

PROCEDURA LAGRANGIANA PER ANALISI DI CORPI
IPERELASTICI REALIZZATO NEL PROGRAMMA NOSA

P. GUIDOTTI
G. PASQUINELLI

RAPPORTO INTERNO C86-14

C.N.R.
ISTITUTO CUCE

Sommario

In questa nota si descrive la procedura numerica "Lagrangiana totale", realizzata nel programma NOSA per lo studio della risposta di materiali elastici in presenza di grandi deformazioni.

Derivata dall'equazione del moto la formulazione integrale del problema al bordo, si ricava la relazione incrementale usata nella procedura di calcolo.

Viene quindi illustrata l'applicazione del metodo degli elementi finiti e la procedura numerica di integrazione del sistema di equazioni differenziali del 1° ordine così ottenuto.

Simbologia

- \mathcal{B}_0 = configurazione di riferimento del corpo
- $\mathcal{B}(\lambda)$ = configurazione deformata del corpo
- b_0 = forza di volume
- Div = divergenza materiale
- E = tensore di deformazione di Green-S. Venant
- F = gradiente di deformazione
- H = gradiente di spostamento
- n = normale esterna su $\partial \mathcal{B}_0$
- p = posizione di un punto materiale nella configurazione di riferimento
- S = secondo tensore di Piola Kirchhoff
- ∇v = gradiente materiale del vettore v
- C = modulo tangente

1) Equazioni che governano il problema.

Sia \mathcal{B}_0 un corpo nella sua configurazione di riferimento

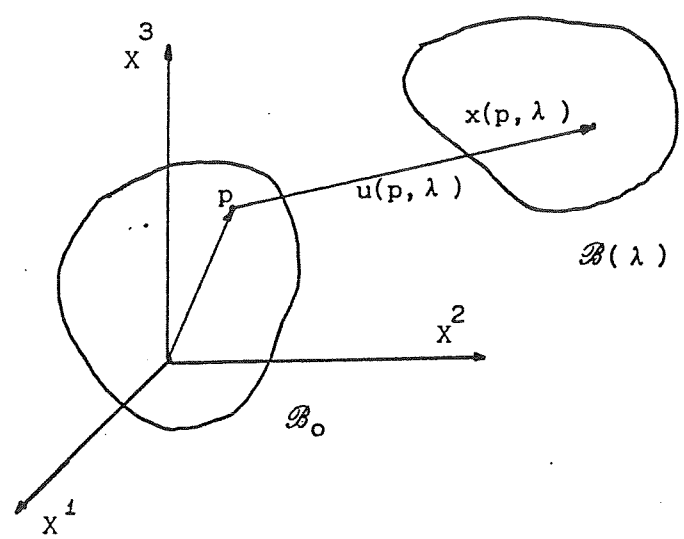


fig. 1

siano individuate sulla frontiera due porzioni tali che

$$1) \quad \partial \mathcal{B}_1 \cup \partial \mathcal{B}_2 = \partial \mathcal{B}_0 \quad \text{e} \quad \partial \mathcal{B}_1 \cap \partial \mathcal{B}_2 = \emptyset .$$

Siano inoltre assegnate le condizioni al bordo

$$\begin{aligned}
 & u(p, \lambda) = u_0(p, \lambda) \quad , \text{ su } \partial \mathcal{B}_1 \times [0,1] ; \\
 2) \quad & F(p, \lambda) S(p, \lambda) n(p) = \hat{s} \quad , \text{ su } \partial \mathcal{B}_2 \times [0,1] ; \\
 & b_0(p, \lambda) = \hat{b}_0(p, \lambda) \quad , \text{ su } \mathcal{B}_0 \times [0,1] ;
 \end{aligned}$$

dove λ è un parametro definito sull'intervallo $[0,1]$ di \mathbb{R} e S il secondo tensore di Piola Kirchhoff, b il campo di forze di volume, u il campo di spostamento ed \hat{s} le forze di superficie.

Al variare di λ si ottiene una famiglia di configurazioni deformate $\mathcal{B}(\lambda)$.

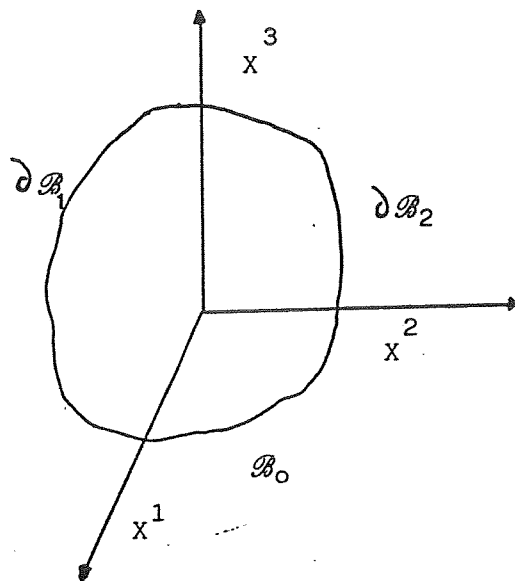


fig. 2

I punti di ciascuna configurazione $\mathcal{B}(\lambda)$ sono individuate dall'applicazione

$$3) \quad x(p, \lambda) : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}(\lambda) ,$$

che supponiamo di classe C^1 su $\mathcal{B}_0 \times [0,1]$, invertibile e tale da conservare l'orientamento delle curve, i. e. $\forall x > 0$.

Conosciuta la legge costitutiva del materiale

$$4) \quad S(p, \lambda) = \hat{S}(E(p, \lambda)) ,$$

ci poniamo il problema di determinare lo spostamento $u(p, \lambda)$ definito su $\mathcal{B}_0 \times [0,1]$ a valori in \mathcal{E} , tale che verifichi

- 5 a) $\text{Div } F(p, \lambda) S(p, \lambda) + b_0(p, \lambda) = 0$, su \mathcal{B}_0 ;
- 5 b) $F(p, \lambda) S(p, \lambda) n(p) = \hat{s}$, su $\partial \mathcal{B}_1$;
- 5 c) $u(p, \lambda) = u_0(p, \lambda)$, su $\partial \mathcal{B}_2$;
- 5 d) $b_0(p, \lambda) = \hat{b}_0(p, \lambda)$, su \mathcal{B}_0 ;

Moltiplicando entrambi i membri della 5a) per un campo vettoriale $v^*(p)$, definito su \mathcal{B}_0 e soddisfacente alle condizioni al bordo 5c), si ha

$$6) \quad \int_{\mathcal{B}_0} v^*(p) [\text{Div } F(p, \lambda) S(p, \lambda) + b_0(p, \lambda)] dV = 0.$$

Ricordando che [3] :

$$7) \quad \int_{\partial\Omega} v \cdot Bn \, dA = \int_{\Omega} (v \cdot \text{Div } B + B \cdot \nabla v) dV,$$

dalla 6) si ottiene

$$8a) \quad \int_{\mathcal{B}_0} F(p, \lambda) S(p, \lambda) \cdot \nabla v^*(p) dV - \int_{\mathcal{B}_0} v^*(p) \cdot b_0(p, \lambda) dV - \int_{\partial\mathcal{B}_1} v^*(p) \cdot F(p, \lambda) S(p, \lambda) n(p) dA = 0$$

od anche

$$8b) \quad \int_{\mathcal{B}_0} F^T(p, \lambda) \nabla v^*(p) \cdot S(p, \lambda) dV - \int_{\mathcal{B}_0} v^*(p) \cdot b_0(p, \lambda) dV - \int_{\partial\mathcal{B}_1} v^*(p) \cdot F(p, \lambda) S(p, \lambda) n(p) dA = 0$$

La relazione precedente è non lineare: è necessario derivare una relazione incrementale che possa essere usata nelle procedure di calcolo.

Sia λ_i il valore del parametro corrente cui corrisponde una configurazione deformata $\mathcal{B}(\lambda_i)$ caratterizzata da

$$9) \quad u(p, \lambda_i), E(p, \lambda_i), S(E(p, \lambda_i)).$$

Differenziamo rispetto al parametro λ la b) si ottiene

$$10) \quad \int_{\mathcal{B}_0} F^T(p, \lambda_i) \nabla v^*(p) \cdot \dot{S}(E(p, \lambda_i)) dV + \int_{\mathcal{B}_0} \dot{H}^T(p, \lambda_i) \nabla v^*(p) \cdot S(E(p, \lambda_i)) dV + \\ - \int_{\mathcal{B}_0} v^*(p) \cdot \dot{b}_0(p, \lambda_i) dV + \\ - \int_{\partial\mathcal{B}_1} [v^*(p) \cdot \dot{H}(p, \lambda_i) S(p, \lambda_i) n(p) + v^*(p) F(p, \lambda_i) \dot{S}(p, \lambda_i) n(p)] dA = 0,$$

dove con il punto soprascritto indichiamo la derivata rispetto al parametro λ .

(1) Le condizioni di regolarità richieste alle funzioni che appaiono in 6 possono essere assai più deboli; se confronti ad esempio [1].

La derivata del secondo tensore di Piola-Kirchhoff $\dot{S}(E(p, \lambda))$ è

$$11) \quad \dot{S} = \frac{\partial}{\partial E} \hat{S}(E(p, \lambda)) \Big|_{E(p, \lambda_i)} \frac{E(p, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda = \lambda_i} = \mathcal{C}(E(p, \lambda_i)) \dot{E}(p, \lambda_i),$$

essendo \mathcal{C} un tensore del 4° ordine in seguito indicato come tensore di elasticità.

Il IV termine dell'equazione 10), che esprime il lavoro delle forze di superficie deve essere espresso in funzione delle forze esterne assegnate.

Sia assegnata una pressione

$$12) \quad T(x, \lambda) m(x, \lambda) = - \pi_0(\lambda) m(x, \lambda),$$

dove $m(x)$ è la normale esterna alla superficie del corpo nella configurazione attuale $\mathcal{B}(\lambda)$. Allora si ha

$$13) \quad F(p, \lambda) S(p, \lambda) n = - \pi_0(\lambda) (\det F(p, \lambda)) F^T(p, \lambda) n(p),$$

da cui derivando rispetto al parametro λ , e trascurando gli argomenti della funzione, si ha

$$14) \quad \dot{H}Sn + \dot{F}Sn = - \dot{\pi}_0(\det F) F^{-T} n + \pi_0(\det F) \text{tr}(F \dot{F}^{-1} + F^{-T} \dot{F}^T) F^{-T} n + \\ - \pi_0(\det F) F^{-T} \dot{F} F^{-T} n.$$

L'espressione a secondo membro può essere sostituita nella 10).

Nell'ipotesi, assunta nello sviluppo del programma, che le forze non mutino direzione nè punto di applicazione durante il processo di deformazione si ha

$$15) \quad \int_{\partial \mathcal{B}_1} v^*(p) \cdot q(p, \lambda) \nu(p) dA.$$

dove $q(p, \lambda)$ è il modulo e $\nu(p)$ il versore del vettore forza per unità di superficie.

Derivando rispetto al parametro λ otteniamo

$$16) \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\partial \mathcal{B}_1} v^*(p) \cdot q(p, \lambda) \nu(p) \, dA = \int_{\partial \mathcal{B}_1} v^*(p) \cdot \dot{q}(p, \lambda) \nu(p) \, dA.$$

Si ha quindi la seguente relazione incrementale

$$17) \int_{\mathcal{B}_0} F^T(p, \lambda_i) \nabla v^*(p) \cdot \mathcal{C}(E(p, \lambda_i)) \dot{E}(p, \lambda_i) \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \dot{H}^T(p, \lambda_i) \nabla v^*(p, \lambda_i) \cdot S(E(p, \lambda_i)) \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} v^*(p) \cdot \dot{b}_0(p, \lambda_i) \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_1} v^*(p) \cdot \dot{q}(p, \lambda_i) \nu(p) \, dA.$$

2) Applicazione del metodo degli elementi finiti

Approssimata la configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 con n^e elementi \mathcal{D}^k ed assegnate su ognuno di essi opportune funzioni interpolanti

$$1) \quad N_i^k(p) : \mathcal{D}^k \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq k \leq n^e ,$$

ciascuna associata all'iesimo nodo p_i , approssimiamo il campo di spostamenti $u(p, \lambda)$ su \mathcal{B}_0 mediante la seguente formula di interpolazione

$$2) \quad u(p, \lambda) = \sum_{i=1}^n N_i^k(p) a_i(p_i, \lambda) \quad p \in \mathcal{D}^k \quad , \quad 1 \leq k \leq n^e ,$$

dove con $a_i(p_i, \lambda)$ indichiamo lo spostamento del nodo i -esimo dell'elemento \mathcal{D}^k . Al variare del parametro λ le configurazioni deformate del corpo sono descritte da

$$3) \quad x(p, \lambda) = p + u(p, \lambda) = p + \sum_{i=1}^n N_i^k(p) a_i(p_i, \lambda) \quad , \quad p \in \mathcal{D}^k .$$

Si richiede che la funzione approssimante sia di classe C_0 su $\bigcup_{k=1}^{n^e} \mathcal{D}^k$;

noi supponiamo che le funzioni approssimanti dell'elemento utilizzato nello sviluppo del codice di calcolo soddisfino a questo requisito di continuità.

Useremo per lo sviluppo delle matrici un elemento tridimensionale, isoparametrico a 20 nodi (fig. 3). Con questo elemento assegnato un cubo Ω di \mathbb{R}^3 :

$$4) \quad \Omega = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) : -1 \leq \xi \leq 1 ; -1 \leq \eta \leq 1 ; -1 \leq \zeta \leq 1 \right\}$$

si definisce un'applicazione $g: \Omega \rightarrow \mathcal{D}^k$ mediante la

$$5) \quad p = \sum_{i=1}^n N_i^k(\xi, \eta, \zeta) p_i$$

dove le N_i^k sono le funzioni di fig. 3.

Si richiede che l'applicazione g sia di classe C^1 in ogni \mathcal{D}^k , invertibile e tale da conservare l'orientamento delle curve, i.e. $\nabla g \cong 0$.

Sotto queste condizioni i campi $u(p, \lambda)$ ed $x(p, \lambda)$ definiti su $\mathcal{D}^k \times [0,1]$ hanno un'unica rappresentazione su $\Omega \times [0,1]$ e sono approssimati da

$$6) \quad u(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = \sum_{i=1}^n N_i^k(\xi, \eta, \zeta) a_i(p_i, \lambda),$$

$$7) \quad x(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = p + u(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = \sum_{i=1}^n N_i^k(\xi, \eta, \zeta) (p_i + a_i(p_i, \lambda)).$$

Eguualmente la funzione test è approssimata come

$$8) \quad v(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = \sum_{i=1}^n N_i^k(\xi, \eta, \zeta, \lambda) v_i^*(p_i, \lambda),$$

dove con $v_i^*(p_i, \lambda)$ indichiamo il valore della funzione test nel nodo i -esimo dell'elemento \mathcal{D}^k .

Nel seguito considereremo le 6), 7), 8), definite su Ω , pertanto ove non esistono ambiguità non indicheremo gli argomenti delle funzioni. Scriveremo ad esempio

$$9) \quad u = \sum_{i=1}^n N_i^k a_i.$$

La precedente può essere posta nella seguente forma matriciale

$$10) \quad \{u\} = [N_1^k, N_i^k, N_n^k] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = [N] \{a\},$$

dove

$$11) \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}; \quad \{a_i\} = \begin{Bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \end{Bmatrix}; \quad [N_i^k] = \begin{bmatrix} N_i^k & 0 & 0 \\ 0 & N_i^k & 0 \\ 0 & 0 & N_i^k \end{bmatrix}.$$

Le singole componenti del vettore a_i sono dette gradi di libertà del nodo i .

Il gradiente di spostamento H , la sua derivata rispetto a λ e il gradiente ∇v^* , che indicheremo come H^* , sono espressi da

$$H_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial X^j} = \sum_{e=1}^h \frac{\partial N_e^k}{\partial X^j} a_e^i,$$

12)

$$\dot{H}_{ij} = \frac{\partial \dot{u}^i}{\partial X^j} = \sum_{e=1}^h \frac{\partial N_e^k}{\partial X^j} \dot{a}_e^i,$$

$$H^*_{ij} = \frac{\partial v^{*i}}{\partial X^j} = \sum_{e=1}^h \frac{\partial N_e^k}{\partial X^j} v_e^{*i}.$$

Le componenti del gradiente di spostamento sono legate alle velocità nodali dalla seguente espressione.

$$13) \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \\ H_{31} \\ H_{12} \\ H_{22} \\ H_{32} \\ H_{13} \\ H_{23} \\ H_{33} \end{bmatrix} = [G_1, \dots, G_i, \dots, G_n] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \cdot \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_i \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{array} \right\} = [G] \{a\},$$

dove

$$14) \quad [G_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x^1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

Nella 14) intervengono le derivate delle funzioni approssimanti $\frac{\partial N_i^k}{\partial X^i}$ rispetto alla configurazione di riferimento, esse si ottengono da

$$15) \quad \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial X_1} ; \frac{\partial N_i}{\partial X_2} ; \frac{\partial N_i}{\partial X_3} \right\} = \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} ; \frac{\partial N_i}{\partial \eta} ; \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \right\} [J_0]^{-1},$$

essendo $[J_0]$ la matrice di Jacobi dell'applicazione \hat{g} definita in 5).

Abbiamo inoltre:

$$\begin{bmatrix} \dot{H}_{11} \\ \dot{H}_{22} \\ \dot{H}_{31} \\ \dot{H}_{12} \\ \dot{H}_{22} \\ \dot{H}_{32} \\ \dot{H}_{13} \\ \dot{H}_{23} \\ \dot{H}_{33} \end{bmatrix} = [G] \{ \dot{a} \}; \quad \begin{bmatrix} H^*_{11} \\ H^*_{21} \\ H^*_{31} \\ H^*_{12} \\ H^*_{22} \\ H^*_{32} \\ H^*_{13} \\ H^*_{23} \\ H^*_{33} \end{bmatrix} = [G] \{ v^* \}.$$

Il gradiente di deformazione F si ottiene da

$$17) \quad \{F\} = \{H\} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nel seguito assegnato un tensore simmetrico A indicheremo con $\{A\}$ il vettore a 6 componenti così definito:

$$18) \quad A_1 = A_{11} ; A_2 = A_{22} ; A_3 = A_{33} ; A_4 = 2A_{12} ; A_5 = 2A_{23} ; A_6 = 2A_{33} ;$$

Indichiamo invece con $\{S\}$ e $\{\dot{S}\}$ i seguenti vettori associati al secondo tensore di Piola-Kirchoff S ed alla sua variazione \dot{S} :

$$S_1 = S_{11} ; S_2 = S_{22} ; S_3 = S_{33} ; S_4 = S_{12} ; S_5 = S_{23} ; S_6 = S_{13} ;$$

19)

$$\dot{S}_1 = \dot{S}_{11} ; \dot{S}_2 = \dot{S}_{22} ; \dot{S}_3 = \dot{S}_{33} ; \dot{S}_4 = \dot{S}_{12} ; \dot{S}_5 = \dot{S}_{23} ; \dot{S}_6 = \dot{S}_{13} ;$$

Nota:

L'uso della forma vettoriale per rappresentare tensori del secondo ordine permette nei calcoli di calcolo di risparmiare sia un'occupazione di memoria che in tempo calcolo.

La variazione del tensore di deformazione,

$$20) \quad \dot{E} = \frac{1}{2} (\dot{H}^T F + F^T \dot{H}) ,$$

può essere finalmente espressa verificando che un tensore simmetrico A definito da

$$21) \quad A = \frac{1}{2} (B + B^T) ,$$

ha la seguente rappresentazione vettoriale

$$22) \quad \{A^T\} = \{B_{11}, B_{22}, B_{33}, (B_{12} + B_{21}), (B_{23} + B_{32}), (B_{13} + B_{31})\} .$$

Essendo

$$[\dot{H}^T F] = \begin{bmatrix} \dot{H}_{11} & \dot{H}_{21} & \dot{H}_{31} \\ \dot{H}_{12} & \dot{H}_{22} & \dot{H}_{32} \\ \dot{H}_{13} & \dot{H}_{23} & \dot{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}$$

$$23) [\dot{H}^T F] = \begin{bmatrix} \dot{H}_{11} F_{11} + \dot{H}_{21} F_{21} + \dot{H}_{31} F_{31} & \dot{H}_{11} F_{12} + \dot{H}_{21} F_{22} + \dot{H}_{31} F_{32} & \dot{H}_{11} F_{13} + \dot{H}_{21} F_{23} + \dot{H}_{31} F_{33} \\ \dot{H}_{12} F_{11} + \dot{H}_{22} F_{21} + \dot{H}_{32} F_{31} & \dot{H}_{12} F_{12} + \dot{H}_{22} F_{22} + \dot{H}_{32} F_{32} & \dot{H}_{12} F_{13} + \dot{H}_{22} F_{23} + \dot{H}_{32} F_{33} \\ \dot{H}_{13} F_{11} + \dot{H}_{23} F_{21} + \dot{H}_{33} F_{31} & \dot{H}_{13} F_{12} + \dot{H}_{23} F_{22} + \dot{H}_{33} F_{32} & \dot{H}_{13} F_{13} + \dot{H}_{23} F_{23} + \dot{H}_{33} F_{33} \end{bmatrix}$$

mediante la 22) abbiamo

$$24) \left\{ \dot{E} \right\} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \\ 2 \dot{E}_{12} \\ 2 \dot{E}_{23} \\ 2 \dot{E}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{H}_{11}^F_{11} + \dot{H}_{21}^F_{21} + \dot{H}_{31}^F_{31} \\ \dot{H}_{12}^F_{12} + \dot{H}_{22}^F_{22} + \dot{H}_{32}^F_{32} \\ \dot{H}_{13}^F_{13} + \dot{H}_{23}^F_{23} + \dot{H}_{33}^F_{33} \\ \dot{H}_{11}^F_{12} + \dot{H}_{21}^F_{22} + \dot{H}_{31}^F_{32} + \dot{H}_{12}^F_{11} + \dot{H}_{22}^F_{21} + \dot{H}_{32}^F_{31} \\ \dot{H}_{12}^F_{13} + \dot{H}_{22}^F_{23} + \dot{H}_{32}^F_{33} + \dot{H}_{13}^F_{12} + \dot{H}_{23}^F_{22} + \dot{H}_{33}^F_{32} \\ \dot{H}_{11}^F_{13} + \dot{H}_{21}^F_{23} + \dot{H}_{31}^F_{33} + \dot{H}_{13}^F_{11} + \dot{H}_{23}^F_{21} + \dot{H}_{33}^F_{31} \end{pmatrix}$$

Dalle 12), 16), 17), la 24) può essere posta nella seguente forma matriciale.

$$25) \left\{ \dot{E} \right\} = \left[B_1, \quad B_i, \quad B_n \right] \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \vdots \\ \dot{a}_i \\ \vdots \\ \dot{a}_n \end{pmatrix} = [B] \left\{ \dot{a} \right\},$$

dove

$$26) [B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + 1 & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \frac{\partial u^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - (\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + 1) & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \frac{\partial u^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^3} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^3} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^3} \frac{\partial u^3}{\partial x^3} + 1 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \frac{\partial u^3}{\partial x^2} + \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \frac{\partial u^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} + \frac{\partial N_i}{\partial x^3} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} + \frac{\partial N_i}{\partial x^3} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \frac{\partial u^3}{\partial x^3} + \frac{\partial N_i}{\partial x^3} \frac{\partial u^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^3} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^3} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} & ; & \frac{\partial N_i}{\partial x^3} \frac{\partial u^3}{\partial x^1} + \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

Su ogni singolo elemento \mathcal{D}^k approssimiamo l'equazione linearizzata.

$$27) \int_{\mathcal{D}^k} \mathbf{F}^T \mathbf{H}^* \dot{\mathbf{S}} \, dV + \int_{\mathcal{D}^k} \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H}^* \mathbf{S} \, dV - \int_{\mathcal{D}^k} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{b}_o \, dV - \int_{\partial \mathcal{D}^k} \mathbf{v}^* \cdot \dot{\mathbf{g}} \, dA = 0 ,$$

mediante le relazioni precedentemente ricavate.

I Termine

La legge costitutiva del materiale, che supponiamo assegnata, fornisce per ogni λ , la seguente relazione

$$28) \quad \{\dot{\mathbf{S}}\} = [\mathcal{E}] \dot{\mathbf{E}} ,$$

dove con $[\mathcal{E}]$ indichiamo il modulo elastico tangente, ricavato dal tensore di elasticità istantaneo.

Si osservi che per le proprietà del prodotto scalare tra tensori

$$29) \quad \mathbf{F}^T \mathbf{H}^* \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{H}^* + \mathbf{H}^{*T} \mathbf{F}) : \mathbf{S} .$$

Pertanto dalla 20) e 24), possiamo approssimare il primo termine come

$$30) \quad \int_{\mathcal{D}^k} \mathbf{F}^T \mathbf{H}^* \dot{\mathbf{S}} \, dV = \{\mathbf{v}^*\}^T \int_{\mathcal{D}^k} [\mathbf{B}]^T [\mathcal{E}] [\mathbf{B}] \, dV \{\dot{\mathbf{a}}\} = \{\mathbf{v}^*\}^T [\mathbf{K}_1] \{\dot{\mathbf{a}}\} .$$

Oss: La matrice così ottenuta è uguale alla somma di due matrici $[K_L]$ e $[K_{NL}]$ indicate in letteratura [2] rispettivamente come matrice incrementale o geometrica e matrice di spostamento iniziale.

Essi si ottengono suddividendo il tensore velocità di deformazione \dot{E} in due parti:

$$31) \quad \dot{E} = \frac{1}{2} (\dot{H}^T + \dot{H} + \dot{H}^T H + H^T \dot{H}) = \frac{1}{2} (\dot{H}^T + \dot{H}) + \frac{1}{2} (\dot{H}^T H + H^T \dot{H}) = \dot{E}_L + \dot{E}_{NL}$$

$$32) \quad \{\dot{E}\} = ([B_L]^T + [B_{NL}]) \{\dot{a}\}$$

Da cui

$$33) \quad \int_{\mathcal{Q}^k} F^T H^* \dot{S} \, dV = \{v^*\} \int_{\mathcal{Q}^k} [B_L]^T [\mathcal{C}] [B_L] \, dV \{\dot{a}\} + \\ + \int_{\mathcal{Q}^k} ([B_L]^T [\mathcal{C}] [B_{NL}] + [B_{NL}]^T [\mathcal{C}] [B_L] + [B_{NL}]^T [\mathcal{C}] [B_{NL}]) \, dV \{\dot{a}\} = \\ = \{v^*\}^T [K_L] \{\dot{a}\} + \{v^*\}^T [K_{NL}] \{\dot{a}\}.$$

In alcuni codici di calcolo nell'ipotesi di grandi spostamenti, ma in presenza di piccole deformazioni viene omissso il termine $[B_{NL}]^T [\mathcal{C}] [B_{NL}]$.

II Termine

Dalla definizione di prodotto scalare si ha

$$\begin{aligned}
 34) \quad \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{S} &= t_2 (\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}) = \\
 &= S_{11} \dot{H}_{11}^* + S_{12} \dot{H}_{22}^* + S_{13} \dot{H}_{33}^* + S_{11} \dot{H}_{21}^* + S_{12} \dot{H}_{21}^* + S_{13} \dot{H}_{21}^* + \\
 &+ S_{11} \dot{H}_{31}^* + S_{12} \dot{H}_{32}^* + S_{13} \dot{H}_{33}^* + S_{21} \dot{H}_{11}^* + S_{22} \dot{H}_{12}^* + S_{23} \dot{H}_{13}^* + \\
 &+ S_{21} \dot{H}_{21}^* + S_{22} \dot{H}_{22}^* + S_{23} \dot{H}_{23}^* + S_{31} \dot{H}_{31}^* + S_{32} \dot{H}_{32}^* + S_{33} \dot{H}_{33}^* + \\
 &+ S_{31} \dot{H}_{11}^* + S_{32} \dot{H}_{12}^* + S_{33} \dot{H}_{13}^* + S_{31} \dot{H}_{21}^* + S_{32} \dot{H}_{22}^* + S_{33} \dot{H}_{23}^* + \\
 &+ S_{32} \dot{H}_{32}^* + S_{33} \dot{H}_{33}^* .
 \end{aligned}$$

Con opportune manipolazioni la somma precedente può essere ottenuta da

$$\{ H_{11}^*, H_{21}^*, H_{31}^*, H_{12}^*, H_{22}^*, H_{32}^*, H_{13}^*, H_{23}^*, H_{33}^* \}$$

$$\begin{bmatrix}
 S_{11} & 0 & 0 & S_{12} & 0 & 0 & S_{13} & 0 & 0 \\
 0 & S_{11} & 0 & 0 & S_{12} & 0 & 0 & S_{13} & 0 \\
 0 & 0 & S_{11} & 0 & 0 & S_{12} & 0 & 0 & S_{13} \\
 S_{12} & 0 & 0 & S_{22} & 0 & 0 & S_{23} & 0 & 0 \\
 0 & S_{12} & 0 & 0 & S_{22} & 0 & 0 & S_{23} & 0 \\
 0 & 0 & S_{12} & 0 & 0 & S_{22} & 0 & 0 & S_{23} \\
 S_{13} & 0 & 0 & S_{23} & 0 & 0 & S_{33} & 0 & 0 \\
 0 & S_{13} & 0 & 0 & S_{23} & 0 & 0 & S_{23} & 0 \\
 0 & 0 & S_{13} & 0 & 0 & S_{23} & 0 & 0 & S_{33}
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \dot{H}_{11} \\
 \dot{H}_{21} \\
 \dot{H}_{31} \\
 \dot{H}_{12} \\
 \dot{H}_{22} \\
 \dot{H}_{32} \\
 \dot{H}_{13} \\
 \dot{H}_{23} \\
 \dot{H}_{33}
 \end{pmatrix}
 =$$

$$= \{ H^* \}^T [Q] \{ \dot{H} \}$$

Ma dalle 16) abbiamo

$$36) \int_{\mathcal{D}^k} \dot{H}^T H^* \cdot S \, dV = \{v^*\} \int_{\mathcal{D}^k} [G]^T [Q] [G] \, dV \{a\} = \{v^*\}^T [K_2] \{a\}.$$

La matrice $[K_2]$ è detta matrice degli stress iniziali.

III Termine

Mediante l'uso della 8) si ha

$$37) \quad \{v\}^T \int_{\mathcal{D}^k} [N]^T \{\dot{b}_o\} \, dV = \{v\}^T \{\dot{f}_b\}$$

essendo $\{\dot{f}_b\}$ il vettore delle forze nodali equivalenti.

IV Termine

Nell'ipotesi precedentemente assunta che le forze non mutino direzione né punto di applicazione durante il processo di deformazione si ha

$$38) \int_{\partial \mathcal{D}^k} v^* \cdot \dot{g} \, \nu \, dA = \{v^*\}^T \int_{\partial \mathcal{D}^k} [N]^T \cdot \dot{g} \, \nu \, dA = \{v\}^T \{\dot{f}_s\}.$$

Sostituendo in 27) le 30), 36), 37), 38) si ottiene per ogni elemento

$$39) \quad \{v^*\}^T [K_1 + K_2] \{\dot{a}\} - \{v^*\}^T \{f_b\} - \{v^*\}^T \{\dot{f}_s\} = 0$$

Eliminata dall'equazione precedente la funzione arbitraria $\{v^*\}^T$, mediante l'operazione di assemblaggio, in cui si sommano le equazioni che si riferiscono al medesimo grado di libertà e si eliminano le equazioni che si riferiscono ai gradi di libertà vincolati, si ottiene un unico sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$40) \quad [K_1 + K_2] \{\dot{a}\} - \{\dot{f}_t\} = 0$$

$$[K_T] \{\dot{a}\} - \{\dot{f}_t\} = 0$$

dove $\{\dot{f}_t\} = \{\dot{f}_b\} + \{\dot{f}_s\}$.

Per ogni λ e per ciascun elemento \mathcal{D}^k deve essere inoltre verificata l'equazione dei lavori virtuali:

$$41) \quad \int_{\mathcal{D}^k} F^{TH*} \cdot S \, dV - \int_{\mathcal{D}^k} v^* \cdot b_o \, dV - \int_{\partial \mathcal{D}^k} v^* \cdot g \, \nu \, dA = 0$$

Questa da 29), 30), 37), 38), può essere scritta nella seguente forma matriciale.

$$42) \quad \{v^*\}^T \int_{\mathcal{D}^k} [B]^T \{S\} \, dV - \{v^*\}^T \{f_b\} = 0$$

Eliminiamo il vettore arbitrario $\{v^*\}^T$, ed assemblando otteniamo il sistema

$$43) \quad \int_{\mathcal{B}_0} [B]^T \{S\} \, dV - \{f_t\} = 0$$

Il sistema è detto equazione dell'equilibrio.

3) Procedura numerica di integrazione

Si conosca, per il valore λ_i corrente, lo stato di equilibrio del corpo cioè la terna

$$1) \quad | \{a(p, \lambda_i)\}, \{E(\lambda_i)\}, \{S(E(p, \lambda_i))\} | .$$

Si assegni inoltre un incremento di carico

$$2) \quad \{\Delta f\} = \int_{\lambda_i}^{\lambda_i + \Delta \lambda} \{f_t\} d\lambda,$$

corrispondente all'incremento delle forze esterne nell'intervallo

$$[\lambda_i, \lambda_i + \Delta \lambda] :$$

Il parametro di spostamento incognito $\{\Delta a\}$ è ottenuto dalla risoluzione del sistema di equazioni lineari 40)

$$3) \quad [K_T(\lambda_i)]\{\Delta a\} - \{\Delta f\} = 0 .$$

Il campo di spostamento, riferito alla configurazione iniziale, è

$$4) \quad \{a^1(p, \lambda_i + \Delta \lambda)\} = \{a(p, \lambda_i)\} + \{\Delta a\},$$

dove con l'indice soprascritto indichiamo la prima stima del campo di spostamento.

Le misure di deformazione e di tensione sono derivate da

$$5) \quad \{E^2(p, \lambda_i + \Delta\lambda)\} = \frac{1}{2} \left[\{F^1(p, \lambda_i + \Delta\lambda)\}^T \{F^1(p, \lambda_i + \Delta\lambda)\} - \{I\} \right],$$

$$6) \quad \{S^1(p, \lambda_i + \Delta\lambda)\} = S \left[\{E^1(p, \lambda_i + \Delta\lambda)\} \right],$$

dove con S indichiamo la legge costitutiva espressa con forma matriciale.

Si ottiene così un nuovo stato

$$7) \quad \left[\{a^1(p, \lambda_i + \Delta\lambda)\}, \{E^1(p, \lambda_i + \Delta\lambda)\}, \{S^1(p, \lambda_i + \Delta\lambda)\} \right].$$

A partire da questo stato è possibile applicare un successivo incremento di carico. Una procedura di questo tipo corrisponde ad un semplice schema di integrazione di Eulero ed è affetta da un notevole errore a meno di non usare incrementi di carico molto piccoli.

Infatti lo stato in 7) non sarà in generale uno stato di equilibrio del corpo sotto l'azione delle forze esterne $f_t(p, \lambda_i + \Delta\lambda)$. Applicando la 43) avremo in generale

$$\int_{\mathcal{B}_0} [B(a^1)]^T \{\dot{S}^1\} dV - \{f_t(p, \lambda_i + \Delta\lambda)\} = \{R\},$$

essendo R il vettore delle forze non equilibrate.

Linearizzando attorno allo stato in 7) si può calcolare una correzione dello spostamento $\{a^1\}$ applicando come carichi esterni le forze non equilibrate $\{R\}$. Il processo può essere ripetuto finché

$$\|\{R\}\| \leq \varepsilon,$$

essendo ε una quantità prefissata.

Questa procedura corrisponde ad applicare il metodo di Newton-Raphson al sistema di equazioni in 3).

Appendice A

Solidi a simmetria assiale

Le matrici ricavate precedentemente possono essere usate per problemi piani di deformazione o di tensione cancellando le opportune righe o colonne. Questo non è possibile per solidi a simmetria assiale.

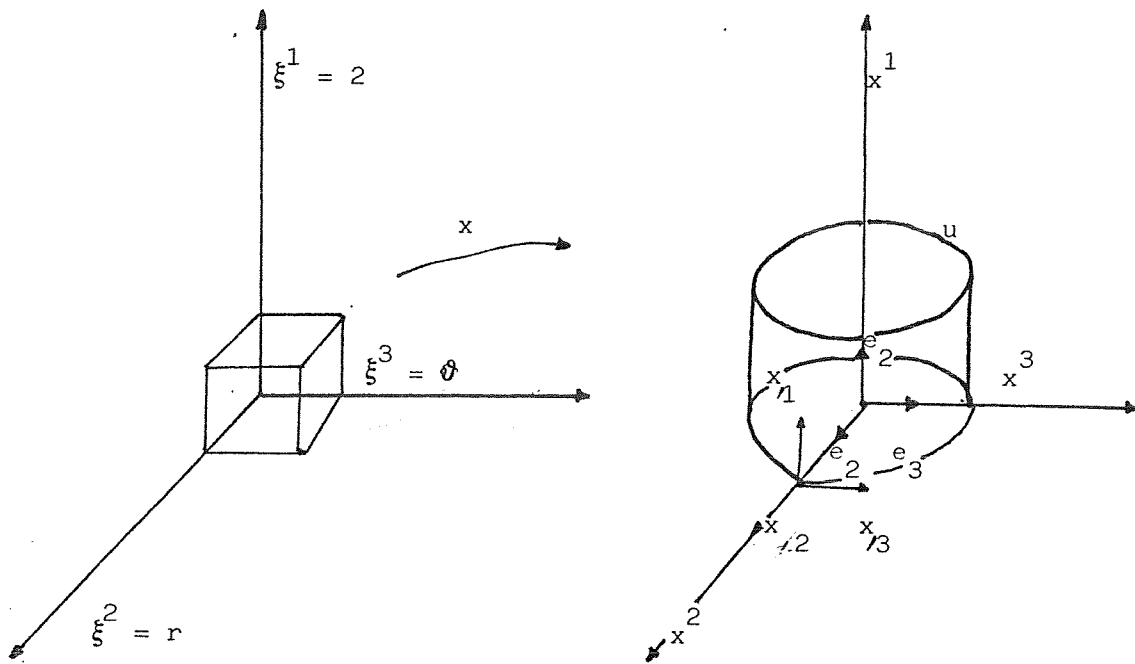


fig. 4

Assegnato un solido a simmetria assiale \mathcal{B} nello spazio Euclideo e scelta una opportuna terna di riferimento (x_1, x_2, x_3) , vedi fig. 4 operiamo un cambiamento di coordinate.

Sia $x = \hat{f}(z, r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ l'applicazione del parallelepipedo di lati $0 \leq z \leq h$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ in \mathcal{B}

I vettori tangenti alle linee coordinate sono

$$x_{,2} = 0, 0, 1 = e_1$$

$$x_{,1} = \cos \vartheta, \sin \vartheta, 0$$

$$x_{,3} = r \sin \vartheta, r \cos \vartheta, 0$$

Essi individuano una terna locale per ogni $x = f(z, r; \vartheta)$.

Il campo di spostamento u , è esprimibile come

$$u = u^1 e_1 + u^2 x_{,2} + u^3 x_{,3},$$

ma per condizioni di simmetria è

$$u^1 = u^1(r, z) = u^z(r, z),$$

$$u^2 = u^2(r, z) = u^r(r, z),$$

$$u^3 = 0,$$

Le derivate del campo di spostamento sono

$$u_{,1} = u^1_{,1} e_1 + u^2_{,1} x_{,2},$$

$$u_{,2} = u^1_{,2} e_1 + u^2_{,2} x_{,2},$$

$$u_{,3} = u^2_{,3} x_{,23} = \frac{u^2}{r} x_{,3},$$

da cui possiamo ricavare il gradiente di spostamento

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^z}{\partial z} & \frac{\partial u^z}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial u^r}{\partial z} & \frac{\partial u^r}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u^r}{r} \end{bmatrix}$$

Il gradiente di deformazione è facilmente esprimibile come

$$F = H + I$$

Il gradiente di spostamento, utilizzando la notazione precedente usata può essere scritto nella seguente forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \\ H_{12} \\ H_{22} \\ H_{33} \end{Bmatrix} = [G_1, \quad , G_i, \quad G_n] \begin{Bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_i \\ \dot{a}_n \end{Bmatrix} = [G] \{\dot{a}\},$$

dove

$$[G_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ 0 & N_i \end{bmatrix}$$

Si può verificare che le componenti del tensore di deformazione di Green S. Venant non nulle sono 4 che in forma vettoriale sono esprimibili come

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_z \\ E_r \\ E_\theta \\ 2E_{zr} \end{Bmatrix}$$

pertanto

$$\{\dot{E}\} = [B_1, \quad B_i, \quad , B_n] \begin{Bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_i \\ \dot{a}_n \end{Bmatrix} = [B] \{\dot{a}\}.$$

dove

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial z(\lambda)}{\partial z} \frac{\partial Ni}{\partial z} & ; & \frac{\partial z(\lambda)}{\partial z} \frac{\partial Ni}{\partial z} \\ \frac{\partial z(\lambda)}{\partial r} \frac{\partial Ni}{\partial r} & ; & \frac{\partial r(\lambda)}{\partial r} \frac{\partial Ni}{\partial r} \\ 0 & & \frac{r(\lambda)}{r_0} \frac{Ni}{r_0} \\ \frac{\partial z(\lambda)}{\partial z} \frac{\partial Ni}{\partial r} + \frac{\partial z(\lambda)}{\partial r} \frac{\partial Ni}{\partial z} & ; & \frac{\partial r(\lambda)}{\partial z} \frac{\partial Ni}{\partial r} + \frac{\partial r(\lambda)}{\partial r} \frac{\partial Ni}{\partial z} \end{bmatrix}$$

E' possibile così calcolare la matrice di rigidezza tangente ; per comodità diamo qui lo sviluppo del solo termine

$$S \cdot (\dot{H}^T H),$$

che può offrire difficoltà.

Nelle notazioni adottate esso è espresso da

$$S \cdot (\dot{H}^T H) = \{a\}^T [G^T] [M] [G] \{\dot{a}\} = \{\dot{a}_i\}^T [G_i^T] [M] [G_j] \{\dot{a}_j\},$$

dove

$$M = \begin{bmatrix} S_{zz} & 0 & S_{zr} & 0 & 0 \\ 0 & S_{zz} & 0 & S_{zr} & 0 \\ S_{zr} & 0 & S_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & S_{zr} & 0 & S_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{\theta\theta} \end{bmatrix},$$

e $[G]$ è la matrice precedentemente definita.

Bibliografia

- |1| S.S. ATMAN
The Principle of Virtual Work and Integral Lawas of Motion.
Arch. Rational Mech., 1979.
- |2| J.T. ODEN
Finite Elements of Nonlinear Continua.
McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1972.
- |3| M.E. GURTIN
An Introduction To Continuum Mechanics.
ACADEMIE PRESS, 1981.