Consiglio Nazionale delle Ricerche
ISTITUTO DI ELABORAZIONE DELLA INFORMAZIONE
PISA

Pubblicazione n. A 73-14

G. GHELARDONI - G. LOMBARDI

DIRAMAZIONE DI SOLUZIONI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE NON LINEARI

Estratto da: Atti del Convegno UMI su « Rapporti tra ricerca matematica pura e ricerca matematica applicata » (Siena, settembre, 1973).

DIRAMAZIONE DI SOLUZIONI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE NON LINEARI.

Giuseppe Ghelardoni (1) - Giovanni Lombardi (2)

(breve sintesi del lavoro inviato a "Rendiconti di Matematica" Università di Roma, il 20 Giugno 1973).

Consideriamo il problema differenziale ordinario

(1) $w'' + \lambda w = g(w)w'^2 \qquad , \qquad w \in U$

($g(u)$ funzione analitica; U classe delle funzioni $w(x)$ reali, continue in $[0,1]$, ivi dotate di derivata seconda a quadrato integrabile, tali che $w(0) = w(1) = 0$), che contiene come caso particolare un problema già suggerito da G. Capriz come modello di fenomeni di instabilità.

Sia $\bar{U}$ la classe di funzioni $w(x)$ chiusura della classe U rispetto alla norma

$$\|w\| = \left[\int_{(0,1)} w^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{(0,1)} (w')^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{(0,1)} (w'')^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Introdotte in $\bar{U}$ il prodotto scalare

(2) $$((u,v)) = \int_{(0,1)} u'.v' \, dx \qquad (u,v \in \bar{U})$$

definiamo (in $\bar{U}$ gli operatori L (lineare) e T (non lineare) attraverso le uguaglianze:

$$((Lu,v)) = (u,v) = \int_{(0,1)} uvdx,$$

$$((Tu,v)) = -(g(u)\,u'^2,v) = - \int_{(0,1)} g(u)u'^2 \, vdx;$$

---

(1) Università degli Studi di Pisa. Facoltà Ingegneria.

(2) Istituto di Elaborazione della Informazione. C.N.R. Pisa

si verifica facilmente che ogni funzione soluzione di (1) è anche soluzione del problema (forma debole del problema (1))

(3) $w = \lambda L \ w + T \ w \qquad w \in \bar{U}.$

Procediamo ad una trasformazione del problema (3). Introduciamo a questo scopo gli operatori:

$$L_m = L - \frac{1}{\lambda_m}((\varphi_m, \cdot))\varphi_m$$

dove $\lambda_m = m^2\pi^2$ è un valore caratteristico, $\varphi_m = \sqrt{\frac{2}{\lambda_m}}$ sen $(\sqrt{\lambda_m}x)$ è autofunzione del problema $w = \lambda_m Lw$, scelta in modo che $((\varphi_m, \varphi_m)) = 1$;

$$R(\lambda_m) = (I - \lambda_m L_m)^{-1};$$

$$\tilde{L}_m = R(\lambda_m)L_m; \quad \tilde{T}_m = R(\lambda_m)\ T,$$

e poniamo

$$\lambda = \lambda_m + \tau; \quad = \frac{\lambda}{\lambda_m}((\varphi_m, w));$$

il problema (3) si trasforma nel seguente

$$(4)\begin{cases} w = \zeta\varphi_m + \tau\tilde{L}_m \ w + \tilde{T}_m \ w \\ \\ \frac{\tau}{\lambda}\zeta + ((Tw, \varphi_m)) = 0. \end{cases}$$

Se la prima equazione può essere risolta iterativamente (almeno per $|\zeta| < \zeta_0$, $|\tau| < \tau_0$, ζ_0, τ_0 essendo numeri positivi opportuni), la soluzione si ottiene come serie di potenze in ζ e τ: sostituendo (nella seconda equazione) w con la serie ottenuta si ha una equazione trascendente (equazione di biforcazione) che permette di determinare il numero delle soluzioni del sistema e perciò del problema (3) (ed anche, per noti teoremi di regolarizzazione, del problema (1)).

Si può dimostrare agevolmente che, se sono verificate le seguenti condizioni:

a) $u \in \bar{U},\ \|u\| < \delta_0 \Longrightarrow \|T\, u\| < t\,\delta_0^h$

(t reale > 0, $h > 1$, entrambi indipendenti da u)

b) $u_1, u_2 \in \bar{U},\ \|u_1\| < \delta_0, \|u_2\| < \delta_0 \Longrightarrow \|T\, u_1 - T\, u_2\| < (H+1)\ t\,\delta_0^{h-1} \|u_1 - u_2\|$

($H > 0$, indipendente da u_1 e u_2),

esistono un ζ_0, un τ_0, un δ_0 positivi tali che per ogni coppia ζ, τ di numeri reali verificanti le limitazioni $|\zeta| < \zeta_0$, $|\tau| < \tau_0$ il processo iterativo

$$(5)\quad \begin{cases} w^{(r+1)} = \zeta\varphi_m + \tau\tilde{L}_m w^{(r)} + T_m\, w^{(r)}, r = 0,1,\dots, \\ \\ w^{(0)} = \zeta\varphi_m \end{cases}$$

converga verso una funzione w^*, unica soluzione della prima equazione del sistema (4) nella sfera $\|u\| \leq \delta_0$.

Prendiamo in considerazione i tre casi particolari

$g(w) = 1;\qquad g(w) = w;\qquad g(w) = -w.$

La considerazione dell'equazione differenziale

$w'' + \lambda w = g(w)\ w'^2$,

w appartenendo alla classe V delle funzioni continue con le loro derivate prima e seconda in $[0,1]$ conduce, posto $u=w'$, ad una equazione differenziale del primo ordine nella funzione incognita $u(w)$ e quindi ad una famiglia di curve dello spazio delle fasi w,u: in corrispondenza alle tre particolarizzazioni di g(w), si hanno, come equazioni di tali famiglie di curve, ordinatamente:

$$u^2 = \lambda(w + \frac{1}{2}) - c\, e^{2w};$$
$$u^2 = \lambda + c\, e^{w^2};$$
$$u^2 = -\lambda + c\, e^{-w^2}.$$

Considerazioni elementari conducono ad imporre, per l'esistenza di soluzioni del problema (1), la condizione $\lambda > 0$; le curve dello spazio delle fasi associate ad (eventuali) soluzioni (sempre del problema (1)) corrispondono inoltre a valori di $c \in (-\infty, \frac{\lambda}{2})$ nel primo caso, a valori di $c \in (-\lambda, 0)$ nel secondo caso, a valori di $c \in (\lambda, +\infty)$ nel terzo caso.

Il metodi indicato per risolvere il problema nella sua forma debole conduce alle seguenti equazioni di biforcazione:

$$\zeta = \frac{3\tau}{4\sqrt{2}} + t.\sigma.s. \qquad (g(w) = 1,\ m \text{ dispari});$$
$$\zeta^2 = \frac{3\tau}{2} + t.\sigma.s. \qquad (g(w) = 1,\ m \text{ pari});$$
$$\zeta^2 = 2\tau + t.\sigma.s. \qquad (g(w) = w);$$
$$\zeta^2 = -2\tau + t.\sigma.s. \qquad (g(w) = -w);$$

per cui soltanto quando $g(w) = 1$ e m dispari λ può essere indifferentemente maggiore o minore di λ_m; λ deve essere invece maggiore di λ_m sia nel caso $g(w) = 1$ e m pari, che nel caso $g(w) = w$, ed infine deve essere $\lambda < \lambda_m$ quando $g(w) = -w$.

Con semplici calcoli si ricavano poi le successive funzioni $w^{(r)}(x)$ del processo iterativo (5): già $w^{(1)}(x)$ dà una ottima approssimazione della soluzione del problema (3) (almeno per λ abbastanza vicino a λ_m).

Detto x il minimo valore positivo di x sede di estremo per la funzione $w(x) \in V$ soluzione del problema di valori iniziali

$$\begin{cases} w'' + \lambda w = g(w)\, w'^2 \\ w(0) = 0,\ w'(0) = u_0 \neq 0, \end{cases}$$

e indicato con w_e il numero $w(x_e)$ (w_e è manifestamente $\gtrless 0$ secondo che, è $u_0 \gtrless 0$), consideriamo la funzione

$$F(\lambda, w_e) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \displaystyle\int_0^{w_e} \dfrac{dw}{|u|} & \text{se } u_0 < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \displaystyle\int_0^{w_e} \dfrac{dw}{|u|} & \text{se } u_0 > 0, \end{cases}$$

prolungandola per continuità al valore $u_0=0$ ($F(\lambda,0)= \dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$): $|u|$ è ricavato dalla equazione delle curve dello spazio delle fasi ove c è sostituito dalla soluzione delle equazioni in c che si ottiene imponendo che sia $u(x_e) = 0$.

Tale funzione $F(\lambda, w_e)$, nei casi $g(w) = w$, $g(w) = -w$ è, per ogni $\lambda > 0$, funzione pari di w_e, non altrettanto accade nel caso $g(w) = 1$; inoltre, in questo caso, per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$\lim_{w_e \to -\infty} F(\lambda, w_e) = 0, \quad \lim_{w_e \to +\infty} F(\lambda, w_e) = +\infty .$$

Nei casi $g(w) = w$, $g(w) = -w$ la simmetria rispetto a ciascuno dei due assi w ed u delle curve dello spazio delle fasi permette senz'altro di affermare che l'intersezione della superficie $z = F(\lambda, w_e)$ col piano $z = \frac{1}{2m}$, proiettata sul piano (λ, w_e), approssima per λ sufficientemente vicino a λ_m ($\lambda > \lambda_m$ se $g(w) = w$, $\lambda < \lambda_m$ se $g(w) = -w$) la curva che dà w_e in funzione di λ.

Nel caso, invece di $g(w) = 1$, la mancanza di simmetria rispetto all'asse u da parte delle curve dello spazio della fase, giustifica come la curva che dà w_e in funzione di sia da pensarsi approssimata, per λ "vicino" a λ_m, dalla suddetta proiezione quando m è dispari ($\lambda \gtrless \lambda_m$) ma non quando m è pari ($\lambda > \lambda_m$).

Rileviamo infine come la ricerca di approssimazione delle soluzioni non banali dei problemi ora indicati possa essere condotta anche con procedimenti di discretizzazione.