

Consiglio Nazionale delle Ricerche

**ISTITUTO DI ELABORAZIONE
DELLA INFORMAZIONE**

PISA

UN ALGORITMO PER L'APPROSSIMAZIONE DELLE CUR-
VE DI LIVELLO DI UNA SUPERFICIE DISCRETA

P.L. Casalini, S. Cerri, A. Tonazzini

Nota interna B83-08

Giugno 1983

UN ALGORITMO PER L'APPROSSIMAZIONE DELLE CURVE DI
LIVELLO DI UNA SUPERFICIE DISCRETA

P.L.Casalini , S.Cerri , A.Tonazzini

Abstract

This paper describe the theoretical approach and the algorithm for level lines approximation of a discrete surface. Since level lines for a discrete surface are meaningless we have approximated this surface with a continue triangular poliedric surface, that is a double spline surface, and for this we determinate the level lines.

We assume these level lines as an approximation of the discrete level lines. We describe the algorithm and discuss some results.

Questo articolo descrive l'approccio teorico e l'algoritmo per l'approssimazione delle linee di livello di una superficie discreta.

Poiché le linee di livello di una superficie discreta sono poco significative, tale superficie è stata approssimata con una superficie poliedrica continua, facendo uso dell'interpolazione mediante doppie spline di grado uno. Le linee di livello di questa poliedrica sono state assunte come approssimazione continua delle curve di livello discrete. E' stata poi riportata la descrizione dell'algoritmo e la discussione di alcuni esempi.

1. INTRODUZIONE

Su di un'immagine fotografica l'informazione compare sotto forma di gradazione continua di toni di grigio. Matematicamente ciò è esprimibile mediante una funzione continua $f(x,y)$, che rappresenta il valore del livello di grigio (trasparenza o densità fotometrica) che compete al punto (x,y) del piano dell'immagine.

Intuitivamente se gli oggetti contenuti nell'immagine sono caratterizzati dalle stesse variazioni di grigio, e se sono tutti a fuoco, cioè nettamente distinti dal fondo, in corrispondenza dei loro contorni la $f(x,y)$ varierà rapidamente. Sarà allora possibile definire un livello di grigio k , uguale per tutti gli oggetti, che rappresenterà proprio il livello che compete ai punti del loro contorno.

In generale, tuttavia, gli oggetti contenuti in un'immagine non saranno mai completamente a fuoco, e anzi, per certe applicazioni, è spesso utile determinare i contorni a differenti livelli di grigio, scelti opportunamente.

Tagliare un'immagine ad un livello k , in questo contesto, significa prelevare le coordinate di tutti e soli i punti aventi tale livello.

Se si pensa al grafico della $f(x,y)$, superficie di R^3 , l'operazione descritta sopra equivale alla ricerca delle curve di livello k della superficie stessa.

Poiché la $f(x,y)$ che rappresenta un'immagine è in generale una funzione continua, anche le curve di livello lo saranno.

Volendo implementare su un elaboratore digitale una simile

procedura, occorre ricordare che un'immagine viene sempre acquisita sotto forma discreta, cioè mediante un processo di campionamento e successiva quantizzazione (digitalizzazione) che estrae dall'insieme continuo dei valori della $f(x,y)$ un sottoinsieme discreto di campioni.

Un'immagine digitalizzata può essere vista quindi come una superficie discreta di R^3 , e conseguentemente, ha scarso significato matematico parlare per essa di curve di livello k .

Tuttavia, in molti problemi pratici, è spesso necessario sia determinare queste curve di livello, sia imporre la loro continuità.

Nei successivi paragrafi vengono descritti, rispettivamente, la teoria e l'algoritmo di un metodo volto all'approssimazione delle curve di livello continue di una superficie discreta, ai fini di determinare i contorni, a quel livello, degli oggetti contenuti in un'immagine digitalizzata.

2. L'APPROCCIO TEORICO

Si consideri il grafico G della funzione continua $f(x,y)$ definita in un insieme chiuso, limitato e semplicemente connesso $D \subset R^2$

$$G = \{ (x,y,f(x,y)) \in R^3 : (x,y) \in D \}$$

Tale grafico è in R^3 una superficie continua.

Per curva di livello K , L_k della superficie G si intende

il luogo geometrico definito come segue

$$L_k = \{(x,y) \in D : f(x,y) = k\}$$

Supponiamo di conoscere i valori della $f(x,y)$ soltanto su un insieme finito \bar{D} di punti di D . Cioè supponiamo di avere la funzione in forma discreta.

Nella maggior parte dei casi di interesse grafico, l'insieme \bar{D} sarà un insieme ordinato di punti ottenuto mediante reticolazione dell'insieme D (fig. 1). In altre parole avremo:

$$\bar{D} = \{(x_i, y_j) \in D : i=1, N, j=1, M, x_i < x_{i+1}, y_j < y_{j+1}\}$$

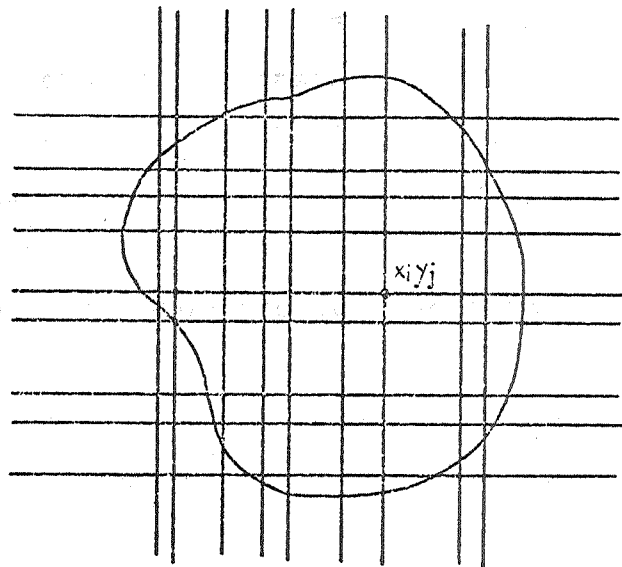


fig. 1

La discretizzazione su \bar{D} della funzione $f(x,y)$ porterà in questo caso alla costruzione della sequenza bidimensionale finita

$$Z = \{z_{i,j} = f(x_i, y_j)\} \quad \begin{matrix} i=1, N \\ j=1, M \end{matrix}$$

il cui grafico (superficie discreta) in R^3 sarà rappresentato dal luogo geometrico $\bar{G} = \{(x_i, y_j, z_{ij}) \in R^3 : (x_i, y_j) \in \bar{D}\}$

A partire dalla superficie discreta \bar{G} vogliamo approssimare le curve di livello L_k della superficie continua G . A tale scopo si rende necessaria una qualche interpolazione di $f(x,y)$ che utilizzi la sequenza Z .

Un'interpolazione di tipo polinomiale di punti base i punti $(x_i, y_j) \in \bar{D}$ non risulta essere molto appropriata, a causa della forte oscillazione dei valori del polinomio in corrispondenza a certe disposizioni dei punti base in particolare se il loro numero è elevato. Il problema in questione si presta invece molto bene ad essere risolto con metodi di approssimazione che facciano uso delle funzioni spline bidimensionali (doppie spline) che, oltre a essere più flessibili dei polinomi, presentano interessanti proprietà di convergenza al crescere del numero dei punti base.

Tuttavia quando, come in questo caso, per le $f(x,y)$ non è possibile fare ipotesi qualitative al di fuori della semplice continuità, si può soltanto fare uso delle doppie spline di grado 1, cioè dell'interpolazione lineare a tratti.

Si considerino i rettangoli

$$R_{ij} = \{(x,y) \in D : x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ e } y_j \leq y \leq y_{j+1}\} \quad \begin{matrix} i=1, N-1 \\ j=1, M-1 \end{matrix}$$

La doppia spline di grado 1 interpolatrice di $f(x,y)$ è definita "a tratti" su ciascuno degli R_j con la funzione

$$S_{ij}(x,y) = a_{ij}(x - x_i)(y - y_j) + b_{ij}(x - x_i) + c_{ij}(y - y_j) + d_{ij} \quad (1)$$

Imponendo il passaggio della S_{ij} per i quattro vertici del rettangolo R_{ij} si ricavano i valori delle costanti a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} e d_{ij} mediante le quali la spline è completamente individuata (metodo diretto).

Se nella (1) si pone $a_{ij} = 0$, si ottiene esattamente l'equazione di un piano, completamente determinabile imponendo il passaggio per tre soli punti.

Questa semplificazione permette un'immediata interpretazione geometrica dell'interpolazione stessa e fornisce la funzione interpolatrice $F(x,y)$ su ciascuno dei triangoli

$$T'_{ij} = \{(x,y) \in D : x_i \leq x \leq x_{i+1}, Y_j \leq y \leq Y_{j+1},$$

$$y \leq (x - x_i) \left(\frac{Y_{j+1} - Y_j}{x_{i+1} - x_i} \right) + Y_j \}$$

$$T''_{ij} = \{(x,y) \in D : x_i \leq x \leq x_{i+1}, Y_j \leq y \leq Y_{j+1},$$

$$y \geq (x - x_i) \left(\frac{Y_{j+1} - Y_j}{x_{i+1} - x_i} \right) + Y_j \}$$

per $i = 1, N-1$ e $j = 1, M-1$,

dall'equazione del piano passante per i vertici del triangolo stesso.

L'errore E che si commette approssimando $f(x,y)$ con $F(x,y)$ può essere definito nel seguente modo:

$$E = \max_{\substack{i = 1, N-1 \\ j = 1, M-1}} E_{ij}$$

dove

$$E_{ij} = \max_{(x,y) \in T'_{ij} \cup T''_{ij}} |f(x,y) - F(x,y)|$$

Per la linearità della funzione interpolatrice $F(x,y)$ sarà

$$E_{ij} \leq M_{ij} - m_{ij} \quad \text{dove} \quad M_{ij} = \max_{(x,y) \in T'_{ij} \cup T''_{ij}} f(x,y)$$

$$\text{e } m_{ij} = \min_{(x,y) \in T'_{ij} \cup T''_{ij}} f(x,y)$$

In ragione dell'uniforme continuità di $f(x,y)$ in D avremo che $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ t. c. se $|x' - x''| \leq \delta$ e $|y' - y''| \leq \delta$ vale $|f(x',y') - f(x'',y'')| \leq \epsilon$

Scegliendo la reticolazione su D in modo che per $i = 1, N - 1$ e per $j = 1, M - 1$, sia $|x_{i+1} - x_i| \leq \delta$ e $|y_{j+1} - y_j| \leq \delta$ varrà $E_{ij} \leq M_{ij} - m_{ij} \leq \epsilon$ e quindi anche $E \leq \epsilon$.

Possiamo dunque affermare che $f(x,y)$ è approssimata da $F(x,y)$ con un errore che può essere reso piccolo a piacere, all'infittirsi della reticolazione su D.

Il grafico in R^3 di $F(x,y)$ è rappresentato da una superficie poliedrica G avente come facce dei triangoli.

Il dominio di definizione di $F(x,y)$ è dato da

$$D' = \begin{matrix} & N-1 & M-1 \\ & U & U \\ i=1 & j=1 & (T'_{ij} \quad U T''_{ij}) \end{matrix} \quad (\text{Fig. 2})$$

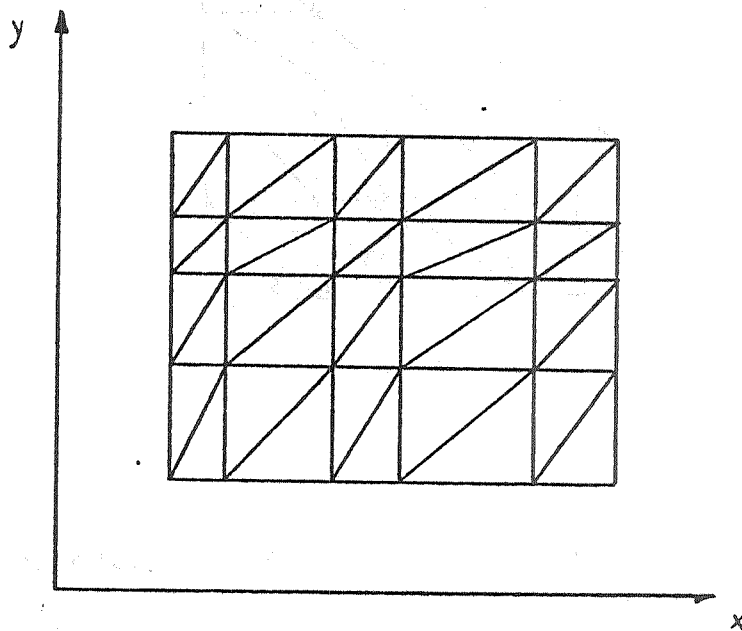


Fig. 2

In altre parole si sostituisce la superficie continua G , della quale si conosce la discretizzazione \bar{G} , con la poliedrica G costruita con porzioni di piano non sovrapposte, passanti ciascuna per terne di punti di \bar{G} non allineati e contigui (*) a coppie. Nel presente caso si sono considerate le terne secondo l'ordinamento illustrato in fig. 3 (che ne rappresenta la proiezione sul piano $x - y$)

(*) Due punti di \bar{G} , (x_i, y_j, z_{ij}) e (x_k, y_h, z_{kh}) distinti, si dicono contigui quando valgano le seguenti condizioni:

$$|k - i| \leq 1 \text{ e } |j - h| \leq 1$$

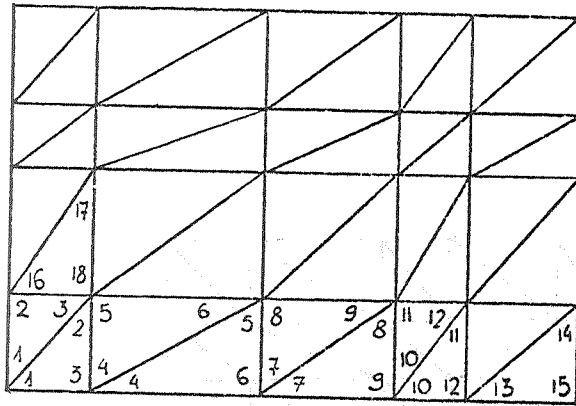


Fig. 3

In modo del tutto equivalente si sarebbe potuto scegliere l'ordinamento di Fig.4

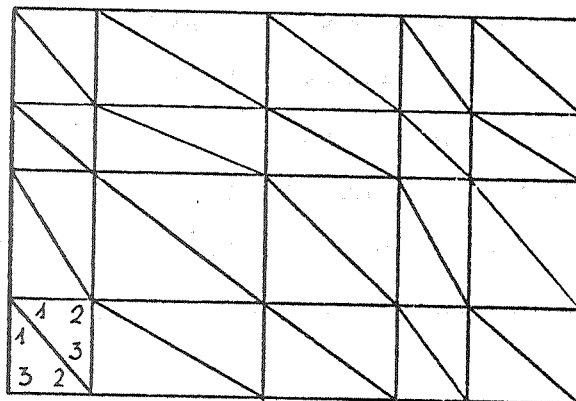


Fig. 4

Su di una singola maglia l'uso di un ordinamento o dell'altro produrrà infatti una migliore o peggiore approssimazione della superficie G al variare della convessità di questa sulla maglia stessa. Tuttavia su D' , per G generica, le due poliedriche, statisticamente, approssimano con la stessa precisione la superficie G .

Questo suggerisce l'uso di una nuova poliedrica ottenuta aggiungendo ai nodi del reticolo \bar{D} i punti medi di ciascuna maglia, ai quali verrà associato il valore medio della G nei quattro vertici.

Ciò non introduce nuove informazioni, ma permette un'approssimazione locale intermedia fra quelle ottenute usando l'uno o l'altro dei due ordinamenti. Questo nuovo ordinamento è schematizzato in Fig. 5

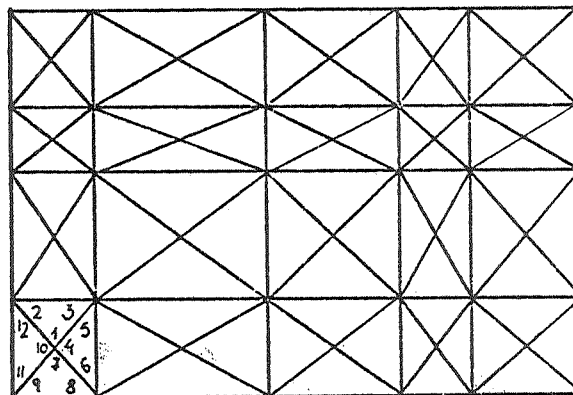


Fig. 5

Alla luce di queste considerazioni il luogo geometrico definito come

$$L_K = \{(x, y) \in D : F(x, y) = k\}$$

approssima la curva di livello L_K della superficie "ideale" G .

Da un punto di vista puramente analitico il problema della ricerca di tale curva di livello è completamente definito dal sistema

$$\begin{cases} z = F(x, y) \\ z = k \\ (x, y) \in D \end{cases} \quad (2)$$

3. L'ALGORITMO ADOTTATO

Lo scopo che ci si è proposti in questo lavoro è quello di risolvere tale problema in modo numerico, cioè quello di simulare la procedura analogica definita dalla (2) con un computer digitale.

Sostituendo il sistema (2) con quello ad esso equivalente

$$\begin{cases} F(x,y) - k = 0 \\ Z = k \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

il problema della ricerca della curva di livello k della superficie G viene riportato al problema più generale della ricerca degli zeri di una funzione nel suo dominio di definizione.

Per una $F(x,y)$ generica l'analisi numerica fornisce svariati metodi di risoluzione. In questo specifico caso, tuttavia, l'uso di tali metodi, pur fornendo la soluzione ottima, non risulterebbe efficiente dal punto di vista del tempo di calcolo.

Esiste infatti un algoritmo molto più veloce, che tiene conto della particolare natura della $F(x,y)$ e di conseguenza della poliedrica \bar{G} .

Essa è infatti una superficie continua composta dall'unione di tanti triangoli.

Il problema iniziale può essere quindi ricondotto alla ricerca dell'intersezione fra ciascuno di tali triangoli e il piano $Z = k$.

Poiché tale intersezione risulta essere un segmento, completamente individuato dai suoi estremi, basterà determinare per ogni triangolo le intersezioni, se esistono, dei suoi lati col piano di livello.

La curva di livello \bar{L}_k sarà definita da un insieme di spezzate aventi per vertici tali intersezioni.

Vediamo più in dettaglio come si procede per individuare queste spezzate.

Per ogni terna di punti contigui (x_h, y_n, z_{hn}) , (x_i, y_j, z_{ij}) e (x_l, y_m, z_{lm}) vertici di un triangolo faccia della poliedrica, supposti ordinati in modo che $z_{hn} \leq z_{ij} \leq z_{lm}$, si controlla se sono o meno verificate le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} z_{hn} &\leq k \leq z_{ij} \\ z_{ij} &\leq k \leq z_{lm} \\ z_{hm} &\leq k \leq z_{lm} \end{aligned} \tag{3}$$

Si possono avere quattro casi:

- 1) Nessuna delle relazioni (3) è verificata. Questo significa che il triangolo non interseca il piano di livello.
- 2) Soltanto due delle relazioni (3) sono verificate. Questo significa che il triangolo interseca il piano in un segmento che non coincide con nessuno dei suoi lati.
- 3) Tutte le relazioni (3) sono verificate con due uguaglianze, cioè $z_{hn} = z_{ij} = k$ oppure $z_{ij} = z_{lm} = k$. Questo significa che un lato del triangolo giace interamente sul piano.
- 4) Tutte le relazioni (3) sono verificate con uguaglianza, cioè

$z_{hn} = z_{ij} = z_{lm} = k$. Questo significa che il triangolo giace interamente sul piano.

Si osservi che non è possibile il verificarsi di una sola delle tre condizioni.

Se si verifica il caso 1, ovviamente, si passa ad un'altra terna, cioè ad un altro triangolo.

Nel caso 2 si vanno a considerare ciascuno dei lati che intersecano il piano di livello, uno di essi sia il segmento individuato dai punti (x_h, y_n, z_{hn}) e (x_i, y_j, z_{ij}) , e si effettua un'interpolazione lineare fra le coordinate secondo le formule:

$$\begin{cases} x_t = x_h + \frac{k - z_{hn}}{z_{ij} - z_{hn}} (x_i - x_h) \\ y_t = y_n + \frac{k - z_{hn}}{z_{ij} - z_{hn}} (y_j - y_n) \end{cases} \quad (4)$$

Il punto (x_t, y_t, k) rappresenta proprio l'intersezione fra il lato in questione e il piano di livello. Infatti si può osservare che le due equazioni del sistema (4) rappresentano, al variare di k , rispettivamente l'interpolazione lineare dei punti (x_h, z_{hn}) e (x_i, z_{ij}) nel piano x - z e dei punti (y_n, z_{hn}) e (y_j, z_{ij}) nel piano y - z .

I segmenti che tali punti individuano nei due piani sono proprio le proiezioni su tali piani del segmento di R^3 individuato dai punti (x_h, y_n, z_{hn}) e (x_i, y_j, z_{ij}) .

In particolare può succedere che, se $z_{ij} = k$ oppure $z_{hn} = k$ allora il punto trovato mediante interpolazione coinciderà proprio con uno degli estremi del segmento stesso.

La stessa operazione fatta sull'altro lato del triangolo intersecante il piano di livello, porterà all'individuazione del secondo estremo del segmento intersezione fra il triangolo stesso e il piano.

Nel caso 3 l'interpolazione non viene effettuata fra gli estremi del lato che giace sul piano di livello, in quanto le equazioni (4) non sarebbero, evidentemente, definite. Tuttavia per i due lati rimanenti del triangolo l'interpolazione porta ancora alla determinazione degli estremi del lato del triangolo giacente sul piano di livello.

Se si verifica il caso 4 si può osservare che le formule di interpolazione (4) non sono definite per nessuna delle tre coppie di vertici del triangolo, ma i tre segmenti di intersezione saranno ugualmente determinati dall'indagine effettuata sulle terne contigue a quella in esame.

Riepilogando, per ogni terna individuante un triangolo, si possono avere due casi:

- a) non ci sono intersezioni fra il triangolo e il piano di livello
- b) si individua uno ed un solo segmento, determinato dai suoi estremi, che rappresenta l'intersezione fra il triangolo e il piano di livello.

Analizzando in questo modo tutti i triangoli componenti la poliedrica, si individuano tutti i segmenti della curva di livello \bar{L}_k .

E' spesso necessario comporre e distinguere le singole spezzate, sia per comodità grafica, sia per poter ricavare da esse alcuni parametri geometrici utili per applicazioni pratiche.

Sorge quindi il problema del "riordinamento" dei segmenti acquisiti.

Per semplicità indichiamo un generico segmento nel seguente modo:

$$A \rightarrow B$$

dove A e B sono i suoi estremi e la freccia indica che il segmento è orientato da A a B. Il procedimento seguito può essere schematizzato nel seguente modo:

- 1 - Si individua un segmento $A \rightarrow B$ che viene assunto come segmento iniziale della spezzata da inseguire
- 2 - Si ricerca un segmento che abbia un estremo coincidente con B. Può essere:
 - 2a- $C \rightarrow B$
 - 2b- $B \rightarrow C$

Nel primo caso si scambiano gli estremi del segmento e poi si procede, come nel caso 2b, alla ricerca di un nuovo segmento che abbia un estremo coincidente con C.

In pratica questo modo di procedere consiste nel "congiungere" segmenti consecutivi, aventi cioè due estremi coincidenti, che sono stati acquisiti in maniera non ordinata scandendo da sinistra a destra e dal basso verso l'alto il dominio \bar{D} (fig. 3, 4 e 5).

Con questa tecnica di scansione, infatti, si acquisiscono uno dopo l'altro segmenti appartenenti a differenti spezzate; il riordinamento comunque è reso possibile dal fatto che ogni lato di ciascun triangolo appartiene a due triangoli contigui e viene quindi esaminato due volte. Ciascun segmento della spezzata di livello avrà dunque un estremo

coincidente con l'estremo del segmento contiguo.

3 - Al termine dell'inseguimento si possono verificare due ca
si:

3a- Si trova un segmento un cui estremo coincide con A. Questo
significa che la spezzata è chiusa.

3b- Non ci sono più segmenti che soddisfino le richieste del
punto 2.

Questo significa che la spezzata è aperta.

In entrambi i casi si può considerare concluso l'inseguimento relativo alla data spezzata e si può iniziare l'ordinamento di un'altra.

4. CONCLUSIONI ED ESEMPI

Questo algoritmo è stato sviluppato nell'ambito del Progetto Finalizzato Informatica P2 Obiettivo Territorio, ed è stato anche applicato con successo nella misura automatica di gocce fotografate da un getto liquido atomizzato, nell'ambito di una ricerca in corso presso il Dipartimento di Ingegneria Chimica dell' Università di Pisa per la diagnostica di spray di combustibili liquidi.

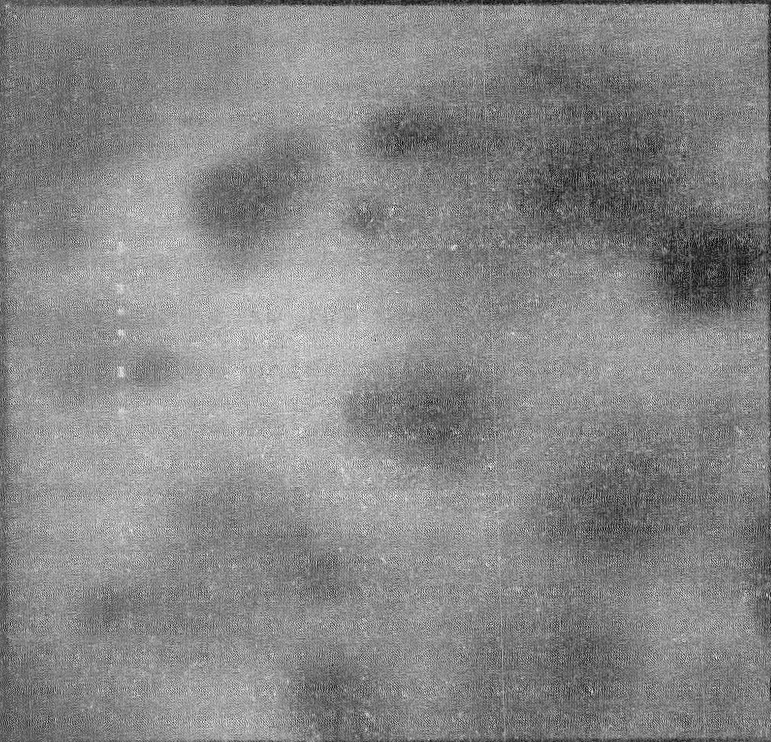
Tale ricerca, per la parte relativa all'analisi di immagini, è stata sviluppata presso l'Istituto di Elaborazione dell'Informazione del C.N.R. di Pisa.

A verifica dei risultati ottenuti dall'implementazione su computer HP 21 MX dell'algoritmo, riportiamo qui di seguito alcuni esempi.

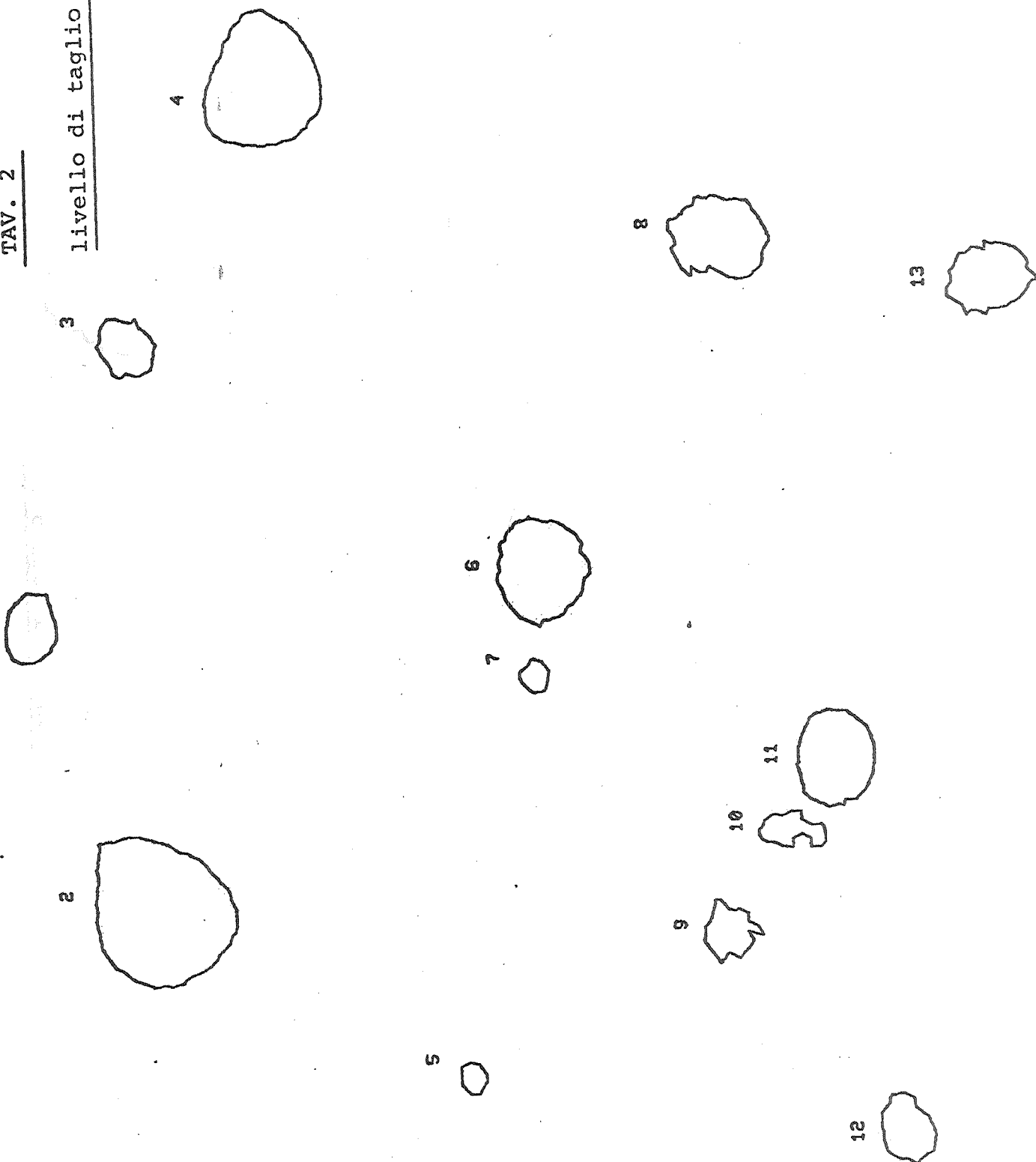
Nella Tav.1 si può osservare l'immagine originale di gocce fotografate da un getto liquido atomizzato. Questo fotogramma è stato digitalizzato col sistema SADAF2 dell'I.E.I. e acquisito sotto forma di matrice. Gli elementi della matrice possono assumere valori interi compresi fra 0 e 255 (livelli di grigio) ottenuti quantizzando i valori di densità ottica (compresi fra 0 e 2) o di trasparenza (compresi fra 0 e 1) risultanti dalla digitalizzazione.

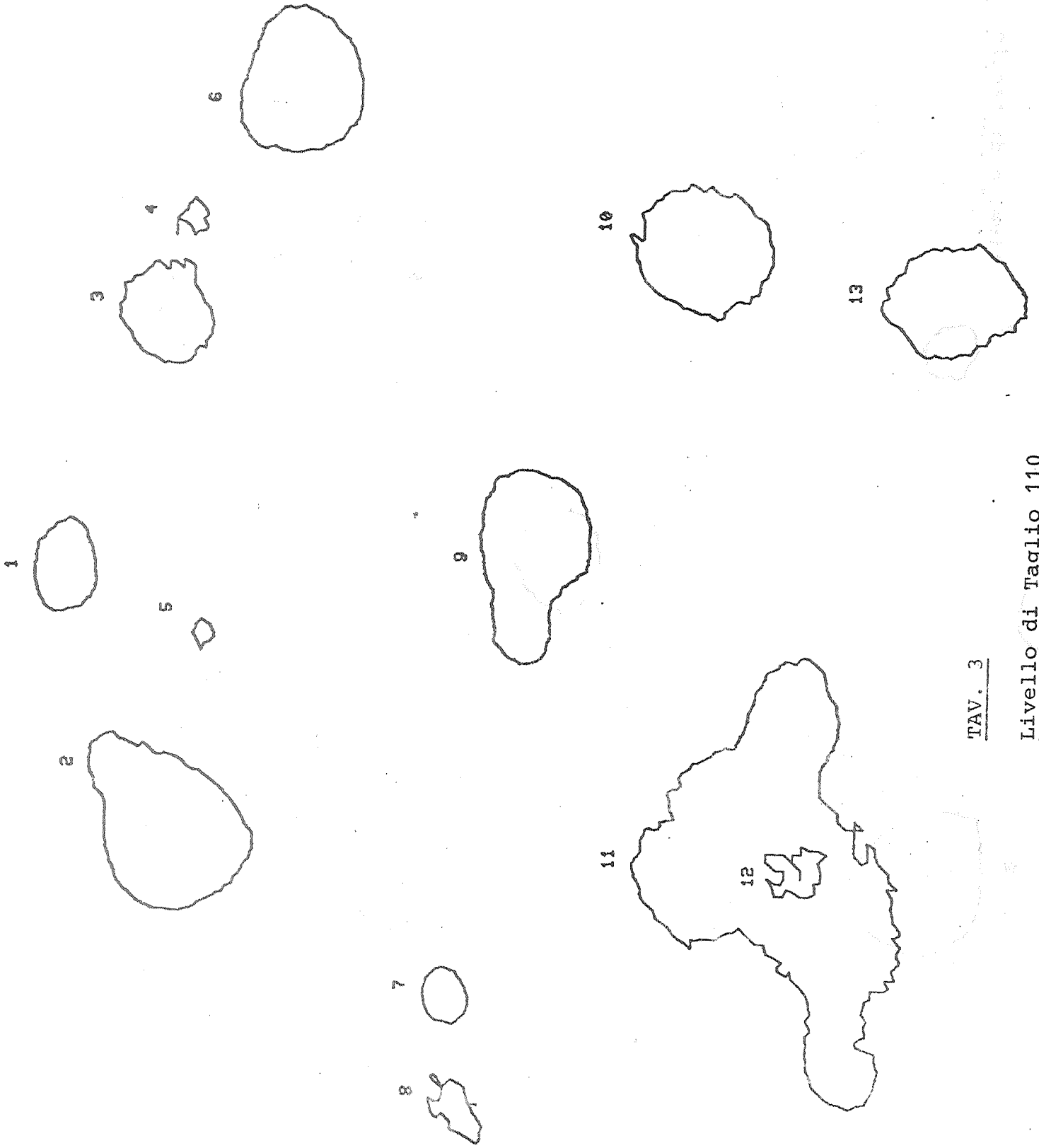
Nelle tavole seguenti sono riportati i plottaggi del risultato dell'inseguimento dei contorni a vari livelli di grigio.

Sono state prese in considerazione soltanto curve chiuse.



TAU. 1





TAV. 3

Livello di Taglio 110

Bibliografia

- 1) Pratt W.R.: "Digital Image Processing" (1978) J.Wiley & Sons
New York
- 2) Rosenfeld A., Kak A.C.: "Digital Picture Processing" (1976)
Academic Press New York
- 3) Duda R.O., Hart P.E.: "Pattern Classification and Scene
Analysis" (1973) Wiley-Interscience New York
- 4) Stoer J.: "Introduzione all'Analisi Numerica" (1974) Zanichelli Bologna
- 5) Ahlberg J., Nilson E., Walsh J.: "The Theory of the Splines
and their Applications" (1967) Academic Press New York
- 6) Greville T.N.E.: "Theory and Applications of Spline functions"
(1969) Academic Press New York