STUDIO DI UNA DISTRIBUZIONE SINGOLARE CHE VIENE GENERATA NEL PROCEDIMENTO DI BISEZIONE

Giotto Fiorio
C.N.R. - Istituto di Elaborazione dell'Informazione
Via Santa Maria, 46 - Pisa

RIASSUNTO. Quando una variabile aleatoria Z non può essere osservata direttamente, ma è solo possibile sapere se, scelto preventivamente un valore x, è risultato $Z<x$ oppure no, e la probabilità di tale risultato dipende solo da x, diremo che Z è una soglia aleatoria. Un metodo efficiente per localizzare una soglia aleatoria è quello della bisezione, il cui risultato però è una v.a. con distribuzione diversa da quella di Z. In questo lavoro si studia la distribuzione del risultato della bisezione in presenza di una soglia aleatoria e si mostra che infiniti passi di bisezione danno luogo, in generale, ad una v.a. con distribuzione singolare, nel senso che la relativa funzione di ripartizione è continua con derivata nulla quasi dappertutto. Viene inoltre affrontato il problema del calcolo numerico della varianza del risultato della bisezione.

1. DEFINIZIONE

Sia $G(x):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione di ripartizione (d'ora in avanti, f.r.), cioè una funzione non decrescente e tale che $G(-\infty)=0$, $G(+\infty)=1$. Per ogni n intero non negativo sia Q_n l'insieme dei numeri della forma $m/2^n$ con m intero. Definiamo per ricorrenza la successione di funzioni $B_n(x):Q_n\to\mathbf{R}$ nel modo seguente

$$B_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\le 0, \\ 1 & \text{se } x\ge 1, \end{cases}$$

$$B_{n+1}(x) = \begin{cases} B_n(x) & \text{se } x\in Q_n, \\ (1-G(x))B_n\left(\frac{m}{2^n}\right)+G(x)B_n\left(\frac{m+1}{2^n}\right) & \text{se } x=\frac{2m+1}{2^{n+1}}. \end{cases}$$

Le funzioni B_n sono non decrescenti, infatti B_0 lo è e, ammesso che lo sia B_n, lo è anche B_{n+1}, essendo $0\le G(x)\le 1$ per ogni x.

Definiamo la funzione $B(x):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ come segue:

$B(x) = B_n(x)$ se $x\in Q_n$ per qualche n,

$B(x)$ è non decrescente;

essendo l'insieme $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n$ dovunque denso, la funzione B risulta definita tranne al più nei suoi punti di discontinuità (vedi, più avanti, la proprietà 2.3).

Ponendo $G(x)=(1+t)/2$ costante per $0<x<1$, con $0<t<1$, si ottiene la funzione definita da Riesz [1] come esempio di una funzione continua monotona con derivata nulla quasi dappertutto. Vedi anche Billingsley [2] Example 31.1 e, più avanti, il paragrafo 4.1.

2. PROPRIETA'

Siano $a = \inf\{x:G(x)>0\}$, $b = \sup\{x:G(x)<1\}$,
$c = \inf\{x:B(x)>0\}$, $d = \sup\{x:B(x)<1\}$.

Indichiamo con $(x,y]$ l'intervallo $\{z:x<z\leq y\}$ e analogamente gli altri.

Proprietà 2.1. Se $b\leq 0$ allora $c=d=0$, se $a\geq 1$ allora $c=d=1$, altrimenti $[c,d] = [a,b]\cap[0,1]$.

Dimostrazione. Tenendo presente la definizione di B, basterà dimostrare che, per ogni n e per ogni $x\in Q_n\cap(0,1)$, $B_n(x)=0$ se e solo se $G(x)=0$, $B_n(x)=1$ se e solo se $G(x)=1$. L'affermazione è vera per $n=0$ infatti l'insieme $Q_0\cap(0,1)$ è vuoto. Supponiamola vera per n. Chiamiamo l l'intero tale che $B_n(l/2^n)=0$ e $B_n((l+1)/2^n)>0$: posto $y=(2l+1)/2^{n+1}$, dalla definizione segue che $B_{n+1}(y)=0$ se e solo se $G(y)=0$. Analogamente, sia r l'intero tale che $B_n(r/2^n)<1$ e $B_n((r+1)/2^n)=1$, posto $z=(2r+1)/2^{n+1}$, allora $B_{n+1}(z)=1$ se e solo se $G(z)=1$. Per i punti di $Q_{n+1}\cap(0,1)$ diversi da y e z la proprietà discende in modo ovvio dall'essere vera per i punti di $Q_n\cap(0,1)$. ■

A differenza della funzione di Riesz [1], la funzione $B(x)$ può non essere continua, anche in casi diversi da quelli banali in cui $b\leq 0$, oppure $a\geq 1$, oppure $a=b$. Un esempio in cui $B(x)$ risulta discontinua si trova in [3], Appendice B, ed è ripreso in questo lavoro al paragrafo 4.3.

Proprietà 2.2. La funzione B è continua e strettamente crescente nell'intervallo aperto (c,d).

Dimostrazione. Per ogni x definiamo, come Riesz [1], una successione di intervalli $(\alpha_n,\beta_n)\subset(\alpha_{n-1},\beta_{n-1})$ con $\alpha_n=m/2^n$ e $\beta_n=(m+1)/2^n$

elementi consecutivi di Q_n, tali che $x\in[\alpha_n,\beta_n]$ per ogni n. La successione non è unica se $x\in Q_n$ per qualche n: lo sarebbe se si ponesse $x\in[\alpha_n,\beta_n)$ oppure $x\in(\alpha_n,\beta_n]$. Condizione necessaria e sufficiente per la continuità di B in x è che sia $\lim_{n\to\infty}(B(\beta_n)-B(\alpha_n)) = 0$ per ogni successione di intervalli (α_n,β_n) relativi ad x; infatti, nel caso che la successione non sia unica, la condizione relativa alla successione con $\alpha_n\le x<\beta_n$ corrisponde alla continuità a destra, quella con $\alpha_n<x\le\beta_n$ alla continuità a sinistra.

Dalla definizione del paragrafo 1 si vede che

$$B(\beta_n)-B(\alpha_n) = \gamma_n\{B(\beta_{n-1})-B(\alpha_{n-1})\}$$

dove

$$\gamma_n = \begin{cases} G(\beta_n) & \text{se } \alpha_n=\alpha_{n-1}, \\ 1-G(\alpha_n) & \text{se } \beta_n=\beta_{n-1}. \end{cases}$$

Per ogni $x\in(0,1)$ si ha $\alpha_0=0$, $\beta_0=1$, $B(\alpha_0)=0$, $B(\beta_0)=1$, perciò

$$B(\beta_n)-B(\alpha_n) = \prod_{k=1}^{n}\gamma_k.$$

Condizione sufficiente per la continuità di B in $x\in(0,1)$ è che sia $\lim_{n\to\infty}\gamma_n<1$ per ogni successione di intervalli (α_n,β_n) relativi a x, e questo equivale a richiedere che siano $G(x-)>0$ e $G(x+)<1$. Queste due condizioni sono soddisfatte per ogni $x\in(c,d)$, dunque B è ivi continua.

Nell'intervallo (c,d) la funzione B è anche strettamente crescente, infatti se $c<x<y<d$, preso un punto z tale che $x<z<y$ e una successione di intervalli (α_n,β_n) relativi a z, esiste un intero N tale che $x\le\alpha_N$, $\beta_N\le y$, e

$$B(y)-B(x) \ge B(\beta_N)-B(\alpha_N) = \prod_{k=1}^{N}\gamma_k > 0$$

essendo $\gamma_k \ge \min\{G(\beta_k),1-G(\alpha_k)\} \ge \min\{G(x),1-G(y)\}$ per ogni k. ■

Proprietà 2.3. B risulta definita in tutto $\mathbb{R}$ tranne quando $0<a=b<1$ e a non appartiene ad alcun Q_n.

Dimostrazione. Dalla proprietà 2.2 segue che B può essere discontinua, e quindi non definita, solo in c e in d. Dimostriamo che se B è discontinua in c e $c<d$, allora $c\in Q_n$ per qualche n, quindi B è definita in c. La discontinuità in c implica

$$\lim_{n\to\infty}(B(\beta_n)-B(\alpha_n)) = \prod_{k=1}^{\infty}\gamma_k > 0$$

per almeno una successione di intervalli (α_n,β_n) relativa a c;

poiché $c<d$, si avrà $\lim_{k\to\infty} G(\beta_k)<1$ e quindi la discontinuità implica che esistano una successione di intervalli ed un N tali che $\gamma_k = 1-G(\alpha_k) = 1$ per ogni $k>N$, cioè che sia $c=\beta_N\in Q_N$.

Analogamente si dimostra che, se B è discontinua in d e $c<d$, allora $d\in Q_n$ per qualche n. ■

Siano $e = \sup\{x:G(x)<1/2\}$, $f = \inf\{x:G(x)>1/2\}$.

Proprietà 2.4. La derivata $B'(x)$ è diversa da zero nell'intervallo $(e,f)\cap(c,d)$, se questo non è vuoto; altrove è uguale a zero quasi dappertutto.

Dimostrazione. $B'(x)=0$ per $x<c$ oppure $x>d$. Per il teorema di Lebesgue, B' esiste quasi dappertutto; supponiamo che esista in $x\in(c,d)$; allora esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B(\beta_n)-B(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} = \prod_{k=1}^{\infty} (2\gamma_k)$$

per ogni successione di intervalli (α_n,β_n) relativa a x. Tale limite è diverso da zero se e solo se $\lim_{k\to\infty} \gamma_k = 1/2$, cioè se e solo se $x\in(e,f)$. ■

Proprietà 2.5. Siano G e H due f.r. tali che $G(x)\le H(x)$ per ogni $x\in(0,1)$; se B e C sono le funzioni ottenute, secondo la definizione del paragrafo 1, a partire da G e H rispettivamente, allora $B(x)\le C(x)$ per ogni x.

Dimostrazione. Se una delle f.r. G e H è degenere, la proprietà segue dalla proprietà 2.1. Se G e H non sono degeneri, allora B e C sono definite in tutto $\mathbb{R}$ ed i loro punti di discontinuità, se esistono, appartengono a $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n$ (vedi la dimostrazione della proprietà 2.3); basta allora dimostrare la proprietà per i punti appartenenti a tale insieme, cioè per le funzioni B_n e C_n, qualunque sia n. La proprietà è vera per $n=0$; supposta vera per n, poniamo $x=(2m+1)/2^{n+1}$ con $m\in\{0,1,2,\dots,2^n-1\}$; risulta

$$B_{n+1}(x) = B_n\left(\frac{m}{2^n}\right) + G(x)\left[B_n\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - B_n\left(\frac{m}{2^n}\right)\right] \le$$

$$\le B_n\left(\frac{m}{2^n}\right) + H(x)\left[B_n\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - B_n\left(\frac{m}{2^n}\right)\right] =$$

$$= \{1-H(x)\}B_n\left(\frac{m}{2^n}\right) + H(x)B_n\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \le$$

$$\le \{1-H(x)\}C_n\left(\frac{m}{2^n}\right) + H(x)C_n\left(\frac{m+1}{2^n}\right) = C_{n+1}(x). ■$$

3. RISULTATO DELLA BISEZIONE

$B_n(x)$ rappresenta la f.r. del risultato di n passi di bisezione dell'intervallo (0,1) in presenza di una soglia aleatoria [3] con distribuzione $G(x)$: $B_n(x)$ è definita solo su Q_n, ma questo è coerente con il fatto che il risultato di n passi di bisezione non è un numero, bensì un intervallo di ampiezza 2^{-n} volte quello iniziale. Se invece intendiamo che tale risultato sia il punto medio dell'intervallo suddetto, allora $B_n(x)$ va intesa costante a tratti e descrive la variabile aleatoria (d'ora in poi, v.a.) discreta X_n definita ricorsivamente come segue

$$X_0 = 2^{-1},$$
$$X_{n+1} = X_n + (1-2Y_n)2^{-n-2}, \qquad (1)$$

dove Y_n è una v.a. a valori in {0,1} tale che [4]

$$P(Y_n=1|X_1,X_2,...X_n,Y_0,Y_1,...Y_{n-1}) = G(X_n),$$
$$P(Y_n=0|X_1,X_2,...X_n,Y_0,Y_1,...Y_{n-1}) = 1-G(X_n);$$

la notazione usata qui sopra per il condizionamento è sovrabbondante nel nostro caso in cui $Y_0,Y_1,...Y_{n-1}$ determinano $X_1,X_2,...X_n$ mediante la (1); tuttavia essa è utile nel caratterizzare la soglia aleatoria rappresentata dalla f.r. G, qualunque sia la successione $X_1,X_2,...X_n$.

Ponendo $D_k=1-Y_{k-1}$, si ottiene per X_n la forma

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}D_k + 2^{-n-1}, \qquad (2)$$

da cui si vede che la successione $\{X_n\}$ converge alla v.a.

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}D_k, \qquad (3)$$

la cui f.r. è data da $B(x)$, se non si richiede per questa la continuità a destra (o a sinistra). Fissata la relazione (2) tra $D_1,D_2,...D_n$ e X_n, si può scrivere

$$P(D_k=0|D_1,D_2,...D_{k-1}) = G(X_{k-1}),$$
$$P(D_k=1|D_1,D_2,...D_{k-1}) = 1-G(X_{k-1}),$$

e il valore medio di D_k risulta

$$E(D_k|D_1,D_2,...D_{k-1}) = 1-G(X_{k-1}).$$

Se $x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}d_k$, con $d_k\in\{0,1\}$, è il risultato di infiniti passi di bisezione e G è continua in x, allora

$$\lim_{k\to\infty} E(D_k | d_1, d_2, \ldots d_{k-1}) = 1-G(x);$$

quindi, per la legge dei grandi numeri,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Sigma_1^n d_k = 1-G(x). \tag{4}$$

Chiamiamo A l'insieme dei numeri nell'intervallo aperto (c,d) per i quali vale la (4): per il teorema di Borel sui numeri normali ([2] Theorem 1.2), la misura di Lebesgue di A è nulla, tranne quando l'intervallo $(e,f)\cap(c,d)$ è non vuoto (vedi la proprietà 2.4). Tuttavia l'insieme A, se non è vuoto, cioè se $c<d$, non è numerabile, infatti B è strettamente crescente in (c,d) quindi la misura ν indotta da B è tale che $\nu(A) = B(d-)-B(c+) > 0$, ma B è continua in (c,d) e la non numerabilità di A segue dalla sub-additività della misura.

4. CASI PARTICOLARI

4.1 Innanzitutto consideriamo il caso studiato da Riesz [1] e da Billingsley [2], ossia $G(x)=p$ costante per $0<x<1$. In questo caso si ha semplicemente

$$P(D_k=0 | D_1, D_2, \ldots D_{k-1}) = p,$$

$$P(D_k=1 | D_1, D_2, \ldots D_{k-1}) = 1-p,$$

per ogni k, quindi le v.a. $D_1, D_2, \ldots$ sono indipendenti. Mediante la (3) possiamo allora calcolare i momenti e la funzione caratteristica[1] di X:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} E(D_k) = 1-p;$$

$$E(X^2) = \sum_k 2^{-2k} E(D_k^2) + \sum_k \sum_{l\neq k} 2^{-k-l} E(D_k) E(D_l) = \frac{1}{3}(1-p)+\frac{2}{3}(1-p)^2;$$

...

$$\Phi(t) = E\left[e^{itX}\right] = \prod_{k=1}^{\infty} E\left[e^{it2^{-k}D_k}\right] = \prod_{k=1}^{\infty}\left[p + e^{it2^{-k}}(1-p)\right]. \tag{5}$$

---

[1] Un prodotto infinito. Sia $p=1/2$; in questo caso $B(x)=x$ per $0<x<1$ e la funzione caratteristica di X risulta

$$\Phi(t) = \int e^{itx} dB(x) = \int_0^1 e^{itx} dx = e^{it/2} \frac{\sin(t/2)}{t/2};$$

ponendo $p=1/2$ nella formula (5) si trova

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{it2^{-k-1}} \cos(t2^{-k-1}) = e^{it/2} \prod_{k=1}^{\infty} \cos(2^{-k}t/2);$$

risulta pertanto, per ogni x reale, $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(2^{-k}x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Dai momenti sopra calcolati risulta

$$\mathrm{Var}(X) = p(1-p)/3,$$

e questa può essere confrontata con $\mathrm{Var}(Z)$ se, come in [4], chiamiamo Z una v.a. di cui G è la f.r. Non avendo specificato G fuori dall'intervallo (0,1), possiamo solo dire che $\mathrm{Var}(Z) \geq p(1-p)$, l'uguaglianza valendo nel caso che sia $G(x)=0$ per $x<0$ e $G(x)=1$ per $x>1$. Il confronto porta in questo caso alla relazione

$$\mathrm{Var}(X)/\mathrm{Var}(Z) \leq 1/3.$$

La f.r. di X nel caso ora considerato sarà utile nel seguito, pertanto introduciamo per questa la notazione $F(x;p)$.

4.2 Consideriamo il caso che, per un dato n, sia G costante a tratti come segue: per ogni m intero

$$G(x) = p_m \quad \text{per} \quad \frac{m}{2^n} < x < \frac{m+1}{2^n}$$

dove le costanti p_m ed i valori $G(x)$ per $x \in Q_n$ soddisfano le condizioni

$$G\left(\frac{m}{2^n}\right) \leq p_m \leq G\left(\frac{m+1}{2^n}\right).$$

Supponiamo di aver calcolato, secondo quanto stabilito nel paragrafo 1, la funzione B_n. Allora, per ogni x, preso m intero tale che sia

$$\frac{m}{2^n} \leq x \leq \frac{m+1}{2^n},$$

risulta

$$B(x) = B_n\left(\frac{m}{2^n}\right) + b_m F(2^n x - m; p_m),$$

avendo posto

$$b_m = B_n\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - B_n\left(\frac{m}{2^n}\right).$$

Il calcolo di media e varianza di X fornisce

$$E(X) = \sum_m b_m (m+1-p_m) 2^{-n} = 2^{-n}\mu;$$

$$\mathrm{Var}(X) = 2^{-2n} \sum_m b_m \left[(m+1-p_m-\mu)^2 + \tfrac{1}{3} p_m(1-p_m)\right],$$

avendo posto

$$\mu = \sum_m b_m (m+1-p_m).$$

4.3 Nel caso 4.2 rientra quello proposto in [3], Appendice B, che, nella notazione qui usata, è rappresentato da $n=1$,

$$G(x) = \begin{cases} p_0 = 0 & \text{per } x<1/2, \\ p_1 = p & \text{per } 1/2 \leq x < 1, \\ 1 & \text{per } x \geq 1, \end{cases}$$

con $0<p<1$; detta ancora Z una v.a. con f.r. G, risulta

$$\mathrm{Var}(Z) = \rho(1-\rho)/4.$$

La f.r. della relativa v.a. X risulta

$$B(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x<1/2, \\ \rho + (1-\rho)F(2x-1;\rho) & \text{per } 1/2\le x\le 1, \\ 1 & \text{per } x\ge 1, \end{cases}$$

essendo $b_0=\rho$ e $b_1=1-\rho$. Risulta infine

$$E(X) = 1 - \rho + \rho^2/2,$$

$$\mathrm{Var}(X) = \rho/3 - (11/12)\rho^2 + (5/6)\rho^3 - \rho^4/4,$$

$$\mathrm{Var}(X)/\mathrm{Var}(Z) = 4/3 - (7/3)\rho + \rho^2 < 4/3.$$

Questi risultati confermano il calcolo approssimato fatto in [3].

5. CALCOLO NUMERICO DI Var(X)

Per una generica soglia aleatoria, la cui distribuzione non rientri fra quelle studiate al paragrafo 4, non sembra possibile dare una formula esatta per la varianza Var(X) del risultato di infiniti passi di bisezione. Pertanto il calcolo numerico di Var(X) richiede la valutazione dell'errore analitico dovuto al fatto che la distribuzione di X è nota solo tramite B_n. A questo scopo, nel lavoro [3] avevamo calcolato, per ogni n, i valori minimo e massimo della varianza nella classe delle v.a. le cui f.r. coincidono con B_n nei punti di Q_n: al crescere di n, la differenza fra il massimo ed il minimo detti sopra diminuisce come 2^{-n}.

La conoscenza della soluzione esatta nel caso 4.2 permette di trovare, per Var(X), una limitazione superiore ed una inferiore la cui differenza diminuisce come 2^{-2n} sotto l'ipotesi che la soglia aleatoria abbia densità limitata. Ci serviremo, come in [3], di un risultato generale (teorema 5.1) che riportiamo senza dimostrazione.

Date due f.r. $F^{(1)}$ e $F^{(2)}$ tali che $F^{(1)}(x) \le F^{(2)}(x)$ per ogni x, e tali che le relative v.a. abbiano varianza finita, definiamo la classe $\mathcal{E}(F^{(1)},F^{(2)})$ di v.a. come segue: una v.a. appartiene a $\mathcal{E}(F^{(1)},F^{(2)})$ se la sua f.r. F verifica, per ogni x, le disuguaglianze

$$F^{(1)}(x) \le F(x) \le F^{(2)}(x).$$

Nella classe $\mathcal{E}(F^{(1)},F^{(2)})$ definiamo la sottoclasse $\mathcal{E}_{min}(F^{(1)},F^{(2)})$ delle v.a. con f.r. della forma

$$F(x) = \begin{cases} F^{(1)}(x) & \text{per } x < \xi, \\ F^{(2)}(x) & \text{per } x \geq \xi, \end{cases}$$

e la sottoclasse $\mathscr{C}_{max}(F^{(1)},F^{(2)})$ delle v.a. con f.r. della forma

$$F(x) = \max\{F^{(1)}(x), \min\{F^{(2)}(x), \eta\}\},$$

dove η è una costante compresa fra 0 e 1.

Teorema 5.1. Nella classe $\mathscr{C}(F^{(1)},F^{(2)})$ esistono due v.a. U e V tali che

$$\mathrm{Var}(U) = \min_{X\in\mathscr{C}} \mathrm{Var}(X),$$

$$\mathrm{Var}(V) = \max_{X\in\mathscr{C}} \mathrm{Var}(X);$$

le v.a. U e V appartengono alle sottoclassi $\mathscr{C}_{min}(F^{(1)},F^{(2)})$ e $\mathscr{C}_{max}(F^{(1)},F^{(2)})$ rispettivamente. ■

Definiamo, per una data G e per un dato n, le f.r.[2] $G^{(1)}$ e $G^{(2)}$ costanti a tratti come nel caso 4.2, chiamando $\rho_m^{(1)}$ e $\rho_m^{(2)}$ le rispettive costanti, e ponendo $\rho_m^{(1)}=G(m/2^n)$, $\rho_m^{(2)}=G((m+1)/2^n)$; inoltre poniamo $G^{(1)}(x) = G^{(2)}(x) = G(x)$ per ogni $x\in Q_n$.

Dette $B^{(1)}$ e $B^{(2)}$ le f.r. calcolate a partire da $G^{(1)}$ e $G^{(2)}$ rispettivamente, risulta $B^{(1)}(x) = B^{(2)}(x)$ per ogni $x\in Q_n$, e poiché $G^{(1)}(x) \leq G(x) \leq G^{(2)}(x)$ per ogni x, per la proprietà 2.5,

$$B^{(1)}(x) \leq B(x) \leq B^{(2)}(x) \quad \text{per ogni } x;$$

dunque il risultato X di infiniti passi di bisezione appartiene alla classe $\mathscr{C}(B^{(1)},B^{(2)})$. Quando esistono punti di $Q_n\cap(0,1)$ nei quali $0<G(x)<1$, allora esistono v.a. con f.r. coincidenti con $B(x)$ nei punti di Q_n, per esempio X_n, non contenute in $\mathscr{C}(B^{(1)},B^{(2)})$.

Grazie al teorema 5.1, il calcolo di Var(U) e di Var(V) nella classe $\mathscr{C}(B^{(1)},B^{(2)})$ si riduce ai due problemi in una variabile: trovare ξ e η tali che

$$\mathrm{Var}(U) = \min_{\xi} \mathrm{Var}(X) \qquad X\in\mathscr{C}_{min}(B^{(1)},B^{(2)}),$$

$$\mathrm{Var}(V) = \max_{\eta} \mathrm{Var}(X) \qquad X\in\mathscr{C}_{max}(B^{(1)},B^{(2)}).$$

---

[2] Nella definizione che segue è essenziale che siano $G^{(1)}$ continua a destra e $G^{(2)}$ continua a sinistra; per comodità continueremo a chiamarle entrambe funzioni di ripartizione.

Concludiamo dimostrando che, se la soglia aleatoria ha densità limitata, allora la differenza $\mathrm{Var}(V)-\mathrm{Var}(U)$ nella classe $\mathscr{B}(B^{(1)},B^{(2)})$ diminuisce, all'aumentare di n, come 2^{-2n}.

Chiamiamo $X^{(1)}$ una v.a. con f.r. $B^{(1)}$, e $X^{(2)}$ una v.a. con f.r. $B^{(2)}$; poiché $B^{(1)}(0)=B^{(2)}(0)=0$ e $B^{(1)}(1)=B^{(2)}(1)=1$, valgono le disuguaglianze (vedi [5], Corollario al Teorema IV.6.1)

$$0 \le E(X^{(2)}) \le E(X) \le E(X^{(1)}) \le 1$$

$$E((X^{(2)})^2) \le E(X^2) \le E((X^{(1)})^2)$$

per ogni v.a. $X\in\mathscr{B}(B^{(1)},B^{(2)})$, quindi

$$\mathrm{Var}(V)-\mathrm{Var}(U) \le \mathrm{Var}(X^{(1)})-\mathrm{Var}(X^{(2)})+2(E(X^{(1)}))^2-2(E(X^{(2)}))^2.$$

Dalle formule del caso 4.2, ponendo

$$g_m = G((m+1)/2^n) - G(m/2^n) = \rho_m^{(2)} - \rho_m^{(1)},$$

$$\mu^{(1)} = \sum_m b_m(m+1-\rho_m^{(1)}),$$

$$\mu^{(2)} = \sum_m b_m(m+1-\rho_m^{(2)}),$$

si ottiene

$$E(X^{(1)}) - E(X^{(2)}) = 2^{-n} \sum_m b_m\, g_m,$$

$$\mathrm{Var}(X^{(1)}) - \mathrm{Var}(X^{(2)}) =$$

$$= 2^{-2n}\sum_m b_m\left[g_m(2m+2-\rho_m^{(1)}-\rho_m^{(2)}-\mu^{(1)}-\mu^{(2)})+\tfrac{1}{3}\rho_m^{(1)}(1-\rho_m^{(1)})-\tfrac{1}{3}\rho_m^{(2)}(1-\rho_m^{(2)})\right].$$

Con ovvie maggiorazioni si trova

$$\mathrm{Var}(X^{(1)}) - \mathrm{Var}(X^{(2)}) \le 2^{-n+1} \sum_m b_m\, g_m,$$

$$\mathrm{Var}(V) - \mathrm{Var}(U) \le 2^{-n}\, 6 \sum_m b_m\, g_m.$$

Se, per ogni x, $G'(x)$ esiste ed è minore di K, allora $g_m<2^{-n}K$ per ogni m e, poiché $\sum_m b_m=1$,

$$\mathrm{Var}(V) - \mathrm{Var}(U) < 2^{-2n}\, 6\, K.$$

RINGRAZIAMENTI

L'autore ringrazia il prof. Luigi E. Picasso per avergli segnalato la funzione $F(x;\rho)$ nel libro di Riesz e Nagy [1], ed il prof. Franco Caroti Ghelli per avergli segnalato la descrizione della soglia aleatoria nel libro di Wasan [4]. Un ringraziamento particolare va al prof. Fabrizio Catanese per la dimostrazione del teorema 5.1.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Riesz, B. Sz. Nagy. *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*. Gauthier-Villars, 1972. Chap. II, n° 24.

[2] P. Billingsley. *Probability and Measure*. 2nd Edition. John Wiley & Sons, 1986.

[3] G. Fiorio. *Il metodo della bisezione in presenza di una soglia casuale*. I.E.I. Pisa, Nota interna B04-11, Aprile 1987.

[4] M. T. Wasan. *Stochastic Approximation*. Cambridge University Press, 1969. Section 2.2.

[5] G. Dall'Aglio. *Calcolo delle probabilità*. Zanichelli, 1987.