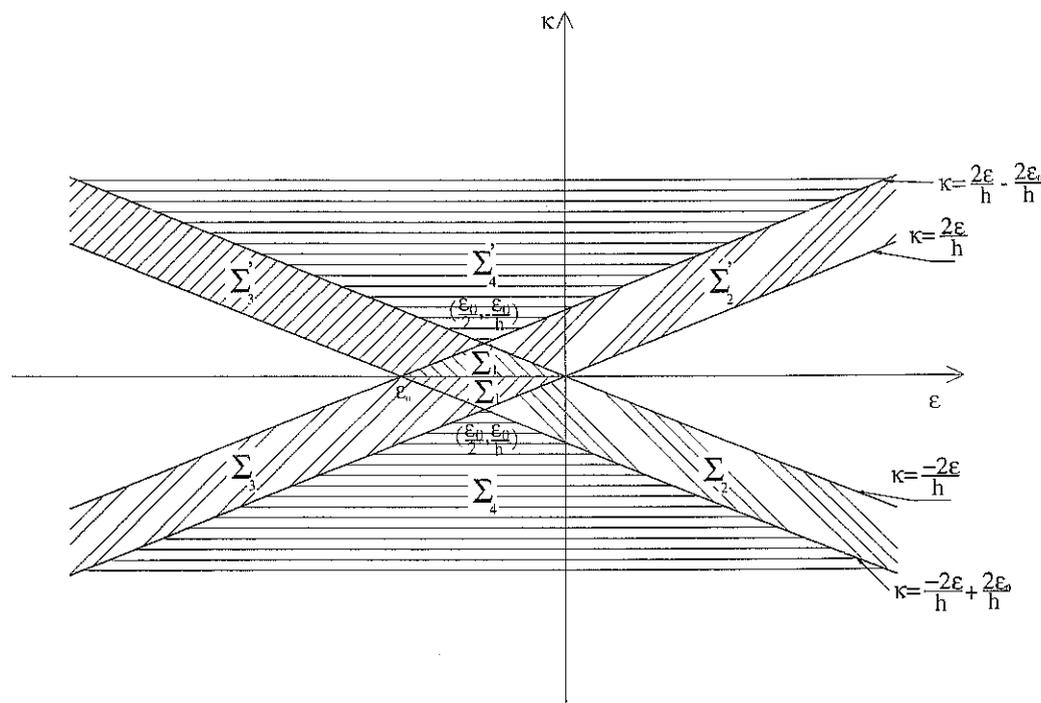


Fig. 3. Partizione del piano (ϵ, κ) .

Si consideri l'andamento dello sforzo assiale descritto in figura 2/a. Esso è caratterizzato dalle condizioni

$$y_1 \leq -\frac{1}{2}h, \quad y_2 \geq \frac{1}{2}h, \quad (1)$$

dove y_1 è l'ordinata dell'asse neutro e quindi, in vista del legame costitutivo $\sigma - \epsilon$, è l'ordinata dei punti dove si annulla la deformazione estensionale mentre y_2 è l'ordinata dei punti dove σ assume il valore minimo σ_0 e quindi dei punti dove la deformazione estensionale vale ϵ_0 .

In virtù dell'ipotesi di Eulero-Bernoulli, si ottiene

$$\begin{aligned} \epsilon(y_1) &= \epsilon + \kappa y_1 = 0, \\ \epsilon(y_2) &= \epsilon + \kappa y_2 = \epsilon_0, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{\epsilon}{\kappa}, \\ y_2 &= \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}. \end{aligned}$$

Da queste relazioni, in vista di (1), si ottiene il sistema di disequazioni

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \kappa \leq 0 \\ \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_0}{h} \end{cases} \quad (2)$$

che definisce la regione Σ_1 del piano (ϵ, κ) mostrata in fig. 3, costituita dalle caratteristiche della deformazione (ϵ, κ) a cui corrisponde lo sforzo assiale di figura 2/a.

Nel caso mostrato in fig. 2/b lo sforzo assiale è caratterizzato dalle condizioni

$$y_1 \leq -\frac{1}{2}h, \quad y_2 \geq -\frac{1}{2}h,$$

con

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}, \\ y_2 &= -\frac{\epsilon}{\kappa}, \end{aligned}$$

da cui si ottengono le disequazioni

$$\Sigma'_1 = \begin{cases} \kappa \geq 0 \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_0}{h} \end{cases} \quad (3)$$

che definiscono, nel piano (ϵ, κ) , la regione Σ'_1 .

In modo del tutto analogo si caratterizzano le rimanenti regioni del piano (ϵ, κ) mostrate in fig. 3.

Nel caso di fig. 2/c

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}h \leq y_1 \leq \frac{1}{2}h \\ y_2 \geq -\frac{1}{2}h \end{cases} \Rightarrow \Sigma_2 = \begin{cases} \kappa \leq 0 \\ \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_0}{h} \end{cases} ; \quad (4)$$

fig. 2/d

$$\begin{cases} y_1 \leq -\frac{1}{2}h \\ -\frac{1}{2}h \leq y_2 \leq \frac{1}{2}h \end{cases} \Rightarrow \Sigma'_2 = \begin{cases} \kappa \geq 0 \\ \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_0}{h} \end{cases} ; \quad (5)$$

fig. 2/e

$$\begin{cases} y_1 \leq -\frac{1}{2}h \\ -\frac{1}{2}h \leq y_2 \leq \frac{1}{2}h \end{cases} \Rightarrow \Sigma_3 = \begin{cases} \kappa \leq 0 \\ \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_0}{h} \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_0}{h} \end{cases} ; \quad (6)$$

fig. 2/f

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}h \leq y_1 \leq \frac{1}{2}h \\ y_2 \geq \frac{1}{2}h \end{cases} \Rightarrow \Sigma'_3 = \begin{cases} \kappa \geq 0 \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_0}{h} \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_0}{h} \end{cases} ; \quad (7)$$

fig. 2/g

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}h \leq y_1 \leq y_2 \\ y_1 \leq y_2 \leq \frac{1}{2}h \end{cases} \Rightarrow \Sigma_4 = \begin{cases} \kappa \leq 0 \\ \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_0}{h} \end{cases} ; \quad (8)$$

fig. 2/h

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}h \leq y_1 \leq y_2 \\ y_1 \leq y_2 \leq \frac{1}{2}h \end{cases} \Rightarrow \Sigma'_i = \begin{cases} \kappa \geq 0 \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_0}{h} \end{cases} \quad (9)$$

Procediamo ora a dedurre, per ciascuna delle regioni Σ_i e Σ'_i , $i = 1, \dots, 4$, le relazioni costitutive che legano le caratteristiche della sollecitazione (N, M) alle caratteristiche della deformazione (ϵ, κ) e le loro inverse. Siano (ϵ, κ) appartenenti alle regioni Σ_1 o Σ'_1 , ovvero l'andamento dello sforzo assiale sia quello descritto nelle figg. 2/a-b. In questo caso si ottiene l'equazione costitutiva classica delle travi lineari elastiche,

$$N = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(y) dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(\epsilon + \kappa y) dy = Ebh\epsilon,$$

$$M = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(y) y dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(\epsilon + \kappa y) y dy = \frac{Ebh^3}{12} \kappa,$$

ovvero,

$$\epsilon = \frac{N}{Ebh}, \quad (10)$$

$$\kappa = \frac{12M}{Ebh^3}. \quad (11)$$

Per (ϵ, κ) appartenente alla regione Σ_2 l'andamento dello sforzo assiale è quello descritto nella fig. 2/c, pertanto, tenuto conto che risulta $y_1 = -\frac{\epsilon}{\kappa}$, si deduce

$$N = b \int_{-\frac{\epsilon}{\kappa}}^{\frac{h}{2}} \sigma(y) dy = \frac{Eb(h\kappa + 2\epsilon)^2}{8\kappa},$$

$$M = b \int_{-\frac{\epsilon}{\kappa}}^{\frac{h}{2}} \sigma(y) y dy = \frac{Eb(h\kappa - \epsilon)(h\kappa + 2\epsilon)^2}{24\kappa^2},$$

le cui inverse sono

$$\epsilon = \frac{8N^2(Nh - 3M)}{9Eb(Nh - 2M)^2}, \quad (12)$$

$$\kappa = \frac{8N^3}{9Eb(Nh - 2M)^2}. \quad (13)$$

Procedendo in modo analogo si ottiene, per (ϵ, κ) appartenente alla regione Σ'_2 (fig. 2/d),

$$N = b \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{\epsilon}{\kappa}} \sigma(y) dy = -\frac{Eb(h\kappa - 2\epsilon)^2}{8\kappa}$$

$$M = b \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{\epsilon}{\kappa}} \sigma(y) y dy = \frac{Eb(h\kappa + \epsilon)(h\kappa - 2\epsilon)^2}{24\kappa^2},$$

le cui inverse sono

$$\epsilon = \frac{8N^2(Nh + 3M)}{9Eb(Nh + 2M)^2}, \quad (14)$$

$$\kappa = -\frac{8N^3}{9Eb(Nh + 2M)^2}. \quad (15)$$

Per (ϵ, κ) appartenente alla regione Σ_3 (fig. 2/e), si ha

$$N = b \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{y_2} E(\epsilon + \kappa y) dy + \int_{y_2}^{\frac{h}{2}} \sigma_0 dy \right),$$

$$M = b \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{y_2} E(\epsilon + \kappa y) y dy + \int_{y_2}^{\frac{h}{2}} \sigma_0 y dy \right),$$

da cui, tenuto conto che risulta $y_2 = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}$, si deduce

$$N = \frac{bE}{8\kappa} \left(-4\epsilon^2 + 4\epsilon\kappa h + 8\epsilon\epsilon_0 - 4\epsilon_0^2 + 4\epsilon_0\kappa h - \kappa^2 h^2 \right),$$

$$M = \frac{bE}{24\kappa^2} \left(4\epsilon^3 - 12\epsilon^2\epsilon_0 + 12\epsilon\epsilon_0^2 - 3\epsilon\kappa^2 h^2 - 4\epsilon_0^3 + 3\epsilon_0\kappa^2 h^2 + \kappa^3 h^3 \right),$$

le cui inverse sono

$$\epsilon = \frac{36b\sigma_0 M^2 + 12M(2N + bh\sigma_0)(N - bh\sigma_0) + h(N - bh\sigma_0)^2(8N + bh\sigma_0)}{9bE(2M + Nh - bh^2\sigma_0)^2}, \quad (16)$$

$$\kappa = \frac{8(bh\sigma_0 - N)^3}{9bE(-bh^2\sigma_0 + Nh + 2M)^2}. \quad (17)$$

Analogamente al caso precedente, per (ϵ, κ) appartenente alla regione Σ'_3 (fig. 2/f), si ha

$$N = b \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}} \sigma_0 dy + \int_{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}}^{\frac{h}{2}} E(\epsilon + \kappa y) dy \right),$$

$$M = b \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}} \sigma_0 y dy + \int_{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}}^{\frac{h}{2}} E(\epsilon + \kappa y) y dy \right),$$

da cui si ottiene,

$$N = \frac{bE}{8\kappa} \left[4\epsilon^2 + 4(h\kappa - 2\epsilon_0)\epsilon + h^2\kappa^2 + 4\epsilon_0 h\kappa + 4\epsilon_0^2 \right],$$

$$M = -\frac{bE}{24\kappa^2} \left[4\epsilon^3 - 12\epsilon_0\epsilon^2 + 3(4\epsilon_0^2 - h^2\kappa^2)\epsilon - h^3\kappa^3 + 3\epsilon_0\kappa^2h^2 - 4\epsilon_0^3 \right],$$

le cui inverse sono

$$\epsilon = \frac{36b\sigma_0M^2 + 12M(2N + bh\sigma_0)(bh\sigma_0 - N) + h(N - bh\sigma_0)^2(8N + bh\sigma_0)}{9bE(2M - Nh + bh^2\sigma_0)^2}, \quad (18)$$

$$\kappa = \frac{8(N - bh\sigma_0)^3}{9bE(2M - Nh + bh^2\sigma_0)^2}. \quad (19)$$

Per (ϵ, κ) appartenente alla regione Σ_4 (fig. 2/g) si ha,

$$N = b \left(\int_{-\frac{\epsilon}{\kappa}}^{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}} E(\epsilon + \kappa y) dy + \int_{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}}^{\frac{h}{2}} \sigma_0 dy \right),$$

$$M = b \left(\int_{-\frac{\epsilon}{\kappa}}^{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}} E(\epsilon + \kappa y) y dy + \int_{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}}^{\frac{h}{2}} \sigma_0 y dy \right),$$

e quindi

$$N = \frac{b\sigma_0}{2\kappa} (2\epsilon + h\kappa - \epsilon_0),$$

$$M = \frac{b\sigma_0}{24\kappa^2} (-12\epsilon^2 + 12\epsilon_0\epsilon + 3h^2\kappa^2 - 4\epsilon_0^2),$$

le cui inverse sono

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0(bh\sigma_0 - 2N)}{4\sqrt{-3N^2 + 3bh\sigma_0N - 6b\sigma_0M}} + \frac{1}{2}\epsilon_0, \quad (20)$$

$$\kappa = \frac{-b\epsilon_0\sigma_0}{2\sqrt{-3N^2 + 3bh\sigma_0N - 6b\sigma_0M}}. \quad (21)$$

Infine, per (ϵ, κ) appartenente alla regione Σ'_4 (fig. 2/h), si ha,

$$N = b \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}} \sigma_0 dy + \int_{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}}^{-\frac{\epsilon}{\kappa}} E(\epsilon + \kappa y) dy \right),$$

$$M = b \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}} \sigma_0 y dy + \int_{\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa}}^{-\frac{\epsilon}{\kappa}} E(\epsilon + \kappa y) y dy \right),$$

da cui,

$$N = \frac{b\sigma_0}{2\kappa} (-2\epsilon + h\kappa + \epsilon_0),$$

$$M = \frac{b\sigma_0}{24\kappa^2} (12\epsilon^2 - 12\epsilon_0\epsilon - 3h^2\kappa^2 + 4\epsilon_0^2),$$

le cui inverse sono

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0(bh\sigma_0 - 2N)}{4\sqrt{-3N^2 + 3bh\sigma_0N + 6b\sigma_0M}} + \frac{1}{2}\epsilon_0, \quad (22)$$

$$\kappa = \frac{b\epsilon_0\sigma_0}{2\sqrt{-3N^2 + 3bh\sigma_0N + 6b\sigma_0M}}. \quad (23)$$

Ottenuto il legame costitutivo

$$\begin{cases} N = N(\epsilon, \kappa) \\ M = M(\epsilon, \kappa) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \epsilon = \epsilon(N, M) \\ \kappa = \kappa(N, M) \end{cases}$$

si verifica facilmente che l'immagine di Σ è il ben noto insieme Ω del piano N, M delimitato dalle parabole γ e γ' di equazione, rispettivamente, $M = -\frac{N^2}{2b\sigma_0} + \frac{1}{2}Nh$ e $M = \frac{N^2}{2b\sigma_0} - \frac{1}{2}Nh$, costituito da tutte le coppie (N, M) che sono ammissibili [2, 5]. La partizione definita nel piano (ϵ, κ) ne induce naturalmente una nell'insieme Ω che ora procediamo a determinare (fig. 4).

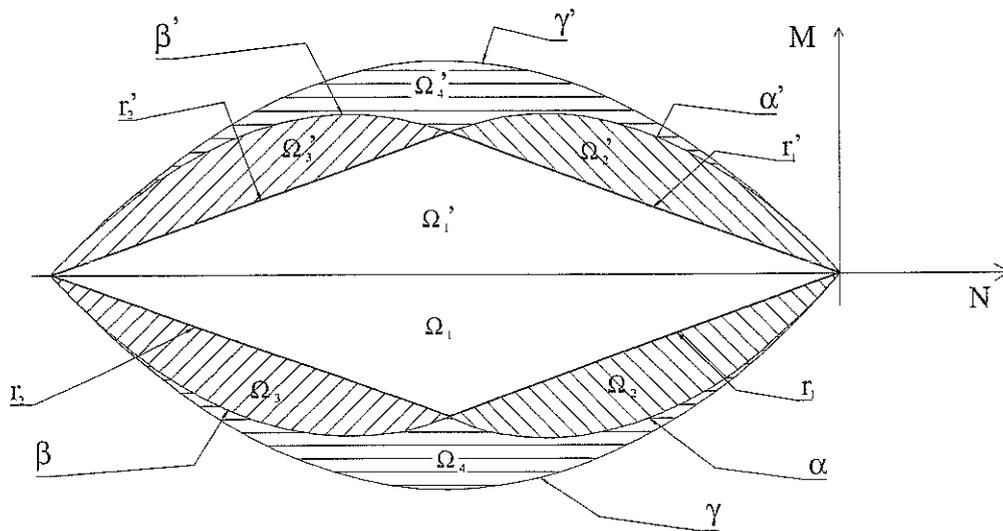


Fig. 4. Partizione del piano (N, M)

Consideriamo la regione Σ_1 definita dalle disequazioni (2); in vista di (10) e (11) si ha

$$\Omega_1 = \begin{cases} M \geq \frac{Nh}{6} \\ M \geq -\frac{Nh}{6} + \frac{\sigma_0 bh^2}{6} \\ M \leq 0 \end{cases} \quad (24)$$

che identificano, nel piano (N, M) la regione Ω_1 .

Analogamente, alla regione Σ'_1 , definita dalle disequazioni (3), in vista delle relazioni (10) e (11) corrisponde, nel piano (N, M) , la regione Ω'_1 individuata dalle disequazioni

$$\Omega'_1 = \begin{cases} M \leq -\frac{Nh}{6} \\ M \leq \frac{Nh}{6} - \frac{\sigma_0 b h^2}{6} \\ M \geq 0 \end{cases} \quad (25)$$

Quindi la regione $\Omega_1 \cup \Omega'_1$, delimitata dalle rette r_1, r_2, r'_1 e r'_2 di equazione

$$r_1) \quad M = \frac{Nh}{6}, \quad r_2) \quad M = -\frac{Nh}{6} + \sigma_0 b h^2,$$

$$r'_1) \quad M = -\frac{Nh}{6}, \quad r'_2) \quad M = \frac{Nh}{6} - \sigma_0 b h^2$$

è l'insieme delle caratteristiche della sollecitazione a cui corrisponde un comportamento elastico lineare. Per la regione Σ_2 , definita dalle disequazioni in (4), in vista di (12) e (13) si ha

$$\begin{cases} M \leq 0 \\ \frac{1}{2}h \leq \frac{3M}{N} \leq \frac{3}{2}h \\ 12b\sigma_0 M^2 + (8N^2 - 12b\sigma_0 N h)M + 3b\sigma_0 N^2 h^2 - 4N^3 h \geq 0, \end{cases}$$

ovvero, dopo semplici calcoli,

$$\Omega_2 = \begin{cases} M \leq 0 \\ \frac{Nh}{2} \leq M \leq \frac{Nh}{6} \\ (M + \frac{2N^2}{3b\sigma_0} - \frac{Nh}{2})(M - \frac{Nh}{2}) \geq 0 \end{cases} \quad (26)$$

che identifica, nel piano (N, M) , la regione Ω_2 compresa tra la retta r_1 e la parabola α di equazione

$$\alpha) \quad M = -\frac{2N^2}{3b\sigma_0} + \frac{Nh}{2}. \quad (27)$$

Analogamente, alla regione Σ'_2 definita dalle disequazioni (5), che in vista di (14) e (15) diventano

$$\Omega'_2 = \begin{cases} M \geq 0 \\ -\frac{Nh}{2} \geq M \geq -\frac{Nh}{6} \\ (M - \frac{2N^2}{3b\sigma_0} + \frac{Nh}{2})(M + \frac{Nh}{2}) \geq 0 \end{cases} \quad (28)$$

corrisponde nel piano (N, M) la regione Ω'_2 compresa tra la retta r'_1 e la parabola α' di equazione

$$\alpha') \quad M = \frac{2N^2}{3b\sigma_0} - \frac{Nh}{2}.$$

La regione Σ_3 è delimitata dalle rette espresse in (6); la condizione $\kappa \geq \frac{2\epsilon}{h}$, in vista di (16) e (17), assume la forma

$$12b\sigma_0 \left(M + \frac{2}{3} \frac{N^2}{b\sigma_0} - \frac{5}{6} Nh + \frac{1}{6} bh^2 \sigma_0 \right) \left(M + \frac{1}{2} Nh - \frac{1}{2} bh^2 \sigma_0 \right) \geq 0,$$

quindi a Σ_3 corrisponde la regione Ω_3 definita dalle disequazioni

$$\Omega_3 = \begin{cases} M \leq 0 \\ M \geq -\frac{1}{2} Nh + \frac{1}{2} bh^2 \sigma_0 \\ M \leq -\frac{1}{6} Nh + \frac{1}{6} bh^2 \sigma_0 \\ M \leq -\frac{2}{3} \frac{N^2}{b\sigma_0} + \frac{5}{6} Nh - \frac{1}{6} bh^2 \sigma_0 \end{cases} \quad (29)$$

delimitata dalla retta r_2 e dalla parabola β di equazione

$$\beta) \quad M = -\frac{2}{3} \frac{N^2}{b\sigma_0} + \frac{5}{6} Nh - \frac{1}{6} bh^2 \sigma_0. \quad (30)$$

La regione Σ'_3 è delimitata dalle rette espresse in (7); queste condizioni, in vista di (18) e (19), tenuto conto che si ha

$$\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa} = -h + \frac{2M}{N - bh\sigma_0},$$

forniscono le relazioni

$$M \leq \frac{1}{2} Nh - \frac{1}{2} bh^2 \sigma_0,$$

$$M \geq \frac{1}{6} Nh - \frac{1}{6} bh^2 \sigma_0.$$

Inoltre, la condizione $-\frac{\epsilon}{\kappa} - \frac{1}{2} h \geq 0$ diventa

$$\frac{2\epsilon_0}{2M - Nh + bh^2 \sigma_0} \left(M - \frac{2N^2}{3b\sigma_0} + \frac{5Nh}{6} - \frac{bh^2 \sigma_0}{6} \right) \geq 0,$$

pertanto Ω'_3 , definito dalle disequazioni

$$\Omega'_3 = \begin{cases} M \geq 0 \\ M \leq -\frac{1}{2}Nh + \frac{1}{2}bh^2\sigma \\ M \geq -\frac{1}{6}Nh + \frac{1}{6}bh^2\sigma_0 \\ M \leq \frac{2N^2}{3b\sigma_0} - \frac{5Nh}{6} + \frac{bh^2\sigma_0}{6} \end{cases} \quad (31)$$

risulta delimitato dalla retta r_4 e dalla parabola β' di equazione

$$\beta') \quad M = \frac{2N^2}{3b\sigma_0} - \frac{5}{6}Nh + \frac{1}{6}bh^2\sigma_0.$$

La regione Σ_4 è delimitata dalle rette espresse in (8); in vista delle relazioni (20) e (21), si ha

$$-\frac{\epsilon}{\kappa} = \frac{2\sqrt{-3N^2 + 3Nbh\sigma_0 - 6Mb\sigma_0} - 2N + bh\sigma_0}{2b\sigma_0},$$

$$\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa} = \frac{-2\sqrt{-3N^2 + 3Nbh\sigma_0 - 6Mb\sigma_0} + 2N - bh\sigma_0}{2b\sigma_0},$$

pertanto le disequazioni di Σ_4 inducono, in Ω , l'insieme

$$\Omega_4 = \begin{cases} M \geq \frac{1}{2}N \left(-\frac{N}{b\sigma_0} + h \right) \\ M \leq -\frac{2N^2}{3b\sigma_0} + \frac{1}{2}Nh \\ M \leq -\frac{2N^2}{3b\sigma_0} + \frac{5}{6}Nh - \frac{bh^2\sigma_0}{6}. \end{cases} \quad (32)$$

Detta, allora, γ la parabola

$$\gamma) \quad M = -\frac{N^2}{2b\sigma_0} + \frac{1}{2}Nh \quad (33)$$

la regione Ω_4 , corrispondente a Σ_4 , è delimitata dalle parabole α , β e γ .

Consideriamo infine la regione Σ'_4 delimitata dalle rette espresse in (9); in vista delle relazioni (22) e (23), si ha

$$-\frac{\epsilon}{\kappa} = \frac{-2\sqrt{-3N^2 + 3Nbh\sigma_0 - 6Mb\sigma_0} + 2N - bh\sigma_0}{2b\sigma_0}$$

$$\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\kappa} = \frac{2\sqrt{-3N^2 + 3Nbh\sigma_0 - 6Mb\sigma_0} + 2N - bh\sigma_0}{2b\sigma_0}$$

che implicano

$$\Omega'_4 = \begin{cases} M \leq \frac{1}{2}N \left(\frac{N}{b\sigma_0} - h \right) \\ M \geq \frac{2N^2}{3b\sigma_0} - \frac{1}{2}Nh \\ M \geq \frac{2N^2}{3b\sigma_0} - \frac{5}{6}Nh + \frac{bh^2\sigma_0}{6} \end{cases} \quad (34)$$

Detta, allora, γ' la parabola di equazione

$$\gamma') \quad M = \frac{N^2}{2b\sigma_0} - \frac{1}{2}Nh$$

la regione Ω'_4 , è delimitata dalle parabole α' , β' e γ' .

2.1 Equazione costitutiva: deformabilità limitata

Nella trattazione fin qui svolta, abbiamo supposto che il materiale fosse capace di subire deformazioni di qualunque entità. Ci proponiamo ora di studiare come si modifica l'equazione costitutiva quando, in regime di sollecitazione monoassiale, si ponga un limite alla deformazione sia in trazione ($\epsilon \leq \epsilon_t$) che in compressione ($\epsilon \geq \epsilon_c$) (fig. 5).

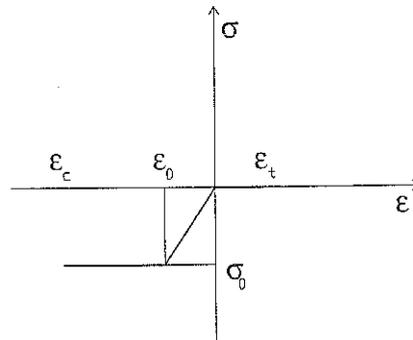


Fig. 5. Equazione costitutiva nel caso di deformabilità limitata.

In questo caso, l'insieme $\bar{\Sigma}$ delle deformazioni ammissibili è un sottoinsieme limitato Σ , riunione di otto regioni $\bar{\Sigma}_i$ e $\bar{\Sigma}'_i$ $i = 1, \dots, 4$, che procediamo a determinare (fig. 6).

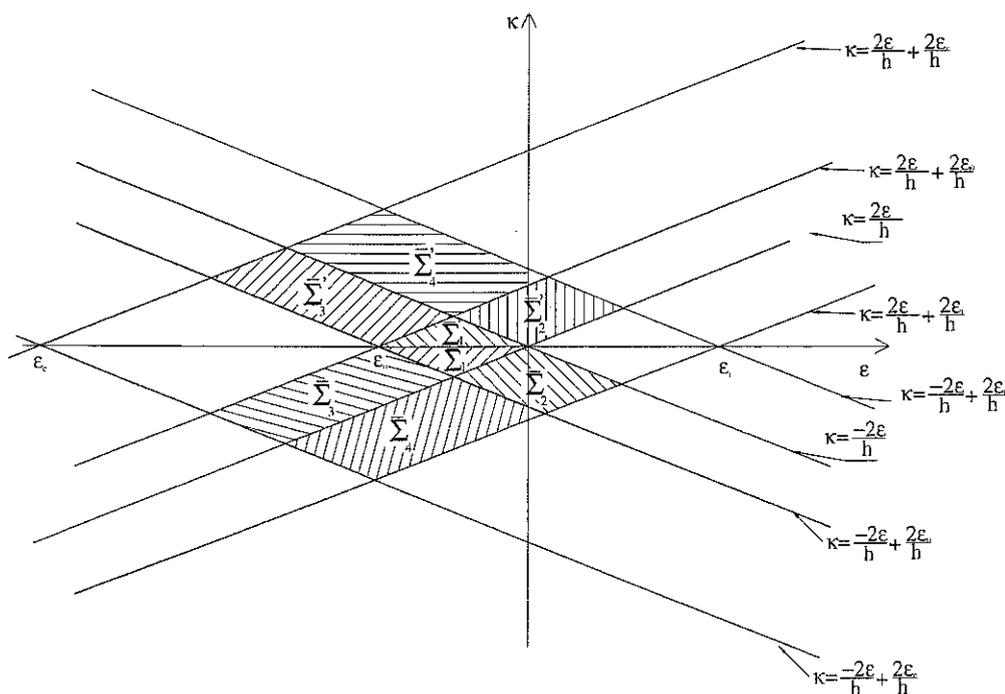


Fig. 6. Partizione del piano (ϵ, κ) nel caso di limitata deformabilità.

Le regioni Σ_1 e Σ'_1 non vengono modificate dal limite imposto alla deformabilità in quanto in quelle regioni la deformazione di qualsiasi fibra della sezione è compresa tra ϵ_0 e 0, per cui possiamo scrivere

$$\bar{\Sigma}_1 = \begin{cases} \kappa \leq 0 \\ \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_0}{h} \end{cases} \quad \text{e} \quad \bar{\Sigma}'_1 = \begin{cases} \kappa \geq 0 \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_0}{h} \end{cases}$$

La regione $\bar{\Sigma}_2$ ($\bar{\Sigma}'_2$) è definita, oltre che dalle disequazioni (4), dalla condizione che si ottiene imponendo che la massima deformazione estensionale, che per questo andamento di sforzo assiale si ha per $y = -\frac{1}{2}h$ ($y = \frac{1}{2}h$), sia più piccola di ϵ_1 ; si ha allora

$$\bar{\Sigma}_2 = \begin{cases} \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_0}{h} \\ \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_1}{h} \end{cases} \quad \text{e} \quad \bar{\Sigma}'_2 = \begin{cases} \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_0}{h} \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_1}{h} \end{cases}$$

Le regioni $\bar{\Sigma}_3$ e $\bar{\Sigma}'_3$ si ottengono da Σ_3 e Σ'_3 imponendo che la minima deformazione estensionale sia maggiore di ϵ_1 e perciò avremo

$$\bar{\Sigma}_3 = \begin{cases} \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_0}{h} \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_0}{h} \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_c}{h} \end{cases} \quad \text{e } \bar{\Sigma}'_3 = \begin{cases} \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_0}{h} \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_0}{h} \\ \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_c}{h} \end{cases}$$

Infine, le regioni $\bar{\Sigma}_4$ e $\bar{\Sigma}'_4$ si ottengono imponendo che la massima deformazione estensionale non superi ϵ , e che la minima sia non più piccola di ϵ_c da cui segue

$$\bar{\Sigma}_4 = \begin{cases} \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_0}{h} \\ \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_t}{h} \\ \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_c}{h} \end{cases} \quad \text{e } \bar{\Sigma}'_4 = \begin{cases} \kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} \\ \kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_0}{h} \\ \kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_t}{h} \\ \kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_c}{h} \end{cases}$$

L'immagine della partizione di $\bar{\Sigma}$ costituisce una nuova partizione $\bar{\Omega}_i$ e $\bar{\Omega}'_i$ di Ω che si ottiene, come nel caso precedente, traducendo le disequazioni che descrivono ognuna delle $\bar{\Sigma}_i$ e $\bar{\Sigma}'_i$ $i = 1, \dots, 4$, in termini di N e M con l'aiuto delle relazioni (10) - (23).

Poiche' $\bar{\Sigma}_i$ e $\bar{\Sigma}'_i$ coincidono con Σ_i e Σ'_i anche $\bar{\Omega}_i$ e $\bar{\Omega}'_i$ coincidono con Ω_i e Ω'_i ossia

$$\bar{\Omega}_1 = \begin{cases} M \geq \frac{Nh}{6} \\ M \geq -\frac{Nh}{6} + \frac{\sigma_0 bh^2}{6} \\ M \leq 0 \end{cases} \quad \text{e } \bar{\Omega}'_1 = \begin{cases} M \leq -\frac{Nh}{6} \\ M \leq \frac{Nh}{6} - \frac{\sigma_0 bh^2}{6} \\ M \geq 0 \end{cases}$$

$\bar{\Omega}_2$, immagine di $\bar{\Sigma}_2$, si ottiene dalle (26) con l'ulteriore condizione $\kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_t}{h}$ ossia, in vista delle (12) e (13),

$$3Ebh\epsilon_t M^2 + 12N(2N - 3Ebh\epsilon_t)M + hN^2(9Ebh\epsilon_t - 4N) \geq 0$$

e quindi si ha

$$\bar{\Omega}_2 = \begin{cases} M \leq \frac{Nh}{6} \\ M \geq -\frac{2N^2}{3b\sigma_0} + \frac{Nh}{2} \\ M \geq \frac{N(3Ebh\epsilon_t - 2N) + 2\sqrt{-N^3(2Ebh\epsilon_t - N)}}{6Ebh\epsilon_t} \\ M \leq \frac{N(3Ebh\epsilon_t - 2N) - 2\sqrt{-N^3(2Ebh\epsilon_t - N)}}{6Ebh\epsilon_t} \end{cases}$$

dette p_1 e p_2 le curve

$$p_1) \quad M = \frac{N(3Ebh\epsilon_t - 2N) + 2\sqrt{-N^3(2Ebh\epsilon_t - N)}}{6Ebh\epsilon_t}$$

$$p_2) \quad M = \frac{N(3Ebh\epsilon_t - 2N) - 2\sqrt{-N^3(2Ebh\epsilon_t - N)}}{6Ebh\epsilon_t}$$

si dimostra facilmente che

$$\lim_{\epsilon_t \rightarrow +\infty} p_1 = \lim_{\epsilon_t \rightarrow +\infty} p_2 = s$$

dove si è indicato con s la retta $M = \frac{Nh}{2}$; allora $\bar{\Omega}_2$, allorché $\epsilon_t \rightarrow +\infty$, tende all'insieme Ω_2 .

Inoltre, poiché si ha che

$$\lim_{\epsilon_t \rightarrow 0} p_1 = r_1$$

$$\lim_{\epsilon_t \rightarrow 0} p_2 = t$$

dove si è indicato con t la retta $N = 0$, l'insieme $\bar{\Omega}_2 \rightarrow \emptyset$ allorché $\epsilon_t \rightarrow 0$. Per $0 < \epsilon_t < +\infty$, l'insieme $\bar{\Omega}_2$ risulta più piccolo di Ω_2 ed è delimitato dalla retta r_1 e dalle curve α e p_1 (fig. 7);

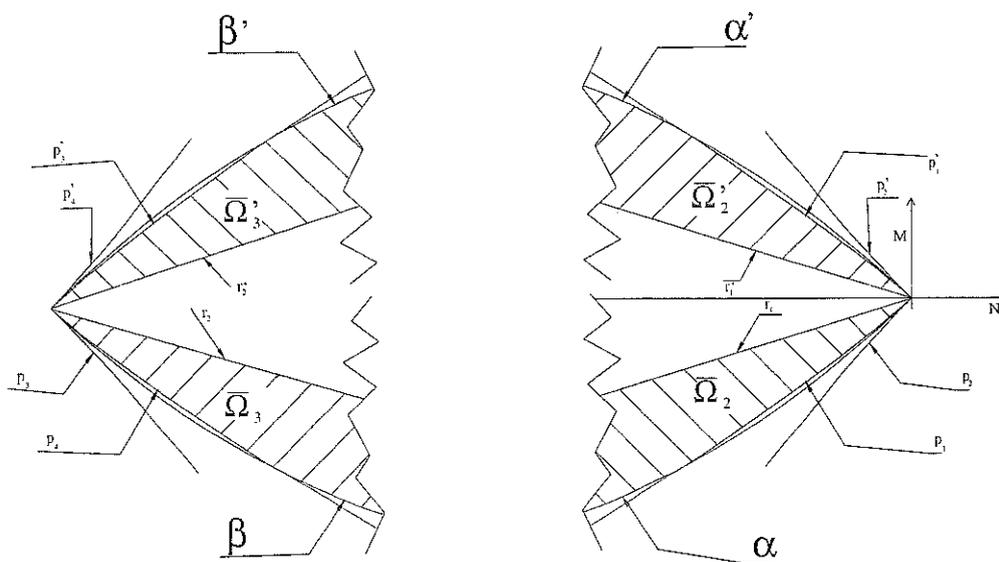


Fig. 7. Regioni $\bar{\Omega}_2, \bar{\Omega}'_2, \bar{\Omega}_3, \bar{\Omega}'_3$.

Analogamente $\bar{\Omega}'_2$ si ottiene da Ω'_2 con l'ulteriore condizione $\kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_t}{h}$ ossia, in vista della (14) e (15),

$$36Ebh\epsilon_t M^2 + 12N(3Ebh\epsilon_t - 2N)M + hN^2(9Ebh\epsilon_t - 4N) \leq 0$$

e quindi

$$\bar{\Omega}'_2 = \begin{cases} M \geq -\frac{Nh}{6} \\ M \leq \frac{2N^2}{3b\sigma_0} - \frac{Nh}{2} \\ M \geq \frac{-N(3Ebh\epsilon_t - 2N) - 2\sqrt{-N^3(2Ebh\epsilon_t - N)}}{6Ebe_t} \\ M \leq \frac{-N(3Ebh\epsilon_t - 2N) + 2\sqrt{-N^3(2Ebh\epsilon_t - N)}}{6Ebe_t} \end{cases}$$

Come nel caso precedente, per $\epsilon_t \rightarrow +\infty$ l'insieme $\bar{\Omega}'_2 \rightarrow \Omega'_2$ e per $\epsilon_t \rightarrow 0$ l'insieme $\bar{\Omega}'_2 \rightarrow \emptyset$. Per $0 < \epsilon_t < +\infty$, l'insieme $\bar{\Omega}'_2$ è limitato dalle r'_1 e dalle curve α' e p'_1 (fig. 7), avendo posto

$$p'_1) \quad M = \frac{-N(3Ebh\epsilon_t - 2N) - 2\sqrt{-N^3(2Ebh\epsilon_t - N)}}{6Ebe_t}$$

L'insieme $\bar{\Omega}_3$, immagine di $\bar{\Sigma}_3$, si ottiene da Ω_3 aggiungendo la condizione $\kappa \geq -\frac{2\epsilon_c}{h} + \frac{2\epsilon_c}{h}$ e quindi, in vista delle (16) e (17),

$$\frac{8\epsilon_0(N - bh\sigma_0)^2(6M + Nh - bh^2\sigma_0)}{9b\sigma_0(2M + Nh - bh^2\sigma_0)^2} + 2\epsilon_0 - 2\epsilon_c \geq 0$$

e pertanto

$$\bar{\Omega}_3 = \begin{cases} M \leq -\frac{1}{6}Nh + \frac{1}{6}bh^2\sigma_0 \\ M \geq -\frac{2}{3}\frac{N^2}{b\sigma_0} + \frac{5}{6}Nh - \frac{1}{6}bh^2\sigma_0 \\ M \leq \frac{(N - bh\sigma_0)[2N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 3\epsilon_c)]}{6b\sigma_0(\epsilon_c - \epsilon_0)} - \frac{\sqrt{\epsilon_0(N - bh\sigma_0)^3[N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)]}}{3b\sigma_0(\epsilon_c - \epsilon_0)} \\ M \geq \frac{(N - bh\sigma_0)[2N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 3\epsilon_c)]}{6b\sigma_0(\epsilon_c - \epsilon_0)} + \frac{\sqrt{\epsilon_0(N - bh\sigma_0)^3[N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)]}}{3b\sigma_0(\epsilon_c - \epsilon_0)} \end{cases}$$

Dette p_3 e p_4 le curve

$$p_3) \quad M = \frac{(N - bh\sigma_0)[2N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 3\epsilon_c)]}{6b\sigma_0(\epsilon_c - \epsilon_0)} - \frac{\sqrt{\epsilon_0(N - bh\sigma_0)^3[N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)]}}{3b\sigma_0(\epsilon_c - \epsilon_0)},$$

$$p_4) \quad M = \frac{(N - bh\sigma_0)[2N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 3\epsilon_c)]}{6b\sigma_0(\epsilon_c - \epsilon_0)} + \frac{\sqrt{\epsilon_0(N - bh\sigma_0)^3[N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)]}}{3b\sigma_0(\epsilon_c - \epsilon_0)},$$

si dimostra facilmente che,

$$\lim_{\epsilon_c \rightarrow -\infty} p_3 = \lim_{\epsilon_c \rightarrow -\infty} p_4 = r$$

avendo indicato con r la retta $M = -\frac{1}{2}Nh + \frac{1}{2}bh^2\sigma_0$ e pertanto $\bar{\Omega}_3 \rightarrow \Omega_3$ per $\epsilon_c \rightarrow -\infty$. Inoltre,

$$\lim_{\epsilon_c \rightarrow \epsilon_0} p_3 = \lim_{\epsilon_c \rightarrow \epsilon_0} p_4 = r_2$$

e pertanto $\bar{\Omega}_3 \rightarrow \emptyset$ per $\epsilon_c \rightarrow -\infty$. Per $-\infty < \epsilon_c < \epsilon_0$, l'insieme $\bar{\Omega}_3$ risulta più piccolo e delimitato dalla retta r_2 e dalle curve β e p_3 (fig. 7).

Analogamente al caso precedente, l'insieme $\bar{\Omega}'_3$, immagine di $\bar{\Sigma}'_3$, si ottiene da Ω'_3 aggiungendo la condizione $\kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_c}{h}$ e quindi, in vista delle (18) e (19),

$$\frac{8\epsilon_0(N - bh\sigma_0)^2(6M - Nh + bh^2\sigma_0)}{9b\sigma_0(2M - Nh + bh^2\sigma_0)^2} - 2\epsilon_0 + 2\epsilon_c \leq 0;$$

si ha allora

$$\bar{\Omega}'_3 = \begin{cases} M \geq -\frac{1}{6}Nh + \frac{1}{6}bh^2\sigma_0 \\ M \leq \frac{2N^2}{3b\sigma_0} - \frac{5Nh}{6} + \frac{bh^2\sigma_0}{6} \\ M \leq \frac{(N - bh\sigma_0)[2N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 3\epsilon_c)]}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - \epsilon_c)} - \frac{\sqrt{\epsilon_0(N - bh\sigma_0)^3[N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)]}}{3b\sigma_0(\epsilon_0 - \epsilon_c)} \\ M \geq \frac{(N - bh\sigma_0)[2N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 3\epsilon_c)]}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - \epsilon_c)} + \frac{\sqrt{\epsilon_0(N - bh\sigma_0)^3[N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)]}}{3b\sigma_0(\epsilon_0 - \epsilon_c)} \end{cases}$$

Dette p'_3 e p'_4 le curve

p'_3)

$$M = \frac{(N - bh\sigma_0)[2N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 3\epsilon_c)]}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - \epsilon_c)} - \frac{\sqrt{\epsilon_0(N - bh\sigma_0)^3[N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)]}}{3b\sigma_0(\epsilon_0 - \epsilon_c)},$$

p'_4)

$$M = \frac{(N - bh\sigma_0)[2N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 3\epsilon_c)]}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - \epsilon_c)} + \frac{\sqrt{\epsilon_0(N - bh\sigma_0)^3[N\epsilon_0 + bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)]}}{3b\sigma_0(\epsilon_0 - \epsilon_c)},$$

si ha che,

$$\lim_{\epsilon_c \rightarrow -\infty} p'_3 = \lim_{\epsilon_c \rightarrow -\infty} p'_4 = r$$

con r la retta $M = \frac{1}{2}Nh - \frac{1}{2}bh^2\sigma_0$, e pertanto $\bar{\Omega}'_3 \rightarrow \Omega'_3$ quando $\epsilon_c \rightarrow -\infty$. Inoltre,

$$\lim_{\epsilon_c \rightarrow \epsilon_0} p'_3 = \lim_{\epsilon_c \rightarrow \epsilon_0} p'_4 = r_2$$

e quindi $\bar{\Omega}'_3 \rightarrow \emptyset$ per $\epsilon_c \rightarrow \epsilon_0$. Per $-\infty < \epsilon_c < \epsilon_0$, l'insieme $\bar{\Omega}'_3$ risulta più piccolo e delimitato dalla retta r'_2 e dalle curve β' e p'_3 (fig. 7).

L'insieme $\bar{\Omega}_4$, immagine di $\bar{\Sigma}_4$, si ottiene da Ω_4 aggiungendo le condizioni $\kappa \geq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_t}{h}$ e $\kappa \geq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_c}{h}$ ossia, in vista di (20) e (21),

$$\frac{\epsilon_0(N - bh\sigma_0) - (\epsilon_0 - 2\epsilon_t)\sqrt{3(-2Mb\sigma_0 - N^2 + Nbh\sigma_0)}}{\sqrt{-2Mb\sigma_0 - N^2 + Nbh\sigma_0}} \geq 0,$$

$$\frac{(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)\sqrt{3(-2Mb\sigma_0 - N^2 + Nbh\sigma_0)} - N\epsilon_0}{\sqrt{-2Mb\sigma_0 - N^2 + Nbh\sigma_0}} \geq 0.$$

Allora, l'insieme $\bar{\Omega}_4$ sarà definito dalle disequazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} M \geq \frac{1}{2}N \left(-\frac{N}{b\sigma_0} + h \right) \\ M \leq -\frac{2N^2}{3b\sigma_0} + \frac{1}{2}Nh \\ M \leq -\frac{2N^2}{3b\sigma_0} + \frac{5}{6}Nh - \frac{bh^3\sigma_0}{6} \\ M \leq \frac{[4N(\epsilon_0^2 - 3\epsilon_0\epsilon_t + 3\epsilon_t^2) - bh\epsilon_0^2\sigma_0](bh\sigma_0 - N)}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_t)^2} \\ M \leq \frac{N[3bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)^2 - 4N(\epsilon_0^2 - 3\epsilon_0\epsilon_c + 3\epsilon_c^2)]}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)^2}. \end{array} \right.$$

Dette p_5 e p_6 le rette

$$p_5) \quad M = \frac{[4N(\epsilon_0^2 - 3\epsilon_0\epsilon_t + 3\epsilon_t^2) - bh\epsilon_0^2\sigma_0](bh\sigma_0 - N)}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_t)^2}$$

$$p_6) \quad M = \frac{N[3bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)^2 - 4N(\epsilon_0^2 - 3\epsilon_0\epsilon_c + 3\epsilon_c^2)]}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)^2}$$

si dimostra facilmente che,

$$\lim \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\epsilon_t \rightarrow +\infty} p_5 = \gamma \\ \lim_{\epsilon_c \rightarrow -\infty} p_6 = \gamma \end{array} \right. \Rightarrow \bar{\Omega}_4 \rightarrow \Omega_4$$

e

$$\lim \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\epsilon_t \rightarrow 0} p_5 = \alpha \\ \lim_{\epsilon_c \rightarrow \epsilon_0} p_6 = \beta \end{array} \right. \Rightarrow \bar{\Omega}_4 \rightarrow \emptyset.$$

Per valori finiti di ϵ_1 e ϵ_2 , le curve p_5 e p_6 limitano l'insieme Ω_4 come mostrato in figura 8.

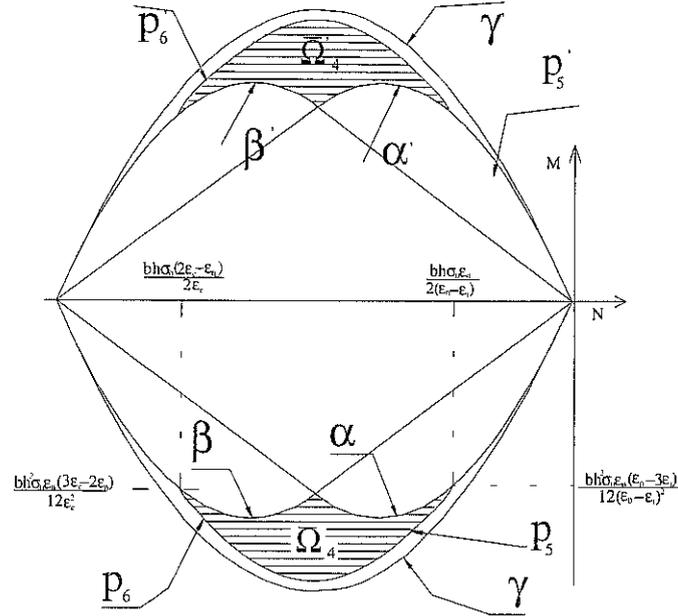


Fig. 8. Regione $\bar{\Omega}_4$ e $\bar{\Omega}'_4$.

In modo del tutto analogo, l'insieme $\bar{\Omega}'_4$, immagine di $\bar{\Sigma}'_4$, si ottiene da Ω_4 aggiungendo le condizioni $\kappa \leq -\frac{2\epsilon}{h} + \frac{2\epsilon_1}{h}$ e $\kappa \leq \frac{2\epsilon}{h} - \frac{2\epsilon_2}{h}$ ossia, in vista di (22) e (23),

$$\frac{-\epsilon_0(N - bh\sigma_0) + (\epsilon_0 - 2\epsilon_1)\sqrt{3(2Mb\sigma_0 - N^2 + Nbh\sigma_0)}}{\sqrt{2Mb\sigma_0 - N^2 + Nbh\sigma_0}} \leq 0,$$

$$\frac{-(\epsilon_0 - 2\epsilon_2)\sqrt{3(2Mb\sigma_0 - N^2 + Nbh\sigma_0)} + N\epsilon_0}{\sqrt{2Mb\sigma_0 - N^2 + Nbh\sigma_0}} \leq 0.$$

Pertanto $\bar{\Omega}'_4$ è definito dalle disequazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} M \leq \frac{1}{2}N \left(\frac{N}{b\sigma_0} - h \right) \\ M \geq -\frac{2N^2}{3b\sigma_0} + \frac{1}{2}Nh \\ M \geq -\frac{2N^2}{3b\sigma_0} + \frac{5}{6}Nh - \frac{bh^2\sigma_0}{6} \\ M \geq \frac{[4N(\epsilon_0^2 - 3\epsilon_0\epsilon_t + 3\epsilon_t^2) - bh\epsilon_0^2\sigma_0](N - bh\sigma_0)}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_t)^2} \\ M \geq \frac{N[-3bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)^2 + 4N(\epsilon_0^2 - 3\epsilon_0\epsilon_c + 3\epsilon_c^2)]}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)^2} \end{array} \right.$$

Dette

$$p'_5) \quad M = \frac{[4N(\epsilon_0^2 - 3\epsilon_0\epsilon_t + 3\epsilon_t^2) - bh\epsilon_0^2\sigma_0](N - bh\sigma_0)}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_t)^2}$$

$$p'_6) \quad M = \frac{N[-3bh\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)^2 + 4N(\epsilon_0^2 - 3\epsilon_0\epsilon_c + 3\epsilon_c^2)]}{6b\sigma_0(\epsilon_0 - 2\epsilon_c)^2}$$

si prova facilmente che,

$$\lim \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\epsilon_t \rightarrow +\infty} p'_5 = \gamma' \\ \lim_{\epsilon_c \rightarrow -\infty} p'_6 = \gamma' \end{array} \right. \Rightarrow \bar{\Omega}'_4 \rightarrow \Omega'_4$$

e

$$\lim \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\epsilon_t \rightarrow 0} p'_5 = \alpha' \\ \lim_{\epsilon_c \rightarrow \epsilon_0} p'_6 = \beta' \end{array} \right. \Rightarrow \bar{\Omega}'_4 \rightarrow \emptyset.$$

Nel caso di deformazione di trazione ammissibile maggiore di zero e di deformazione di compressione ammissibile minore di ϵ_0 , l'insieme $\bar{\Omega}'_4$ si riduce di dimensione e risulterà compreso tra le parabole α' , β' , p'_5 e p'_6 (fig. 8).

3. Un esempio

In questa sezione si risolve esplicitamente il problema di una trave in muratura incastrata agli estremi, soggetta ad una precompressione e ad un carico concentrato in mezzeria incrementato fino a raggiungere il collasso (fig. 9). Per trovare la soluzione si procede in questo modo: assegnata la precompressione N_0 ($\frac{1}{2}h\sigma_0 \leq N_0 < 0$), per valori del carico concentrato F minori o uguali a $-\frac{4hN_0}{3l}$, ogni sezione della trave è interamente compressa e quindi la soluzione è quella che si trova nell'ambito della elasticità lineare. Per valori di F più grandi, fino ad un certo valore F_1 , appaiono alcuni tratti nella trave dove le sezioni sono parzializzate senza schiacciamento (fig. 2/c e fig. 2/d); aumentando ancora il carico fino al valore F_2 , si verifica un'ulteriore suddivisione ed in alcuni tratti le sezioni sono parzializzate con schiacciamento (fig. 2/g e fig. 2/h). Infine, aumentando ancora F fino al collasso della trave (F_c), si formano, all'incastro e sotto il carico, delle cerniere plastiche. In ciascuno di questi intervalli di carico, la soluzione viene trovata integrando, nelle varie zone, le equazioni differenziali appropriate ed utilizzando le opportune condizioni al contorno e di raccordo.

Invece, per $h\sigma_0 < N_0 \leq \frac{1}{2}h\sigma_0$, la soluzione è dedotta ipotizzando un altro percorso di equilibrio; infatti, per $F \leq \frac{4h^2(N_0 - h\sigma_0)}{3hl}$, le sezioni della trave sono interamente compresse pertanto la soluzione è quella ricavata in elasticità lineare. Per F più grande, si determina, fino ad un certo valore del carico \hat{F}_1 , una suddivisione della trave in tratti dove le sezioni risultano compresse con parziale schiacciamento (fig. 2/e e fig. 2/f) e tratti dove sono interamente compresse; aumentando ancora F fino al valore \hat{F}_2 , si attua una ulteriore suddivisione della trave e si riconoscono tratti dove le sezioni sono interamente compresse, compresse con schiacciamento (fig. 2/e e fig. 2/f) e parzializzate con presenza di schiacciamento (fig. 2/g e fig. 2/h). Infine, come nel caso precedente, per successivi incrementi di carico fino al carico di collasso della trave (F_c), si formano, all'incastro e sotto il carico, delle cerniere plastiche.

3.1 Piccola precompressione

Consideriamo una trave di lunghezza l , incastrata agli estremi con sezione rettangolare di altezza h e larghezza unitaria (fig. 9).

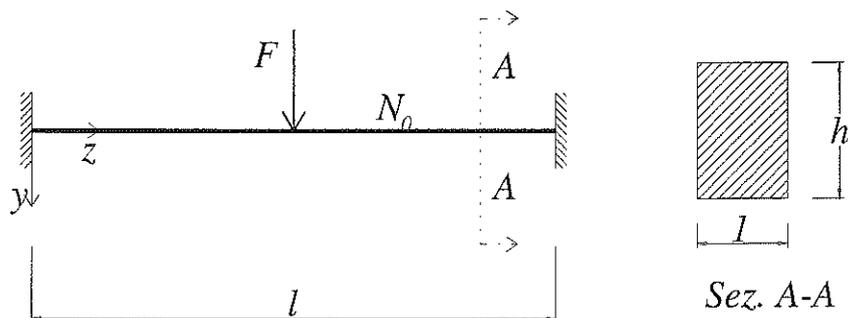


Fig. 9. Un esempio

Sia costituita di materiale elastico non lineare, non resistente a trazione e con limitata resistenza a compressione $\sigma_0 (< 0)$. Al fine di poter applicare un carico trasversale, applichiamo uno stato di precompressione $N_0 (< 0)$ non più grande, in modulo, di $\frac{1}{2}h\sigma_0$. Quindi applichiamo un carico concentrato F in mezzeria incrementandolo fino a raggiungere il collasso della trave.

È immediato verificare che, posto

$$F_0 = -\frac{4hN_0}{3l}, \quad (35)$$

per $F \leq F_0$ in ogni sezione della trave le caratteristiche della sollecitazione M e N appartengono all'insieme $\Omega \cup \Omega'$ e pertanto la soluzione del problema è quella ricavata nell'ambito dell'elasticità lineare. Si consideri, adesso, un valore di F maggiore di F_0 ; si determinano, in prossimità dell'incastro e sotto il carico, alcuni tratti di trave nei quali la sezione è parzializzata (fig. 10).

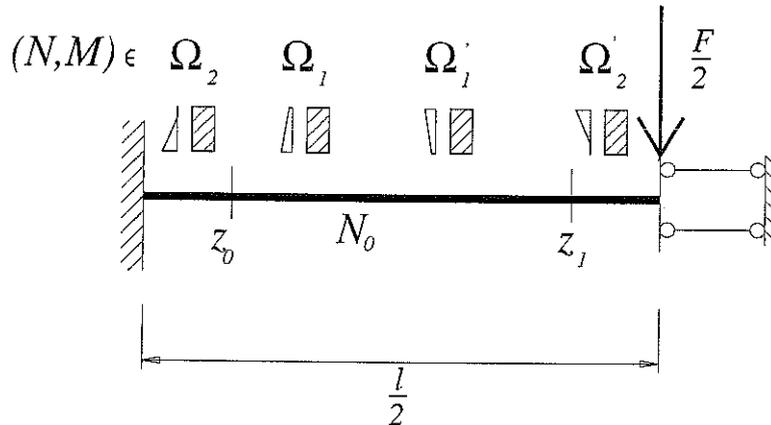


Fig. 10. Caratteristiche della sollecitazione nella trave per $F_0 \leq F \leq F_1$ e $\frac{1}{2}h\sigma_0 \leq N_0 < 0$.

Siano z_0 e z_1 le coordinate delle sezioni della trave tali che, detta $e(z) = \frac{M(z)}{N(z)}$ l'eccentricità, valgano le relazioni

$$\frac{h}{6} \leq e(z) \leq \frac{h}{2} \quad \text{for } 0 \leq z \leq z_0,$$

$$-\frac{h}{6} \leq e(z) \leq \frac{h}{6} \quad \text{for } z_0 \leq z \leq z_1,$$

$$-\frac{h}{2} \leq e(z) \leq -\frac{h}{6} \quad \text{for } z_1 \leq z \leq \frac{1}{2}l.$$

Sia F_1 il valore del carico tale che, per $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}l$, il minimo sforzo di compressione valga σ_0 . Allora, per $F_0 \leq F \leq F_1$, si ha

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq z_0 & \quad (N, M) \in \Omega_2, \\ z_0 \leq z \leq z_1 & \quad (N, M) \in \Omega_1, \\ z_1 \leq z \leq \frac{1}{2}l & \quad (N, M) \in \Omega'_2. \end{aligned}$$

Pertanto, detti w e v lo spostamento assiale e trasversale della linea media, si hanno, in vista delle (10) – (15), le seguenti equazioni differenziali ordinarie

$$w'_1 = \frac{8N^2(Nh - 3M)}{9E(Nh - 2M)^2} - \frac{N_0}{Eh} \quad (36)$$

$$v''_1 = -\frac{8N^3}{9E(Nh - 2M)^2} \quad (37)$$

per $0 \leq z \leq z_0$,

$$w_2' = \frac{N}{Eh} - \frac{N_0}{Eh} \quad (38)$$

$$v_2'' = -\frac{12M}{Eh^3} \quad (39)$$

per $z_0 \leq z \leq z_1$,

$$w_3' = \frac{8N^2(Nh + 3M)}{9E(Nh + 2M)^2} - \frac{N_0}{Eh} \quad (40)$$

$$v_3'' = \frac{8N^3}{9E(Nh + 2M)^2} \quad (41)$$

per $z_1 \leq z \leq \frac{1}{2}l$,

con le condizioni al contorno e di raccordo

$$w_1(0) = 0, \quad (42)$$

$$w_3(\frac{1}{2}l) = 0, \quad (43)$$

$$w_1(z_0) = w_2(z_0), \quad (44)$$

$$w_2(z_1) = w_3(z_1), \quad (45)$$

$$v_1'(0) = 0, \quad (46)$$

$$v_1(0) = 0, \quad (47)$$

$$v_3'(\frac{1}{2}l) = 0, \quad (48)$$

$$v_1'(z_0) = v_2'(z_0), \quad (49)$$

$$v_1(z_0) = v_2(z_0), \quad (50)$$

$$v_2'(z_1) = v_3'(z_1), \quad (51)$$

$$v_2(z_1) = v_3(z_1), \quad (52)$$

$$\frac{M(z_0)}{N} = \frac{h}{6} \quad (53)$$

$$\frac{M(z_1)}{N} = -\frac{h}{6}, \quad (54)$$

essendo $-\frac{N_0}{Eh}$ la deformazione dovuta alla precompressione N_0 .

Sia $M(z) = M_0 + \frac{1}{2}Fz$ l'espressione del momento flettente, avendo indicato con M_0 il momento flettente nella sezione d'incastro; allora le (53) e (54) consentono di scrivere le relazioni

$$z_1 = z_0 - \frac{2Nh}{3F}, \quad (55)$$

$$M_0 = \frac{Nh}{6} - \frac{1}{2}Fz_0, \quad (56)$$

che, sostituite nelle relazioni (36) – (41), conducono alle equazioni differenziali

$$w_1' = \frac{4N^2(Nh + 3Fz_0 - 3Fz)}{E(2Nh + 3Fz_0 - 3Fz)^2} - \frac{N_0}{Eh} \quad (57)$$

$$v_1'' = -\frac{8N^3}{E(2Nh + 3Fz_0 - 3Fz)^2} \quad (58)$$

per $0 \leq z \leq z_0$,

$$w_2' = \frac{N}{Eh} - \frac{N_0}{Eh} \quad (59)$$

$$v_2'' = -\frac{2Nh - 6Fz_0 + 6Fz}{Eh^3} \quad (60)$$

per $z_0 \leq z \leq z_1$,

$$w_3' = \frac{12N^2(Nh - Fz_0 + Fz)}{E(4Nh - 3Fz_0 + 3Fz)^2} - \frac{N_0}{Eh} \quad (61)$$

$$v_3'' = \frac{8N^3}{E(4Nh - 3Fz_0 + 3Fz)^2} \quad (62)$$

per $z_1 \leq z \leq \frac{1}{2}l$.

Integrando la (57) si ottiene

$$w_1(z) = -\frac{4N^2}{3EF} \left(\frac{Nh}{2Nh + 3Fz_0 - 3Fz} + \ln|2Nh + 3Fz_0 - 3Fz| \right) - \frac{N_0}{Eh}z + A \quad (63)$$

e, in vista della (42), si ha

$$A = \frac{4N^2}{3EF} \left(\frac{Nh}{2Nh + 3Fz_0} + \ln|2Nh + 3Fz_0| \right). \quad (64)$$

Integrando la (59) si ha

$$w_2(z) = \frac{N}{Eh}z - \frac{N_0}{Eh}z + B \quad (65)$$

e poiche'

$$w_1(z_0) = -\frac{4N^2}{3EF}\left(\frac{1}{2} + \ln(-2Nh)\right) - \frac{N_0}{Eh}z_0 + A$$

e

$$w_2(z_0) = \frac{N}{Eh}z_0 - \frac{N_0}{Eh}z_0 + B$$

la condizione di raccordo (44) consente di scrivere l'equazione

$$A = \frac{N}{Eh}z_0 + \frac{4N^2}{3EF}\left(\frac{1}{2} + \ln(-2Nh)\right) + B. \quad (66)$$

Integrando la (61) si ha

$$w_3(z) = \frac{4N^2}{3EF}\left(\frac{Nh}{4Nh - 3Fz_0 + 3Fz} + \ln|4Nh - 3Fz_0 + 3Fz|\right) - \frac{N_0}{Eh}z + C; \quad (67)$$

in vista di (55) si ha

$$w_2(z_1) = \frac{N}{Eh}z_0 - \frac{2N^2}{3EF} + \frac{2NN_0}{3EF} - \frac{N_0}{Eh}z_0 + B$$

e

$$w_3(z_1) = \frac{4N^2 \ln(-2Nh)}{3EF} + \frac{2N^2}{3EF} - \frac{N_0 z_0}{Eh} + \frac{2NN_0}{3EF} + C$$

e quindi la condizione di raccordo (45) consente di ricavare la relazione

$$B = \frac{4N^2}{3EF} - \frac{Nz_0}{Eh} + \frac{4N^2 \ln(-2Nh)}{3EF} + C. \quad (68)$$

Infine, da (43) si ricava

$$C = -\frac{4N^2}{3EF}\left(\frac{2Nh}{8Nh - 6Fz_0 + 3Fl} + \ln\left|4Nh - 3Fz_0 + \frac{3Fl}{2}\right|\right) + \frac{N_0}{2Eh}l \quad (69)$$

e quindi, da (64), (66), (68) e (69), si ottiene l'equazione trascendente

$$-\frac{3FlN_0}{8hN^2} + \frac{Nh}{2Nh + 3Fz_0} + \frac{2Nh}{8Nh - 6Fz_0 + 3Fl} + \ln\left|\frac{(2Nh + 3Fz_0)(8Nh - 6Fz_0 + 3Fl)}{4Nh}\right| - \frac{3}{2} = 0$$

(70)

nelle incognite N e z_0 .

Integrando l'equazione differenziale (58) si ottengono le espressioni

$$v_1'(z) = -\frac{8N^3}{3EF(2Nh + 3Fz_0 - 3Fz)} + D \quad (71)$$

e

$$v_1(z) = \frac{8N^3}{9EF^2} \log|2Nh + 3Fz_0 - 3Fz| + Dz + G; \quad (72)$$

quindi, con l'aiuto (46) e (47), le costanti

$$D = \frac{8N^3}{3EF(2Nh + 3Fz_0)}$$

e

(73)

$$G = -\frac{8N^3}{9EF^2} \log|2Nh + 3Fz_0|. \quad (74)$$

Dall'equazione differenziale (60) si ottengono le espressioni

$$v_2'(z) = -\frac{3Fz^2 + (2Nh - 6Fz_0)z}{Eh^3} + H \quad (75)$$

e

$$v_2(z) = -\frac{Fz^3 + (Nh - 3Fz_0)z^2}{Eh^3} + Hz + I \quad (76)$$

e, in vista delle (49) e (50), le relazioni

$$D = H + \frac{4N^2}{3EFh} + \frac{3Fz_0^2 - 2Nh z_0}{Eh^3} \quad (77)$$

e

$$G = I + (H - D)z_0 + \frac{2Fz_0^3 - Nh z_0^2}{Eh^3} - \frac{8N^3}{9EF^2} \ln|2Nh|. \quad (78)$$

Analogamente, da (62) si hanno le espressioni

$$v_3'(z) = -\frac{8N^3}{3EF(4Nh - 3Fz_0 + 3Fz)} + L \quad (79)$$

e

$$v_3(z) = -\frac{8N^3}{9EF^2} \ln |4Nh - 3Fz_0 + 3Fz| + Lz + P \quad (80)$$

quindi, in vista di (48), (51) e (52), le espressioni

$$L = \frac{16N^3}{3EF(8Nh - 6Fz_0 + 3Fl)}, \quad (81)$$

$$H = L - \frac{4N^2}{3EFh} - \frac{3Fz_0^2 - 2Nh z_0}{Eh^3} \quad (82)$$

e

$$P = I + (H - L)(z_0 - \frac{2Nh}{3F}) + \frac{8N^3}{9EF^2} \ln -2Nh + \frac{2Fz_0^3 - 3Nh z_0^2 + \frac{4N^2 h^2 z_0}{3F} - \frac{4N^3 h^3}{27F^2}}{Eh^3}. \quad (83)$$

Ora, dalle relazioni (73), (77), (81) e (82), si ottiene l'equazione

$$\frac{8N^3}{3EF} \left(\frac{2}{8Nh - 6Fz_0 + 3Fl} - \frac{1}{2Nh + 3Fz_0} \right) = 0 \quad (84)$$

dalla quale si ricava, posto che $\frac{8N^3}{3EF} \neq 0$, $8Nh - 6Fz_0 + 3Fl \neq 0$ e $2Nh + 3Fz_0 \neq 0$,

$$z_0 = \frac{l}{4} + \frac{Nh}{3F}; \quad (85)$$

allora, sostituendo il valore si z_0 nella (70), si ottiene l'equazione trascendente

$$\frac{-N_0 l}{2Eh} - \frac{2N^2}{3EF} \left(3 - \frac{16Nh}{12Nh + 3Fl} + 4 \ln \frac{8Nh}{12Nh + 3Fl} \right) = 0 \quad (86)$$

la cui soluzione consente di ottenere il valore incognito N e quindi la soluzione del problema. In vista delle (63) – (83), le funzioni momento flettente, spostamento orizzontale e verticale, possono essere espresse in funzione del solo valore di N , attraverso le espressioni

$$M(z) = \frac{1}{2}F \left(z - \frac{l}{4} \right),$$

$$z_0 = \frac{l}{4} + \frac{Nh}{3F}, \quad z_1 = \frac{l}{4} - \frac{Nh}{3F},$$

$$w_1(z) = -\frac{N_0}{Eh} z + \frac{4N^2}{3EF} \ln \frac{Fl + 4Nh}{-4Fz + Fl + 4Nh} + \frac{16N^3 h}{9EF} \left(\frac{1}{4Fz - Fl - 4Nh} + \frac{1}{Fl + 4Nh} \right) \quad (87)$$

$$w_2(z) = \frac{N - N_0}{Eh} z + \frac{4N^2}{3EF} \ln \frac{3(Fl + 4Nh)}{8Nh} - \frac{N(9F^2 l^2 + 72FNhl + 80N^2 h^2)}{36EFh(Fl + 4Nh)} \quad (88)$$

$$w_3(z) = -\frac{N_0}{Eh}z + \frac{4N^2}{3EF} \ln \frac{9(4Fz - Fl + 4Nh)(Fl + 4Nh)}{64N^2h^2} + \frac{2N^2}{9EF} \left(\frac{8Nh}{4Fz - Fl + 4Nh} - \frac{9Fl + 28Nh}{Fl + 4Nh} \right) \quad (89)$$

$$v_1(z) = \frac{32N^3}{9EF(Fl + 4Nh)}z + \frac{8N^3}{9EF^2} \ln \frac{-4Fz + Fl + 4Nh}{Fl + 4Nh}, \quad (90)$$

$$v_2(z) = -\frac{F}{Eh^3}z^3 + \frac{3Fl}{4Eh^3}z^2 - \frac{(3Fl + 4Nh)^3}{144EFh^3(Fl + 4Nh)}z + \frac{8N^3}{9EF^2} \ln \frac{8Nh}{3(Fl + 4Nh)} + \frac{(3Fl + 4Nh)(9F^2l^2 - 12FNhl + 160N^2h^2)}{1728EF^2h^3}, \quad (91)$$

$$v_3(z) = \frac{32N^3}{9EF(Fl + 4Nh)}z + \frac{8N^3}{9EF^2} \ln \frac{64h^2N^2}{9(Fl + 4Nh)(4Fz - Fl + 4Nh)} + \frac{20N^3}{27EF^2}. \quad (92)$$

Si osservi che M_0 , uguale a $-\frac{Fl}{8}$, dipende esplicitamente solo dal valore del carico F e non dal valore della forza normale N ; inoltre il suo valore è proprio quello che si trova nell'ambito dell'elasticità lineare. Lo spostamento assiale w non è nullo, contrariamente a quello che accade per la soluzione lineare elastica. z_0 e z_1 sono simmetrici rispetto ad $\frac{l}{4}$ ed infine si ha che il modulo della forza normale N è crescente con F , come si deduce immediatamente dalla (86).

Adesso, conosciuto il valore del momento d'incastro M_0 , possiamo calcolare il valore del carico F_1 fino al raggiungimento del quale la soluzione trovata ha validità; infatti, F_1 è l'intensità del carico per il quale nella sezione d'incastro lo sforzo di compressione minimo raggiunge il valore σ_0 e quindi è quello per cui le caratteristiche della sollecitazione in quella sezione appartengono alla curva α , frontiera tra le regioni Ω_2 e Ω_4 . Allora, sostituito in (27) M_0 al posto di M , si ottiene

$$F_1 = \frac{16N_1^2}{3\sigma_0 l} - \frac{4N_1 h}{l} \quad (93)$$

che, sostituito nella (86), conduce all'equazione

$$\frac{-N_0 l}{2Eh} - \frac{N_1 \sigma_0 l}{2E(4N_1 - 3\sigma_0 h)} \left[3 - \frac{\sigma_0 h}{N_1} + 4 \ln \left(\frac{\sigma_0 h}{2N_1} \right) \right] = 0 \quad (94)$$

la cui soluzione consente di calcolare il valore N_1 e quindi F_1 .

Per $F > F_1$ appaiono, nella trave, due tratti nei quali lo sforzo assiale ha l'andamento mostrato nelle figg. 2/g-h, determinando così una ulteriore suddivisione degli intervalli $[0, z_0]$ e $[z_1, \frac{1}{2}l]$ (fig. 11).

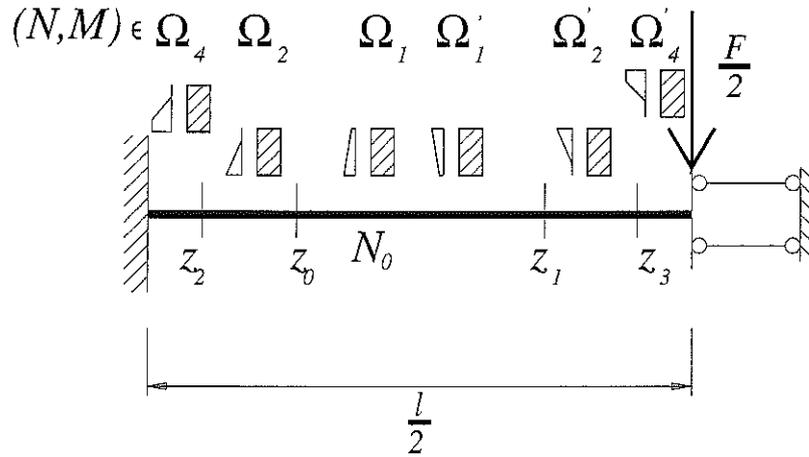


Fig. 11. Caratteristiche della sollecitazione nella trave per $F_1 \leq F \leq F_2$ e $\frac{1}{2}h\sigma_0 \leq N_0 < 0$.

Indichiamo con z_2 e z_3 i valori di z tali che si abbia

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq z_2 & \quad (N, M) \in \Omega_4, \\ z_2 \leq z \leq z_0 & \quad (N, M) \in \Omega_2, \\ z_0 \leq z \leq z_1 & \quad (N, M) \in \Omega_1, \\ z_1 \leq z \leq z_3 & \quad (N, M) \in \Omega'_2, \\ z_3 \leq z \leq \frac{1}{2}l & \quad (N, M) \in \Omega'_4. \end{aligned}$$

Allora la soluzione del problema, in vista di (10) – (15) e (20) – (23) si ottiene integrando le equazioni differenziali

$$w'_1 = \frac{(h\sigma_0 - 2N)\sigma_0}{4E\sqrt{-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0 - 3F\sigma_0 z}} + \frac{\sigma_0}{2E} - \frac{N_0}{Eh} \quad (95)$$

$$v''_1 = \frac{\sigma_0^2}{2E\sqrt{-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0 - 3F\sigma_0 z}} \quad (96)$$

per $0 \leq z \leq z_2$,

$$w'_2 = \frac{4N^2(Nh + 3Fz_0 - 3Fz)}{9E(2Nh + 3Fz_0 - 3Fz)^2} - \frac{N_0}{Eh} \quad (97)$$

$$v''_2 = -\frac{8N^3}{E(2Nh + 3Fz_0 - 3Fz)^2} \quad (98)$$

per $z_2 \leq z \leq z_0$,

$$w'_3 = \frac{N}{Eh} - \frac{N_0}{Eh} \quad (99)$$

$$v''_3 = -\frac{2Nh - 6Fz_0 + 6Fz}{Eh^3} \quad (100)$$

per $z_0 \leq z \leq z_1$,

$$w'_4 = \frac{12N^2(Nh - Fz_0 + Fz)}{E(4Nh - 3Fz_0 + 3Fz)^2} - \frac{N_0}{Eh} \quad (101)$$

$$v''_4 = \frac{8N^3}{E(4Nh - 3Fz_0 + 3Fz)^2} \quad (102)$$

per $z_1 \leq z \leq z_3$,

$$w'_5 = \frac{(h\sigma_0 - 2N)\sigma_0}{4E\sqrt{-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0z_0 + 3F\sigma_0z}} + \frac{\sigma_0}{2E} - \frac{N_0}{Eh} \quad (103)$$

$$v''_5 = -\frac{\sigma_0^2}{2E\sqrt{-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0z_0 + 3F\sigma_0z}} \quad (104)$$

per $z_3 \leq z \leq \frac{1}{2}l$

con le condizioni al contorno e di raccordo

$$w_1(0) = 0, \quad (105)$$

$$w_5(\frac{1}{2}l) = 0, \quad (106)$$

$$w_1(z_2) = w_2(z_2) \quad (107)$$

$$w_2(z_0) = w_3(z_0) \quad (108)$$

$$w_3(z_1) = w_4(z_1) \quad (109)$$

$$w_4(z_3) = w_5(z_3) \quad (110)$$

$$v'_1(0) = 0, \quad (111)$$

$$v_1(0) = 0, \quad (112)$$

$$v'_5(\frac{1}{2}l) = 0, \quad (113)$$

$$v'_1(z_2) = v'_2(z_2) \quad (114)$$

$$v_1(z_2) = v_2(z_2) \quad (115)$$

$$v'_2(z_0) = v'_3(z_0) \quad (116)$$

$$v_2(z_0) = v_3(z_0) \quad (117)$$

$$v'_3(z_1) = v'_4(z_1) \quad (118)$$

$$v_3(z_1) = v_4(z_1) \quad (119)$$

$$v'_4(z_3) = v'_5(z_3) \quad (120)$$

$$v_4(z_3) = v_5(z_3) \quad (121)$$

$$\frac{M(z_0)}{N} = \frac{h}{6} \quad (122)$$

$$\frac{M(z_1)}{N} = -\frac{h}{6} \quad (123)$$

$$\sigma\left(\frac{1}{2}h\right)\Big|_{z=z_2} = \sigma_0 \quad (124)$$

$$\sigma\left(-\frac{1}{2}h\right)\Big|_{z=z_3} = \sigma_0 \quad (125)$$

avendo sostituito ad $M(z)$ l'espressione $M_0 + \frac{1}{2}Fz$ e avendo utilizzato le (122) e (123) per scrivere le relazioni (55) e (56).

Le condizioni (124) e (125), poiche' si ha che $\sigma(\pm\frac{1}{2}h) = E(\epsilon \pm \frac{1}{2}\kappa h)$ e, per $z = z_2$ e $z = z_3$, $\sigma(\pm\frac{1}{2}h) = \sigma_0$, in vista delle (12) – (15), forniscono le due relazioni

$$z_2 = z_0 + \frac{2Nh}{3F} - \frac{4N^2}{3F\sigma_0}$$

e

$$z_3 = z_0 - \frac{4Nh}{3F} + \frac{4N^2}{3F\sigma_0}$$

che, insieme alle (55) e (56) consentono di esprimere M_0 , z_1 , z_2 e z_3 in funzione di N e z_0 .

Integrando la (95) si ottiene l'espressione

$$w_1(z) = \frac{2N - h\sigma_0}{6EF} \sqrt{-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0 - 3F\sigma_0 z} + \frac{\sigma_0 z}{2E} - \frac{N_0}{Eh} z + A$$

e, in vista della (105), la costante

$$A = \frac{h\sigma_0 - 2N}{6EF} \sqrt{-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0}. \quad (126)$$

Integrando la (97) si ottiene

$$w_2(z) = -\frac{4N^2}{3EF} \left(\frac{Nh}{2Nh + 3Fz_0 - 3Fz} + \ln |2Nh + 3Fz_0 - 3Fz| \right) - \frac{N_0}{Eh} z + B.$$

e poiche'

$$w_1(z_2) = \frac{N(h\sigma_0 - 2N)}{2EF} + \frac{\sigma_0 z_0}{2E} - \frac{N_0}{Eh} z_2 + A$$

e

$$w_2(z_2) = -\frac{Nh\sigma_0}{3EF} - \frac{4N^2}{3EF} \ln\left(-\frac{4N^2}{\sigma_0}\right) - \frac{N_0}{Eh} z_2 + B$$

dalla (107) si deduce

$$B = A + \frac{N(5h\sigma_0 - 6N)}{6EF} + \frac{\sigma_0 z_0}{2E} + \frac{4N^2}{3EF} \ln\frac{-4N^2}{\sigma_0}. \quad (127)$$

Analogamente, dalla (99) si ottiene

$$w_3(z) = \frac{N}{Eh} z - \frac{N_0}{Eh} z + C$$

e poiche'

$$w_2(z_0) = -\frac{4N^2}{3EF} \left(\frac{1}{2} + \ln|2Nh|\right) - \frac{N_0}{Eh} z_0 + B$$

e

$$w_3(z_0) = \frac{N}{Eh} z_0 - \frac{N_0}{Eh} z_0 + C$$

con l'aiuto di (108), si trova

$$B = \frac{N}{Eh} z_0 + \frac{4N^2}{3EF} \left(\frac{1}{2} + \ln|2Nh|\right) + C. \quad (128)$$

Dalla (101) si ottiene

$$w_4(z) = \frac{4N^2}{3EF} \left(\frac{Nh}{4Nh - 3Fz_0 + 3Fz} + \ln|4Nh - 3Fz_0 + 3Fz|\right) - \frac{N_0}{Eh} z + D$$

quindi, poiche'

$$w_3(z_1) = \frac{N}{Eh} z_1 - \frac{N_0}{Eh} z_1 + C$$

e

$$w_4(z_1) = \frac{4N^2 \ln(-2Nh)}{3EF} + \frac{2N^2}{3EF} - \frac{Nz_0}{Eh} + \frac{2NN_0}{3EF} + D$$

la condizione di raccordo (109) consente di scrivere la relazione

$$C = \frac{N(2N - 3z_0)}{3EF} + \frac{4N^2}{3EF} \left(\frac{1}{2} + \ln(-2Nh) \right) + D. \quad (129)$$

Infine, integrando la (103), si ottiene

$$w_5(z) = \frac{h\sigma_0 - 2N}{6EF} \sqrt{-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0 z_0 + 3F\sigma_0 z} + \frac{\sigma_0 z}{2E} - \frac{N_0}{Eh} z + G$$

quindi, dalla (106), si trova la costante

$$G = \frac{2N - h\sigma_0}{6EF} \sqrt{-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0 z_0 + \frac{3}{2}F\sigma_0 l} - \frac{\sigma_0 l}{4E} + \frac{N_0}{2Eh} l; \quad (130)$$

inoltre, poiche'

$$w_4(z_3) = \frac{4N^2}{3EF} \ln \frac{-4N^2}{\sigma_0} + \frac{Nh\sigma_0}{3EF} - \frac{N_0}{Eh} z_3 + D$$

e

$$w_5(z_3) = \frac{N(6N - 5h\sigma_0)}{6EF} + \frac{\sigma_0 z_0}{2E} - \frac{N_0}{Eh} z_3 + G$$

con l'aiuto di (110) si ricava

$$D = G + \frac{N(6N - 7h\sigma_0)}{6EF} + \frac{\sigma_0 z_0}{2E} - \frac{4N^2}{3EF} \ln \frac{-4N^2}{\sigma_0} \quad (131)$$

che, insieme alle relazioni (126) – (130) consentono di scrivere l'equazione

$$\begin{aligned} & \frac{2N - h\sigma_0}{6EF} \left(\sqrt{-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0 z_0 + \frac{3}{2}F\sigma_0 l} + \sqrt{-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0} \right) \\ & - \frac{\sigma_0 l}{4E} + \frac{N_0}{2Eh} + \frac{2N(2N - h\sigma_0)}{EF} - \frac{8N^2}{3EF} \ln \frac{2N}{h\sigma_0} = 0. \end{aligned} \quad (132)$$

nelle incognite N e z_0 .

Integrando l'equazione differenziale (96) si ottengono le espressioni di v_1 e v_1'

$$v_1'(z) = -\frac{\sigma_0 \sqrt{-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0 - 3F\sigma_0 z}}{3EF} + H$$

e

$$v_1(z) = \frac{2}{27EF^2} \sqrt{(-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0 - 3F\sigma_0 z)^3} + Hz + I$$

e, utilizzando le condizioni al contorno (111) e (112), le costanti

$$H = \frac{\sigma_0 \sqrt{-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0}}{3EF} \quad (133)$$

e

$$I = -\frac{2}{27EF^2} \sqrt{(-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0)^3}.$$

Integrando la (98) si ottengono le espressioni

$$v_2'(z) = -\frac{8N^3}{3EF(2Nh + 3Fz_0 - 3Fz)} + L$$

e

$$v_2(z) = \frac{8N^3}{9EF^2} \ln |2Nh + 3Fz_0 - 3Fz| + Lz + O$$

e, in vista delle (114) e (115), le relazioni

$$H = L - \frac{N\sigma_0}{3EF} \quad (134)$$

e

$$I = O + (L - H)z_0 + \frac{2N^3}{27EF^2} \left(12 \ln \frac{-4N^2}{\sigma_0} + 1 \right).$$

Analogamente, dalla (100) si ottengono le espressioni di v_3 e v_3'

$$v_3'(z) = -\frac{3Fz^2 + (2Nh - 6Fz_0)z}{Eh^3} + P$$

e

$$v_3(z) = -\frac{Fz^3 + (Nh - 3Fz_0)z^2}{Eh^3} + Pz + Q$$

e quindi, in vista delle condizioni di raccordo (116) e (117), le relazioni

$$L = P + \frac{4N^2}{3EFh} + \frac{3Fz_0^2 - 2Nh z_0}{Eh^3} \quad (135)$$

e

$$O = Q + (P - L)z_0 + \frac{2Fz_0^3 - Nh z_0^2}{Eh^3} - \frac{8N^3}{9EF^2} \ln |2Nh|.$$

Dalla (102) si ottengono le espressioni di v_4 e v_4'

$$v_4'(z) = -\frac{8N^3}{3EF(4Nh - 3Fz_0 + 3Fz)} + R$$

e

$$v_4(z) = -\frac{8N^3}{9EF^2} \ln |4Nh - 3Fz_0 + 3Fz| + Rz + S$$

e, dalle (118) e (119), le relazioni

$$P = R - \frac{4N^2}{3EFh} - \frac{3Fz_0^2 - 2Nh z_0}{Eh^3} \quad (136)$$

e

$$Q = S + (R - P)z_0 + \frac{2Fz_0^3 - Nh z_0^2}{Eh^3} - \frac{8N^3}{9EF^2} \ln |2Nh|.$$

Infine, integrando l'equazione differenziale (104) si ottengono le espressioni di v_5 e v_5'

$$v_5'(z) = -\frac{\sigma_0 \sqrt{-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0 z_0 + 3F\sigma_0 z}}{3EF} + T$$

e

$$v_5(z) = -\frac{2}{27EF^2} \sqrt{(-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0 z_0 + 3F\sigma_0 z)^2} + Tz + U;$$

quindi, utilizzando la condizione al contorno (113), si ottiene la costante

$$T = \frac{\sigma_0 \sqrt{-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0 z_0 + \frac{3}{2}F\sigma_0 l}}{3EF} \quad (137)$$

e utilizzando le condizioni di raccordo (120) e (121) si ottengono le relazioni

$$T = R - \frac{\sigma_0 N}{EF} \quad (138)$$

e

$$S = U + (T - R)z_3 + \frac{2N^3}{27EF^2} \left(12 \ln \frac{4N^2}{\sigma_0} - 1 \right). \quad (139)$$

Adesso, utilizzando le relazioni (134) – (138) si ha l'equazione

$$\sqrt{-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0 z_0 + \frac{3}{2}F\sigma_0 l} = \sqrt{-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0}$$

da cui si ricava

$$z_0 = \frac{l}{4} + \frac{Nh}{3F} \quad (140)$$

e quindi

$$M_0 = -\frac{Fl}{8}.$$

Allora, anche per questi valori del carico ($F > F_1$), sia M_0 che z_0 mantengono l'espressione che avevano nell'intervallo di carico precedente ($F_0 \leq F \leq F_1$).

Sostituendo, allora, il valore di z_0 nella (132), si ottiene l'equazione trascendente

$$2(2N - h\sigma_0)\sqrt{-12N^2 + 12Nh\sigma_0 + 3Fl\sigma_0 - 3Fl\sigma_0 + \frac{6FlN_0}{h} + 48N^2 - 24Nh\sigma_0 - 32N^2 \ln \frac{2N}{h\sigma_0}} \quad (141)$$

la cui soluzione consente di ottenere il valore incognito N e quindi la soluzione del problema. Con l'aiuto delle relazioni (126) - (139), l'espressioni del momento flettente e del campo di spostamento, possono essere espresse in funzione del solo valore di N , dalle relazioni

$$M(z) = \frac{1}{2}F(z - \frac{l}{4}),$$

$$z_0 = \frac{l}{4} + \frac{Nh}{3F}, z_1 = \frac{l}{4} - \frac{Nh}{3F}, z_2 = \frac{l}{4} + \frac{Nh}{F} - \frac{4N^2}{3F\sigma_0}, z_3 = \frac{l}{4} - \frac{Nh}{F} + \frac{4N^2}{3F\sigma_0},$$

$$w_1(z) = \sqrt{3} \frac{2N - h\sigma_0}{12EF} \sqrt{-4F\sigma_0 z + Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0} + z \left(\frac{\sigma_0}{2E} - \frac{N_0}{Eh} \right) + \sqrt{3} \frac{h\sigma_0 - 2N}{12EF} \sqrt{Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0}, \quad (142)$$

$$w_2(z) = \frac{4N^2}{3EF} \left(\frac{4Nh}{3(4Fz - Fl - 4Nh)} + \ln \frac{16N^2}{3\sigma_0(-4Fz + Fl + 4Nh)} \right) - \frac{N_0 z}{Eh} + \frac{2\sqrt{3}(2N - h\sigma_0)\sqrt{Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0} - 3Fl\sigma_0 + 24N(N - h\sigma_0)}{24EF}, \quad (143)$$

$$w_3(z) = \frac{z}{Eh}(N - N_0) - \frac{4N^2}{3EF} \ln \frac{h\sigma_0}{2N} + \frac{(h\sigma_0 - 2N)(2\sqrt{3}h\sqrt{Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0} + 3Fl + 24Nh)}{24EFh} \quad (144)$$

$$w_4(z) = \frac{4N^2}{3EF} \left(\frac{4Nh}{3(4Fz - Fl + 4Nh)} + \ln \frac{3(4Fz - Fl + 4Nh)}{4h^2\sigma_0} \right) - \frac{N_0 z}{Eh} + \frac{2\sqrt{3}(2N - h\sigma_0)\sqrt{Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0} - 3Fl\sigma_0 + 24N(3N - h\sigma_0)}{24EF}, \quad (145)$$

$$w_s(z) = \frac{\sqrt{3}(h\sigma_0 - 2N)}{12EF} \sqrt{4F\sigma_0 z - Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0} + z \left(\frac{\sigma_0}{2E} - \frac{N_0}{Eh} \right) + \frac{\sqrt{3}h(2N - h\sigma_0) \sqrt{Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0} + 3Fl(2N_0 - h\sigma_0)}{12EFh}, \quad (146)$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{3(-4F\sigma_0 z + Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)^3}}{36EF^2} + \frac{\sigma_0 z \sqrt{3(Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)}}{6EF} + \frac{\sqrt{3(Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)^3}}{36EF^2}, \quad (147)$$

$$v_2 = \frac{8N^3 \ln \frac{-3\sigma_0(4Fz - Fl - 4Nh)}{16N^2}}{9EF^2} + \frac{6N\sigma_0 z + \sigma_0 z \sqrt{3(Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)}}{6EF} + \frac{3\sqrt{3(Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)^3} + 27FNl\sigma_0 - 4N^2(34N - 27h\sigma_0)}{108EF^2}, \quad (148)$$

$$v_3 = \frac{8N^3 \ln \frac{h\sigma_0}{2N} - \frac{Fz^3}{Eh^3} + \frac{3Flz^2}{4Eh^3} + \frac{z(8h^3\sigma_0 \sqrt{3(Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)} - 9F^2 l^2 - 48Nh^2(N - h\sigma_0))}{48EFh^3}}{48h^3 \sqrt{3(Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)^3} - 27F^3 l^3 + 432FNh^2 l(h\sigma_0 - N) - 64N^2 h^3(44N - 27h\sigma_0)} + \frac{1728EF^2 h^3}{1728EF^2 h^3}, \quad (149)$$

$$v_4 = \frac{8N^3 \ln \frac{4h^2\sigma_0}{3(4Fz - Fl + 4Nh)}}{9EF^2} + \frac{\sigma_0 z \sqrt{3(Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)} + 6N\sigma_0 z}{6EF} + \frac{\sqrt{3(Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)^3} + 9FNl\sigma_0 - 36N^2(2N - h\sigma_0)}{36EF^2}, \quad (150)$$

$$v_5 = \frac{16N^3 \ln \frac{h\sigma_0}{2N} - \frac{\sqrt{3(4F\sigma_0 z - Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)^3}}{36EF^2} + \frac{\sigma_0 z \sqrt{3(Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)}}{6EF}}{9EF^2} + \frac{8N^2(44N - 27h\sigma_0) - 3\sqrt{3(Fl\sigma_0 - 4N^2 + 4Nh\sigma_0)^3}}{108EF^2}. \quad (151)$$

Questa soluzione verifica le stesse proprietà evidenziate per la soluzione trovata per l'intervallo di carico precedente ($F_0 \leq F \leq F_1$).

Conosciuto allora il valore del momento d'incastro, siamo in grado di calcolare F_2 che rappresenta il limite superiore del carico per il quale questa soluzione è valida. Infatti, per $F = F_2$, le caratteristiche N e M relative alla sezione d'incastro raggiungono la curva γ e quindi F_2 , insieme al corrispondente valore della forza normale N_2 , è la soluzione del sistema formato dalla equazione (141) e dall'equazione di γ (33) dove si sostituisca M_0 al posto di M .

In questo modo, si ha

$$F_2 = \frac{4N_2^2}{l\sigma_0} - \frac{4N_2 h}{l} \quad (152)$$

che, sostituito nella (141), fornisce l'equazione trascendente

$$-32N_2^2 \ln \left(\frac{2N_2}{h\sigma_0} \right) + \frac{24N_0N_2(N_2 - h\sigma_0)}{h\sigma_0} + 36N_2^2 - 12N_2h\sigma_0 = 0 \quad (153)$$

la cui soluzione consente di trovare N_2 e quindi F_2 .

Per $F = F_2$, le sezioni all'incastro e sotto il carico diventano sede di cerniere intorno al proprio asse neutro; pertanto, escluso il caso per il quale le tre cerniere si allineino ossia il caso in cui σ valga σ_0 in metà sezione e 0 nell'altra, caso che si realizza quando si carichi a partire da un valore della precompressione $N_0 = \frac{1}{2}h\sigma_0$, la trave può sopportare successivi incrementi di carico fintanto appunto che si formi questo unico meccanismo possibile. Per questi successivi incrementi di carico, tuttavia, il valore delle caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni d'incastro e in mezzeria deve appartenere alle curve γ e γ' , rispettivamente. Allora, per $F > F_2$, il calcolo della soluzione deve considerare le nuove condizioni di vincolo e il vincolo sulle caratteristiche della sollecitazione; La soluzione si ottiene pertanto integrando le equazioni differenziali (95) - (104), sostituendo alle condizioni (105), (106), (111) e (113) le quattro condizioni

$$M(0) = -\frac{N^2}{2\sigma_0} + \frac{1}{2}Nh,$$

$$M\left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{N^2}{2\sigma_0} - \frac{1}{2}Nh,$$

$$w_1(0) = v_1'(0) \left(\frac{h}{2} - \frac{N}{\sigma_0} \right),$$

$$w_5\left(\frac{1}{2}l\right) = v_5'\left(\frac{1}{2}l\right) \left(\frac{N}{\sigma_0} - \frac{h}{2} \right),$$

che esprimono, appunto, le condizioni che momento flettente e forza normale all'incastro e nella sezione sotto il carico appartengano alle curve γ e γ' e che queste sezioni possano ruotare rispetto al proprio asse neutro. Integrando, si ottiene la soluzione

$$N = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_0(Fl + h^2\sigma_0)} + \frac{1}{2}h\sigma_0, \quad M(z) = \frac{1}{2}F \left(z - \frac{l}{4} \right),$$

$$z_0 = \frac{N^2}{F\sigma_0} - \frac{2Nh}{3F}, \quad z_1 = \frac{N^2}{F\sigma_0} - \frac{4Nh}{3F}, \quad z_2 = -\frac{N^2}{3F\sigma_0}, \quad z_3 = \frac{7N^2}{3F\sigma_0} - \frac{2Nh}{F},$$

$$w_1(z) = \frac{4N^2 \ln \frac{h\sigma_0}{2N}}{3EF} + \frac{(2N - h\sigma_0)\sqrt{-3\sigma_0 z}}{6E\sqrt{F}} + \frac{(h\sigma_0 - 2N_0)z}{2Eh} + \frac{Fl(2N_0 - h\sigma_0) + 8Nh(2N - h\sigma_0)}{8EFh}, \quad (154)$$

$$w_2(z) = \frac{4N^2 \ln \frac{2Nh\sigma_0}{3(F\sigma_0 z - N^2)}}{3EF} + \frac{4N^3 h\sigma_0}{9EF(F\sigma_0 z - N^2)} - \frac{N_0 z}{Eh} + \frac{Fl(2N_0 - h\sigma_0) + 4Nh(3N - h\sigma_0)}{8EFh}, \quad (155)$$

$$w_3(z) = \frac{(N - N_0)z}{Eh} + \frac{Fl\sigma_0(2N_0 - h\sigma_0) - 4N(2N^2 - 3Nh\sigma_0 + h^2\sigma_0^2)}{8EFh\sigma_0}, \quad (156)$$

$$w_4(z) = \frac{4N^2 \ln \frac{3(F\sigma_0 z - N^2 + 2Nh\sigma_0)}{2Nh\sigma_0}}{3EF} + \frac{4N^3 h\sigma_0}{9EF(F\sigma_0 z - N^2 + 2Nh\sigma_0)} - \frac{N_0 z}{Eh} + \frac{Fl(2N_0 - h\sigma_0) - 4Nh(N + h\sigma_0)}{8EFh}, \quad (157)$$

$$w_5(z) = \frac{4N^2 \ln \frac{2N}{h\sigma_0}}{3EF} + \frac{(h\sigma_0 - 2N)\sqrt{3(F\sigma_0 z - 2N^2 + 2Nh\sigma_0)}}{6EF} + \frac{(h\sigma_0 - 2N_0)z}{2Eh} + \frac{Fl(2N_0 - h\sigma_0) - 8Nh(2N - h\sigma_0)}{8EFh}, \quad (158)$$

$$v_1(z) = \frac{8N^2 \sigma_0 z \ln \frac{2N}{h\sigma_0}}{3EF(2N - h\sigma_0)} + \frac{2\sqrt{-3\sigma_0^3 z^3}}{9E\sqrt{F}} + \frac{\sigma_0 z (Fl(2N_0 - h\sigma_0) + 8Nh(2N - h\sigma_0))}{4EFh(h\sigma_0 - 2N)}, \quad (159)$$

$$v_2(z) = \frac{8N^3 \ln \frac{3(F\sigma_0 z - N^2)}{4N^2}}{9EF^2} + \frac{8N^2 \sigma_0 z \ln \frac{2N}{h\sigma_0}}{3EF(2N - h\sigma_0)} + \frac{\sigma_0 z (Fl(2N_0 - h\sigma_0) + 4Nh(2N - h\sigma_0))}{4EFh(h\sigma_0 - 2N)} + \frac{7N^3}{27EF^2}, \quad (160)$$

$$v_3(z) = \left(\frac{8N^2 \sigma_0 z}{3EF(2N - h\sigma_0)} - \frac{8N^3}{9EF^2} \right) \ln \frac{2N}{h\sigma_0} - \frac{Fz^3}{Eh^3} + \frac{3Nz^2(N - h\sigma_0)}{Eh^3\sigma_0} + \frac{(Fh^2\sigma_0^3(2N_0 - h\sigma_0) + 4N(2N - h\sigma_0)(3N^3 - 6N^2h\sigma_0 + 4Nh^2\sigma_0^2 + h^3\sigma_0^3))z}{4EFh^3\sigma_0^2(h\sigma_0 - 2N)} + \frac{N^3(27N^3 - 81N^2h\sigma_0 + 108Nh^2\sigma_0^2 - 37h^3\sigma_0^3)}{27EF^2h^3\sigma_0^3}, \quad (161)$$

$$v_4(z) = \frac{8N^3 \ln \frac{h^2\sigma_0^2}{3(F\sigma_0 z - N^2 + 2Nh\sigma_0)}}{9EF^2} + \frac{8N^2 \sigma_0 z \ln \frac{2N}{h\sigma_0}}{3EF(2N - h\sigma_0)} + \frac{\sigma_0 z (Fl(2N_0 - h\sigma_0) + 4Nh(2N - h\sigma_0))}{4EFh(h\sigma_0 - 2N)} + \frac{N^3}{EF^2}, \quad (162)$$

$$v_5(z) = \left(\frac{8N^2 \sigma_0 z}{3EF(2N - h\sigma_0)} - \frac{16N^3}{9EF^2} \right) \ln \frac{2N}{h\sigma_0} - \frac{2\sqrt{3(F\sigma_0 z - 2N^2 + 2Nh\sigma_0)^3}}{9EF^2} + \frac{\sigma_0 z (Fl(2N_0 - h\sigma_0) + 8Nh(2N - h\sigma_0))}{4EFh(h\sigma_0 - 2N)} + \frac{2N^2(44N - 27h\sigma_0)}{27EF^2} \quad (163)$$

che risolve il problema fino al carico di collasso F_c che si verifica allorché nelle sezioni d'incastro e sotto il carico, le tre cerniere, che si sono formate per $F = F_2$, si allineino fino a formare un meccanismo. Il valore

F_c può essere calcolato con sole considerazioni di equilibrio, essendo unico il meccanismo di collasso. Il suo valore è indipendente dal valore della precompressione e vale

$$F_c = -\frac{\sigma_0 h^2}{l} \quad (164)$$

cui corrisponde un valore della forza normale $N_c = \frac{1}{2}h\sigma_0$.

3.2 Grande precompressione

Consideriamo, adesso, lo stesso problema applicando, però, una precompressione N_0 più grande, in modulo, di $\frac{1}{2}h\sigma_0$.

È facile verificare che, posto

$$\widehat{F}_0 = \frac{4h^2(N_0 - h\sigma_0)}{3hl}, \quad (165)$$

per $F \leq \widehat{F}_0$ in ogni sezione della trave le caratteristiche della sollecitazione appartengono all'insieme $\Omega_1 \cup \Omega'_1$ ossia ogni sezione è interamente compressa e pertanto la soluzione del problema è quella ricavata nell'ambito dell'elasticità lineare; \widehat{F}_0 è il valore di F per il quale si ha $\sigma = \sigma_0$ per $y = \pm \frac{1}{2}h$ nelle sezioni d'incastro e sotto il carico, rispettivamente. Si consideri, adesso, un valore di $F > \widehat{F}_0$; si determinano, in prossimità dell'incastro e sotto il carico, alcuni tratti di trave nei quali si ha schiacciamento (fig. 2e-f); siano z_0 e z_1 le coordinate delle sezioni della trave tali che

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq z_0 & \quad (N, M) \in \Omega_3 \\ z_0 \leq z \leq z_1 & \quad (N, M) \in \Omega_1 \\ z_1 \leq z \leq \frac{1}{2}l & \quad (N, M) \in \Omega'_3 \end{aligned}$$

ossia siano z_0 e z_1 , rispettivamente, le coordinate delle sezioni tali che σ valga σ_0 per $y = \pm \frac{1}{2}h$ (fig. 12).

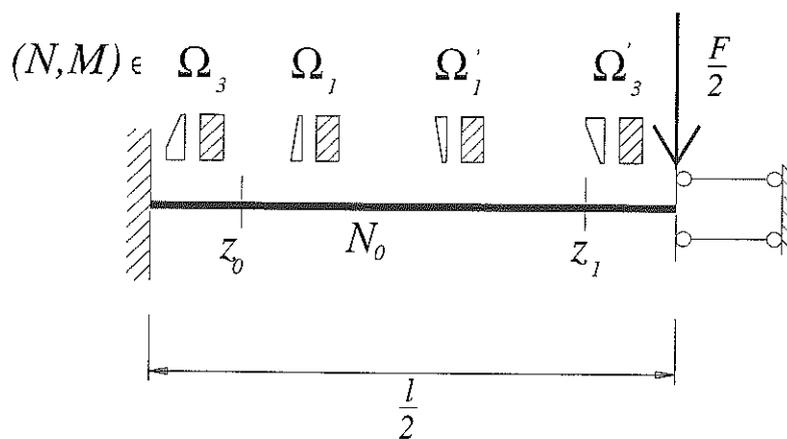


Fig. 12. Caratteristiche della sollecitazione nella trave per $\widehat{F}_0 \leq F \leq \widehat{F}_1$ e $h\sigma_0 < N_0 \leq \frac{1}{2}h\sigma_0$.

Allora, detto \widehat{F}_1 , il valore di F per il quale il valore dello sforzo assiale σ valga 0 per $y = \mp \frac{1}{2}h$ nelle sezioni d'incastro e sotto il carico rispettivamente, per $\widehat{F}_0 \leq F \leq \widehat{F}_1$, si ha:

$$w'_1 = \frac{36\sigma_0 M^2 + 12M(2N + h\sigma_0)(N - h\sigma_0) + h(N - h\sigma_0)^2(8N + h\sigma_0)}{9E(2M + Nh - h^2\sigma_0)^2} - \frac{N_0}{Eh}$$

$$v''_1 = \frac{8(N - h\sigma_0)^3}{9E(-h^2\sigma_0 + Nh + 2M)^2}$$

per $0 \leq z \leq z_0$,

$$w'_2 = \frac{N}{Eh} - \frac{N_0}{Eh}$$

$$v''_2 = -\frac{12M}{Eh^3}$$

per $z_0 \leq z \leq z_1$,

$$w'_3 = \frac{36\sigma_0 M^2 + 12M(2N + h\sigma_0)(h\sigma_0 - N) + h(N - h\sigma_0)^2(8N + h\sigma_0)}{9E(2M - Nh + h^2\sigma_0)^2} - \frac{N_0}{Eh}$$

$$v''_3 = \frac{8(N - h\sigma_0)^3}{9E(2M - Nh + h^2\sigma_0)^2}$$

per $z_1 \leq z \leq \frac{1}{2}l$,

che possono essere risolte in vista delle condizioni al contorno (42) – (52) e dalle condizioni

$$\sigma\left(\frac{1}{2}h\right)\Big|_{z=z_0} = \sigma_0$$

$$\sigma\left(-\frac{1}{2}h\right)\Big|_{z=z_1} = \sigma_0.$$

Procedendo in modo analogo all'esempio precedente si ottiene la soluzione data da:

$$M(z) = \frac{1}{2}F\left(z - \frac{l}{4}\right), z_0 = \frac{l}{4} - \frac{h(N - h\sigma_0)}{3F}, z_1 = \frac{l}{4} + \frac{h(N - h\sigma_0)}{3F},$$

$$w_1(z) = \frac{4(N - h\sigma_0)^2}{3EF} \ln \frac{4Fz - Fl + 4h(N - h\sigma_0)}{4h(N - h\sigma_0) - Fl} + \frac{16h(N - h\sigma_0)^3}{9EF(4Fz - Fl + 4Nh - 4h^2\sigma_0)} + \frac{(h\sigma_0 - N_0)z}{Eh} + \frac{16h(N - h\sigma_0)^3}{9EF(Fl - 4Nh + 4h^2\sigma_0)}, \quad (166)$$

$$w_2(z) = \frac{4(N - h\sigma_0)^2}{3EF} \ln \frac{8h(h\sigma_0 - N)}{3(Fl - 4Nh + 4h^2\sigma_0)} + \frac{(N - N_0)z}{Eh} + \frac{(h\sigma_0 - N)(9F^2l^2 + 72Fhl(h\sigma_0 - N) + 80h^2(h\sigma_0 - N)^2)}{36EFh(Fl - 4h(N - h\sigma_0))}, \quad (167)$$

$$w_3(z) = \frac{4(N - h\sigma_0)^2}{3EF} \ln \frac{Fl - 4Nh + 4h^2\sigma_0}{4Fz - Fl - 4Nh + 4h^2\sigma_0} + \frac{16h(N - h\sigma_0)^3}{9EF(4Fz - Fl - 4Nh + 4h^2\sigma_0)} + \frac{(h\sigma_0 - N_0)z}{Eh} + \frac{9F^2l^2(N_0 - h\sigma_0) + 36Fhl(N - h\sigma_0)(h\sigma_0 - N_0) - 32h^2(N - h\sigma_0)^3}{18EFh(Fl - 4Nh + 4h^2\sigma_0)}, \quad (168)$$

$$v_1(z) = \frac{8(h\sigma_0 - N)^3}{9EF^2} \ln \frac{4Fz - Fl + 4h(N - h\sigma_0)}{4h(N - h\sigma_0) - Fl} + \frac{32(h\sigma_0 - N)^3 z}{9EF(Fl - 4h(N - h\sigma_0))}, \quad (169)$$

$$v_2(z) = \frac{8(h\sigma_0 - N)^3}{9EF^2} \ln \frac{8h(h\sigma_0 - N)}{3(Fl - 4h(N - h\sigma_0))} - \frac{Fz^3}{Eh^3} + \frac{3Flz^2}{4Eh^3} + \frac{(3Fl - 4h(N - h\sigma_0))(3Fl - 4h(N - h\sigma_0))^2 z}{144EFh^3(4h(N - h\sigma_0) - Fl)} + \frac{(3Fl - 4h(N - h\sigma_0))(9F^2l^2 + 12Fhl(N - h\sigma_0) + 160h^2(N - h\sigma_0)^2)}{1728EF^2h^3}, \quad (170)$$

$$v_3(z) = \frac{8(N - h\sigma_0)^3}{9EF^2} \ln \frac{9(4Fz - Fl - 4h(N - h\sigma_0))(Fl - 4h(N - h\sigma_0))}{64h^2(N - h\sigma_0)^2} + \frac{32(h\sigma_0 - N)^3 z}{9EF(Fl - 4h(N - h\sigma_0))} + \frac{20(h\sigma_0 - N)^3}{27EF^2} \quad (171)$$

dove N è la soluzione dell'equazione trascendente

$$\frac{8(N - h\sigma_0)^2}{3EF} \ln \frac{3(Fl - 4h(N - h\sigma_0))}{8h(N - h\sigma_0)} + \frac{9F^2l^2(N_0 - h\sigma_0) + 36Fhl(N + N_0 - 2h\sigma_0)(h\sigma_0 - N) + 80h^2(N - h\sigma_0)^3}{18EFh(Fl - 4h(N - h\sigma_0))} = 0 \quad (172)$$

Per questa soluzione valgono le considerazioni fatte per la soluzione relativa all'intervallo di carico $F_0 \leq F \leq F_1$, esclusa quella che riguarda la forza normale; infatti, da un'analisi della relazione (171) si osserva che il modulo della forza normale N è decrescente con F e pertanto, con un valore della precompressione $|N_0| > \frac{1}{2}h\sigma_0$, si verifica la circostanza che aumentando il carico diminuisce la spinta della trave.

Analogamente ai casi precedenti, ottenuto il valore del momento d'incastro, $M_0 = -\frac{1}{8}Fl$, è possibile calcolare \hat{F}_1 che delimita il valore superiore al carico per cui questa soluzione è valida. Infatti il valore di \hat{F}_1 è quello per il quale nella sezione d'incastro si realizza uno sforzo di compressione massimo pari a 0 e quindi è quello per cui le caratteristiche della sollecitazione per quel valore del carico raggiungono la curva β , frontiera tra le regioni Ω_3 e Ω_4 . Pertanto, sostituito il valore del momento d'incastro M_0 in (30) si ottiene

$$\widehat{F}_1 = \frac{4\left(4\widehat{N}_1^2 - 5\widehat{N}_1 h\sigma_0 + h^2\sigma_0^2\right)}{3l\sigma_0} \quad (173)$$

che, sostituito nella (171), conduce all'equazione

$$\frac{2l\sigma_0(\widehat{N}_1 - h\sigma_0)}{E(4\widehat{N}_1 - h\sigma_0)} \ln \frac{-2(\widehat{N}_1 - h\sigma_0)}{h\sigma_0} + \frac{N_0 l(4\widehat{N}_1 - h\sigma_0) - lh\sigma_0(7\widehat{N}_1 - 3h\sigma_0)}{2Eh(4\widehat{N}_1 - h\sigma_0)} = 0 \quad (174)$$

la cui soluzione consente di calcolare il valore \widehat{N}_1 e quindi \widehat{F}_1 .

Per $F > \widehat{F}_1$, in alcuni tratti di trave, si riconoscono sezioni parzializzate con schiacciamento (figg. 2/g-h), determinando una ulteriore suddivisione degli intervalli $[0, z_0]$ e $[z_1, \frac{1}{2}l]$ (fig. 13).

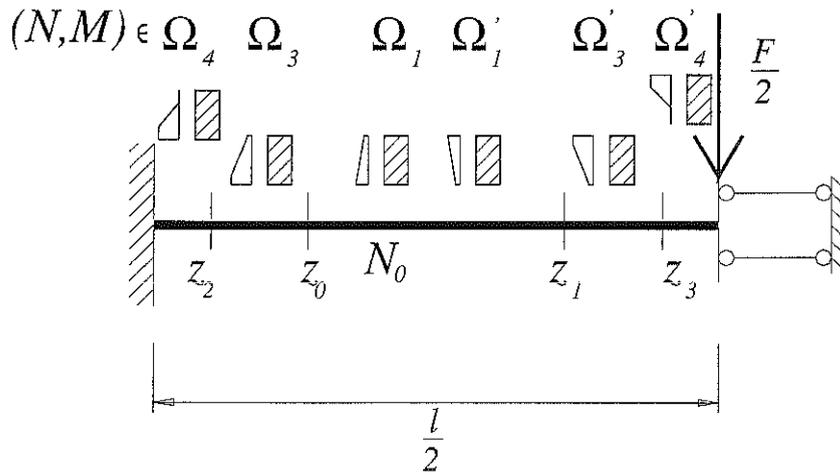


Fig. 13. Caratteristiche della sollecitazione nella trave per $\widehat{F}_1 \leq F \leq \widehat{F}_2$ e $h\sigma_0 < N_0 \leq \frac{1}{2}h\sigma_0$.

Siano z_2 e z_3 i valori di z tali che si abbia

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq z_2 & \quad (N, M) \in \Omega_4, \\ z_2 \leq z \leq z_0 & \quad (N, M) \in \Omega_3, \\ z_0 \leq z \leq z_1 & \quad (N, M) \in \Omega_1, \\ z_1 \leq z \leq z_3 & \quad (N, M) \in \Omega'_1, \\ z_3 \leq z \leq \frac{1}{2}l & \quad (N, M) \in \Omega'_4, \end{aligned}$$

ovvero le coordinate delle sezioni per le quali σ valga 0 per $y = \mp \frac{1}{2}h$, rispettivamente. Allora, detto \widehat{F}_2 il valore di F per il quale M e N nelle sezioni a $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}l$ appartengono alla curva γ e γ' rispettivamente, si ha, per $\widehat{F}_1 \leq F \leq \widehat{F}_2$:

$$w'_1 = \frac{(h\sigma_0 - 2N)\sigma_0}{4E\sqrt{-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0 - 3F\sigma_0 z}} + \frac{\sigma_0}{2E} - \frac{N_0}{Eh}$$

$$v_1'' = \frac{\sigma_0^2}{2E\sqrt{-3N^2 + 2Nh\sigma_0 + 3F\sigma_0 z_0 - 3F\sigma_0 z}}$$

per $0 \leq z \leq z_2$,

$$w_2' = \frac{36b\sigma_0 M^2 - 12M(2N + bh\sigma_0)(N - bh\sigma_0) + h(N - bh\sigma_0)^2(8N + bh\sigma_0)}{9bE(2M + Nh - bh^2\sigma_0)^2} - \frac{N_0}{Eh}$$

$$v_2'' = \frac{8(N - bh\sigma_0)^3}{9bE(-bh^2\sigma_0 + Nh + 2M)^2}$$

per $z_2 \leq z \leq z_0$,

$$w_3' = \frac{N}{Eh} - \frac{N_0}{Eh}$$

$$v_3'' = -\frac{12M}{Eh^3}$$

per $z_0 \leq z \leq z_1$,

$$w_4' = \frac{36b\sigma_0 M^2 + 12M(2N + bh\sigma_0)(bh\sigma_0 - N) + h(N - bh\sigma_0)^2(8N + bh\sigma_0)}{9bE(2M - Nh + bh^2\sigma_0)^2} - \frac{N_0}{Eh}$$

$$v_4'' = \frac{8(N - bh\sigma_0)^3}{9bE(2M - Nh + bh^2\sigma_0)^2}$$

per $z_1 \leq z \leq z_3$,

$$w_5' = \frac{(h\sigma_0 - 2N)\sigma_0}{4E\sqrt{-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0 z_0 + 3F\sigma_0 z}} + \frac{\sigma_0}{2E} - \frac{N_0}{Eh}$$

$$v_5'' = -\frac{\sigma_0^2}{2E\sqrt{-3N^2 + 4Nh\sigma_0 - 3F\sigma_0 z_0 + 3F\sigma_0 z}}$$

per $z_3 \leq z \leq \frac{1}{2}l$

che possiamo risolvere, come nel caso precedente, con le ulteriori condizioni di raccordo in z_2 e z_3 . Si ha la soluzione

$$M(z) = \frac{1}{2}F\left(z - \frac{l}{4}\right),$$

$$z_0 = \frac{l}{4} - \frac{h(N - h\sigma_0)}{3F}, z_1 = \frac{l}{4} + \frac{h(N - h\sigma_0)}{3F}, z_2 = \frac{l}{4} + \frac{h(5N - h\sigma_0)}{3F} - \frac{4N^2}{3F\sigma_0},$$

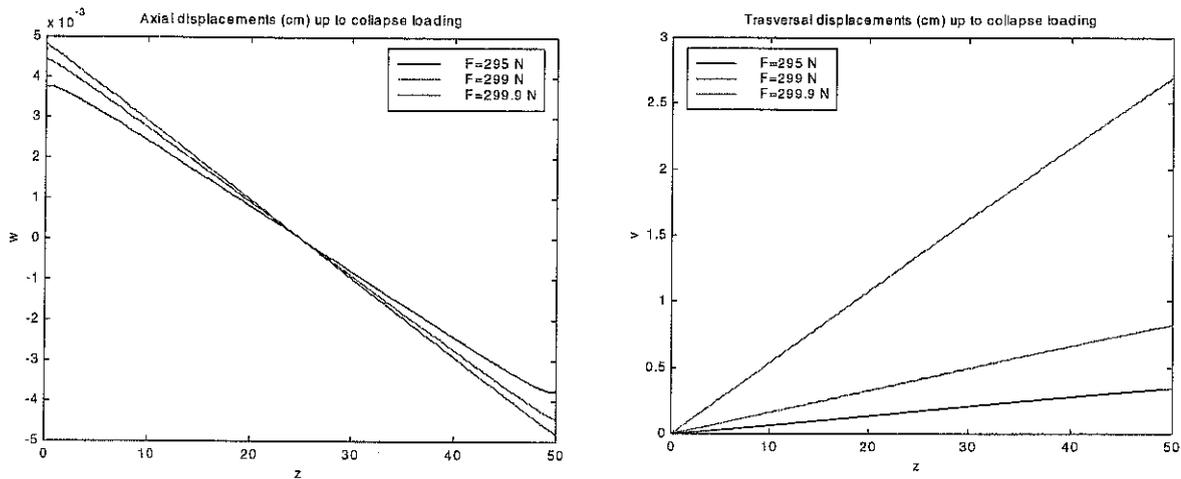


Fig. 16. Spostamento w e v (cm) per diversi valori di F prossimi al collasso.

Nelle figg. (17) e (18) è mostrato il grafico dello spostamento assiale e trasversale per un valore fissato del carico $F = 200$ N, al variare della precompressione N_0 .

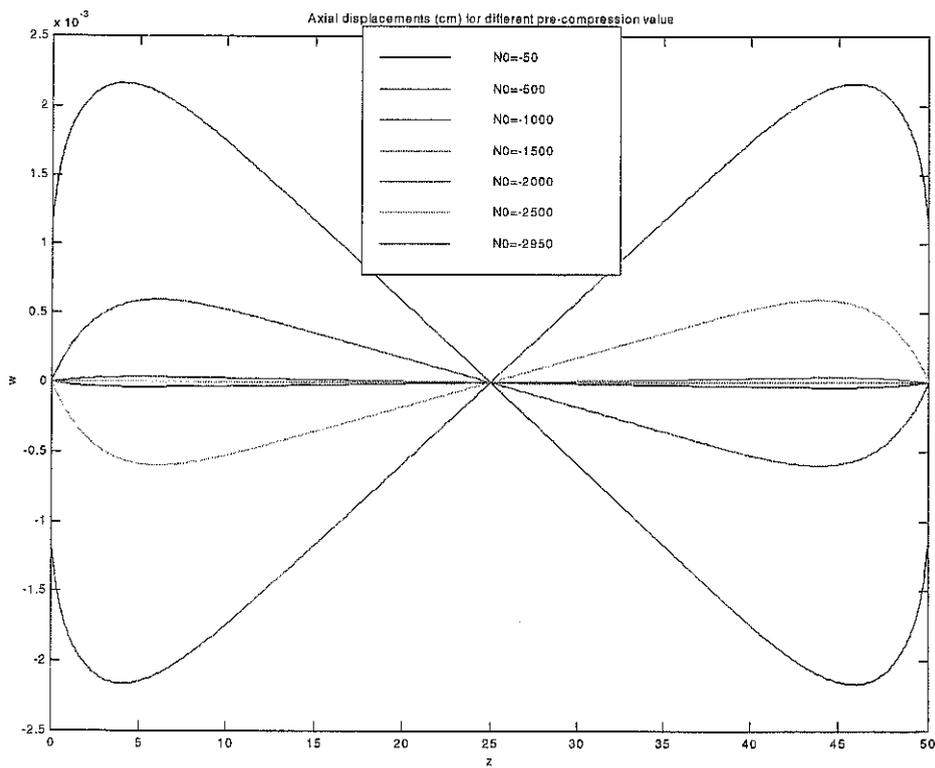


Fig. 17. Spostamento assiale w (cm) per un valore fissato di F e diversi valori di precompressione.

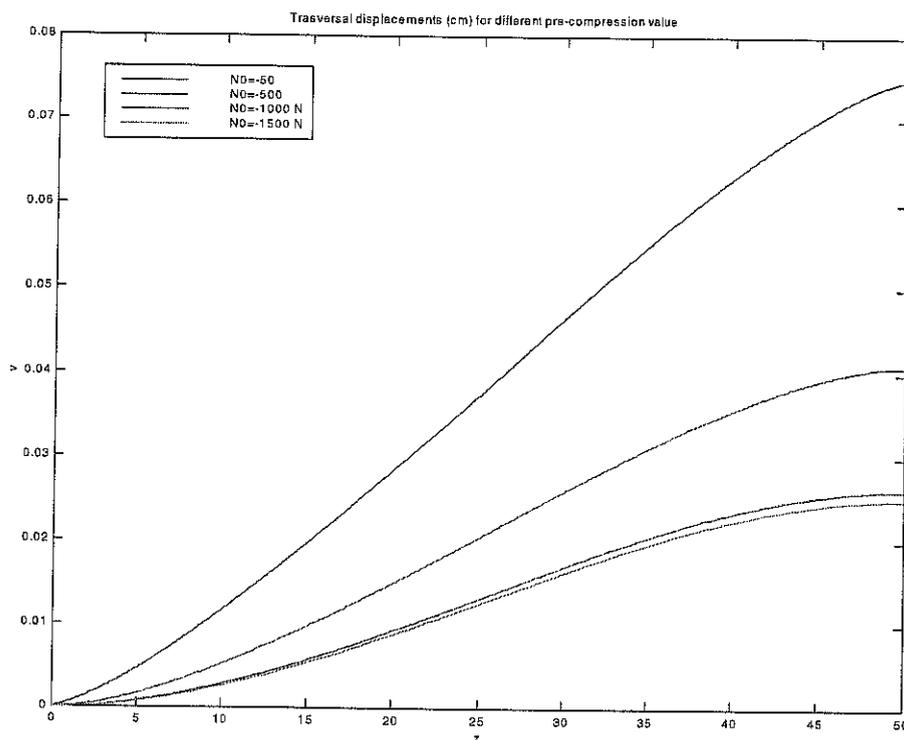


Fig. 18. Spostamento trasversale v (cm) per un valore fissato di F e diversi valori di precompressione.

In vista dei valori riportati nelle tabelle, per $N_0 = -50$ N e con un carico $F = 200$ N, la trave risulta suddivisa in cinque tratti e, all'incastro e sotto il carico, ci sono le cerniere plastiche; allora il campo di spostamento, disegnato nelle figure sopra, è dato dalle relazioni (154) – (163); per $N_0 = -500$ N, la trave è ancora suddivisa in cinque tratti ma all'incastro e sotto il carico non si hanno più cerniere plastiche; in questo caso quindi il campo spostamento è dato dalle relazioni (142) – (151), una volta calcolato il valore di N con l'aiuto della (141); per $N_0 = -1000$ N, la trave è suddivisa in tre tratti e il campo di spostamento è dato dalle relazioni (87) – (92), una volta trovato il valore di N con l'aiuto della (86); infine, per $N_0 = -1500$ N, pari a $\frac{1}{2}h\sigma_0$, la soluzione si trova nell'ambito dell'elasticità lineare. Per questo valore della precompressione si ottiene la massima rigidezza della trave.

Aumentando ancora il valore della precompressione, per $N_0 = -2000$ N, la trave è di nuovo suddivisa in tre tratti e il campo spostamento è dato dalle relazioni (166) – (171), trovata la forza normale N in vista della relazione (171); per $N_0 = -2500$ N la soluzione è quella descritta dalle relazioni (175) – (184) in vista della forza normale N data dalla (185); infine, per $N_0 = -2950$ N, analogamente al caso di precompressione $N_0 = -50$ N, la trave risulta divisa in cinque tratti, vincolata con tre cerniere per $z = 0, \frac{1}{2}l$ ed l ; la soluzione è allora data dalle relazioni (188)–(197).

Si osservi allora che per $N_0 = 0$ e $N_0 = h\sigma_0$, la trave non è in equilibrio con alcun carico trasversale; per $|N_0|$ crescente la trave risulta via via più rigida fino alla sua rigidezza massima che si raggiunge per $N_0 = \frac{1}{2}h\sigma_0$; per $|N_0|$ ancora crescente la trave perde di rigidezza con la stessa legge con la quale l'aveva acquisita per N_0 tendente a $\frac{1}{2}h\sigma_0$.

Si osservi inoltre che, per valori di precompressione simmetrici rispetto al valore $\frac{1}{2}h\sigma_0$, il valore della forza normale che soddisfa le equazioni (86) e (171), (141) e (185) è simmetrico rispetto al valore $\frac{1}{2}h\sigma_0$ mentre i valori di F_i e \hat{F}_i , $i = 0, 2$; sono uguali; inoltre, il grafico dello spostamento w è simmetrico rispetto all'asse z

pertanto, detto

$$a = \frac{Nh}{12Nh + 3Fl} \quad (199)$$

la relazione (198), all'infinito, diventa

$$3 - 16a + 4\log(8a) = 0$$

che ammette le due soluzioni

$$a_1 = 0.082 \text{ e } a_2 = 0.564.$$

Dalla (199) si ricava che

$$N = \frac{3Fl}{h} \frac{a}{1 - 12a}$$

e poiche' il valore di N deve essere negativo, solo il valore $a_2 = 0.564$ è soluzione. Allora, per F che tende all'infinito,

$$\frac{N}{F} \rightarrow \frac{3l}{h} \frac{a}{1 - 12a}$$

e quindi

$$\frac{M_0}{N} \rightarrow h \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24a} \right) \approx 0.43 h$$

ovvero, per F che tende all'infinito, l'eccentricità nella sezione d'incastro e sotto il carico tende, in modulo, ad un valore più piccolo di $\frac{1}{2}h$, indipendentemente dal valore di h .

References

- [1] G. Del Piero, Constitutive equations and compatibility conditions of the external loads for linear elastic masonry-like materials, *Meccanica* **24**: 150-162 (1989).
- [2] M. Lucchesi, C. Padovani, N. Zani, Masonry-like solids with bounded compressive strength, *Int. J. Solids Structures*. Vol. **33**, No. **14**: 1961-1994 (1996).
- [3] S. Degl'Innocenti S., M. Lucchesi, C. Padovani, A. Pagni, G. Pasquinelli, N. Zani, Dynamical analysis of masonry pillars, Third International Congress on "Science and Technology for the Safeguard of Cultural Heritage in the Mediterranean Basin", Alcalá de Henares, Spain, 9-14 July, (2001).
- [4] B. L. Pintucchi, Vibrazioni trasversali di elementi monodimensionali non resistenti a trazione in direzione longitudinale, Dottorato di Ricerca in Storia delle Scienze e delle Tecniche Costruttive, XIII ciclo, Università degli Studi di Firenze (2000).

- [5] A. De Falco, M. Lucchesi, Stability of beams made of no-tension materials with limited compressive strength, IASS-IACM 2000, (2000).
- [6] D. Orlandi, Analisi non lineare di strutture ad arco in muratura, Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture, VII ciclo, Università degli Studi di Firenze (1999).

