Consiglio Nazionale delle Ricerche

ISTITUTO DI ELABORAZIONE DELLA INFORMAZIONE

PISA

CARATTERIZZAZIONE DEL FENOMENO DELLO SCATTERING CON PARTICOLARE RIFERIMENTO AL PROBLEMA INVERSO ED APPLICAZIONI ALL'IMAGING DIFFRATTIVO

E.A.Salerno

nota interna B4 - Ø4

Febbraio 1988

CARATTERIZZAZIONE DEL FENOMENO DELLO SCATTERING CON PARTICOLARE RIFERIMENTO AL PROBLEMA INVERSO ED APPLICAZIONI ALL'IMAGING DIFFRATTIVO

E. A. Salerno

Istituto di Elaborazione dell'Informazione

Via S. Maria, 46, 56100 PISA

1. INTRODUZIONE

Ogni onda (sia essa di tipo scalare, come le onde sonore, o vettoriale, come le onde elettromagnetiche) che si propaga in un mezzo in cui incontra degli ostacoli (ovvero delle disomogeneita' nelle caratteristiche propagative) subisce degli effetti che si indicano globalmente come fenomeni di DIFFRAZIONE.

Il significato originale di questo termine era quello di "piccole deviazioni dalla propagazione rettilinea", ovvero piccole differenze di comportamento rispetto alle previsioni delle usuali leggi dell'ottica geometrica. Queste deviazioni rimangono piccole solo quando gli ostacoli che si frappongono al cammino dell'onda sono di grandi dimensioni rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione che li investe, e si considerano solo piccoli angoli di deviazione dalla propagazione rettilinea. Entro questo campo di validita' le leggi della diffrazione rimangono le stesse sia per le onde scalari che per quelle vettoriali, indipendentemente dal loro stato di polarizzazione; inoltre, se gli ostacoli sono opachi alla radiazione, la diffrazione non dipende dal materiale di cui sono composti e dalla loro forma, ma solo dalla forma della loro ombra geometrica ([63], pag. 25).

In generale per diffrazione si intende oggi la propagazione di un'onda in presenza di ostacoli di qualsiasi dimensione e tipo. In questo caso le leggi dell'ottica geometrica perdono totalmente la loro validita' e i fenomeni che hanno luogo possono essere studiati esattamente solo per mezzo delle equazioni delle onde, ovvero solo risolvendo esattamente le equazioni di Maxwell per le date condizioni al contorno. Naturalmente cio' e' possibile solo quando gli ostacoli sono di forma estremamente semplice. In questa accezione piu' generale, piuttosto che di diffrazione si preferisce parlare di SCATTERING, anche se, quando non c'e' possibilita' di equivoco, i due termini sono normalmente intercambiabili.

Nel seguito il problema dello scattering verra' preso in esame distinguendo tra due possibilita':

- riuscire a ricavare la perturbazione subita da un campo incidente noto per effetto degli ostacoli che esso investe, le cui caratteristiche sono note (problema diretto);
- conoscendo il campo diffratto in un determinato sottospazio, ricavare la forma e la natura materiale degli ostacoli da cui e' stato prodotto (problema inverso).

Il problema che sara' maggiormente oggetto di attenzione sara' quello inverso, essendo legato all'interessante argomento dell'imaging diffrattivo (Radar ad Apertura Sintetica, Tomografia Ricostruttiva a Microonde o Ultrasuoni, Telerilevamento, Radioastronomia, Misure non Invasive), mentre il problema diretto sara' trattato solo per inquadrare i termini generali della questione e per porre in evidenza il fatto che c'e' un'importante differenza tra i due casi e che, a causa di essa, il problema inverso si presenta alquanto piu' complicato di quello diretto.

Una formula di diffrazione e' una relazione integrale che vale per una funzione di campo che soddisfa l'equazione delle onde [63 pag. 25] e che include anche una funzione caratterizzante il corpo diffrangente. Una di tali formule, valida se il corpo e' caratterizzato da un indice di rifrazione variabile $n(\underline{r})$ definito entro un volume finito W dotato di frontiera non discreta, deriva dalla soluzione di un'equazione di Helmholtz omogenea [6, 8, 17, 19, 20, 21, 53, 59, 60, 61, 63 pag. 197]:

$$\nabla^2 u + n^2 k^2 u = 0 \qquad (1a)$$

$$\nabla^2 u_0 + k^2 u_0 = 0 \qquad (1b)$$

in cui u e' il campo totale, funzione del punto nello spazio, dato dalla somma dei campi incidente u_0 e diffratto o di scattering u_s:

$$u = u_0 + u_s \qquad (1c)$$

e k e' la costante di propagazione relativa al mezzo in cui e' immerso il corpo. Sfruttando (1c) e sottraendo membro a membro la (1b) dalla (1a), si ha:

$$\nabla^2 u_{sc} + k^2 u_{sc} = k^2(1 - n^2)u \qquad (1d)$$

la cui soluzione soddisfa anche all'equazione integrale [54, app. IV]:

$$u_{sc}(\underline{r}) = -1/(4\pi) \int \frac{\exp\{jk|\underline{r} - \underline{R}|\}}{|\underline{r} - \underline{R}|} f(\underline{R})\, u(\underline{R})\, d\underline{R} \qquad (2a)$$

in cui si e' posto

$$f(\underline{R}) = k^2(1 - n(\underline{R})^2) \qquad (2b);$$

l'integrale e' calcolato entro il volume W, essendo $\underline{r}$ il vettore posizione, $\underline{r}$ = (x, y, z). La funzione f(x,y,z) e' detta "densita' di riflettivita'" [1, 11, 39, 50], o, meglio, "potenziale di scattering" [53].

Le equazioni (1) sono riportate in forma scalare, ma la loro validita' si estende anche a onde di tipo vettoriale. La soluzione della (2a) non e' per niente semplice, perche' essa presuppone la conoscenza del campo totale u all'interno del corpo diffrangente, che invece, in generale, non e' noto. Per riuscire a ricavare il campo diffratto bisogna quindi ricorrere a delle approssimazioni piu' o meno pesanti, una delle quali e' la prima approssimazione di Born, di cui ci si occupera' diffusamente, e consiste nel considerare il campo totale all'interno del corpo uguale al campo incidente indisturbato. Fatta questa approssimazione il campo diffratto in ogni punto al di fuori del corpo diffrangente puo' essere calcolato facilmente dall'equazione (2a). Considerare il campo totale praticamente uguale al campo incidente equivale a dire che il campo diffratto all'interno del corpo e' trascurabile rispetto al campo incidente, cioe' che il corpo e' debolmente diffrangente.

Siamo ancora nell'ambito del problema diffrattivo diretto, ma considerare le possibili soluzioni della (2a), e in particolare quella derivata dalla prima approssimazione di Born, e' importante perche' su di esse si basano gli algoritmi di ricostruzione per le tecniche di tomografia diffrattiva. Il fatto che un corpo debba essere debolmente diffrangente per l'applicabilita' dell' approssimazione di Born pone delle serie limitazioni alle possibilita' dell'imaging diffrattivo. Quando questa ipotesi non e' sufficientemente giustificata nella realta' le immagini ricostruite con queste tecniche subiscono delle distorsioni piu' o meno gravi a seconda della maggiore o minore violazione dei requisiti di debole diffrangenza [61]. Il modo di ovviare a questi inconvenienti puo' essere basato su azioni correttive nell'ambito dello stesso algoritmo di Born [49, 50], oppure cercando delle soluzioni della (2a) su cui basare algoritmi ricostruttivi piu' efficaci [23, 28, 35, 55, 59, 61].

La soluzione delle equazioni di Maxwell, quando non siano verificate tutte le condizioni che rendono valida l'equazione scalare (1d) mostra che in generale un'onda elettromagnetica (per sua natura di tipo vettoriale), diffratta da un ostacolo, subisce una depolarizzazione. Avendo un campo incidente in polarizzazione lineare, e riuscendo a misurare la componente in polarizzazione incrociata del campo diffratto si intravede [54 cap. 3, 66] la possibiblita' di operare una correzione delle distorsioni prodotte nelle immagini ottenute dall'applicazione dell'algoritmo di Born per onde scalari alla soluzione del problema inverso.

Per quanto riguarda il problema inverso le difficolta' che si devono superare sono innanzi tutto di tipo teorico e riguardano l'unicita' della soluzione [20, 21, 53]: si vedra' che il problema inverso ammette una soluzione unica solo sotto ben precise condizioni. Il fatto poi che esistano dei teoremi esistenza e unicita' della soluzione non vuol dire affatto che tale soluzione sia facilmente ottenibile in pratica.

Una volta trovato il legame che c'e' tra i dati diffrattivi e la funzione oggetto si apre il campo alle applicazioni nell'ambito delle varie tecniche di imaging diffrattivo. Dal punto di vista hardware le soluzioni realizzative possono essere diversissime, a seconda della tecnologia realizzativa (ultrasuoni o microonde, mezzi di calcolo di tipo generale o dedicato), del particolare tipo di imaging da realizzare, e anche degli algoritmi ricostruttivi e del software che si intende adottare. Ogni tipo di apprestamento hardware presenta quindi vantaggi e svantaggi diversi sotto svariati punti di vista, e richiede l'adozione di accorgimenti tecnici di vario tipo. Per quanto riguarda il software, esso puo' ovviamente essere realizzato a partire da software standard oppure approntato ad hoc; le differenze piu' evidenti che si riscontrano da un caso all'altro sono pero', naturalmente, dovute al tipo di algoritmo ricostruttivo che viene adottato. Gli algoritmi ricostruttivi variano innanzi tutto per le diverse modalita' di acquisizione dei dati; fondamentalmente i due tipi di modalita' diversi possono essere quello di trasmissione (o "forward scattering" [1, 6, 8, 14, 17, 24, 40, 42, 50, 54]), in cui viene misurato il campo diffratto in avanti dall'oggetto illuminato dalla radiazione incidente, e quello di riflessione (o "backscattering" [1, 7-15, 26, 27, 30, 31, 36-39, 43, 58]) in cui si misura la quota del campo incidente che viene diffusa all'indietro dall'oggetto in esame. Ogni diversa modalita' di acquisizione porta alla conoscenza di una determinata porzione dello spettro di Fourier della funzione oggetto. La ricostruzione dell'immagine dell'oggetto si basera' quindi su questa conoscenza; i tipi di algoritmi che assolvono a questo compito possono essere bi-tridimensionali (p. es. in [1]) o intrinsecamente bidimensionali (p. es. [39]); inoltre si possono avere algoritmi basati su procedure interpolative da applicare ai dati disponibili al fine di poter utilizzare routines standard di trasformazione veloce [2, 3, 6, 8, 42, 50], oppure algoritmi che non hanno bisogno di questo passo [1, 11, 14, 26, 39, 45].

Una panoramica abbastanza vasta sull'imaging diffrattivo con particolare riferimento al caso degli ultrasuoni si puo' trovare in [59]; in [21, 32-34, 48] si prendono in esame diversi tipi di algoritmi ricostruttivi e di procedure software associate; si possono trovare dei confronti tra le efficienze di algoritmi basati o meno su interpolazioni bi- o tridimensionali.

Nel caso presente l'interesse nel campo applicativo sara' ristretto alle sole tecniche di tomografia coerente, che possono trovare degli impieghi, oltre che in campo clinico, anche nelle misure non invasive, per esempio per il controllo di qualita' in manufatti industriali.

2. SCATTERING DIRETTO

a) Validita' dell'equazione di Helmholtz.

Allo scopo di derivare le equazioni (1) e vedere a quali condizioni sono valide si considerino le equazioni di Maxwell nella loro forma differenziale, ipotizzando un mezzo isotropo, privo di cariche libere (densita' di carica $\rho = 0$), di conducibilita' $\sigma(\underline{r};t)$, permittivita' $\epsilon(\underline{r},t)$, permeabilita' magnetica $\mu(\underline{r},t)$:

$$\text{rot}\ \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} \qquad (3\text{ a})$$

$$\text{rot}\ \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} \qquad (3\text{ b})$$

$$\text{div}\ \underline{B} = 0 \qquad (3\text{ c})$$

$$\text{div}\ \underline{D} = \quad = 0 \qquad (3\text{ d})$$

con

$$\underline{J} = \sigma\, \underline{E} \qquad (4\ a)$$

$$\underline{D} = \epsilon\, \underline{E} \qquad (4\ b)$$

$$\underline{B} = \mu\, \underline{H} \qquad (4\ c)$$

con i consueti simboli indicanti i campi elettrico e magnetico, il vettore induzione magnetica, le correnti di spostamento e di conduzione e gli operatori differenziali. Supponendo poi che la distribuzione della permeabilita' magnetica sia omogenea (μ = cost.), e che il mezzo sia stazionario (ϵ, σ e μ indipendenti dal tempo), si ha, eseguendo il rotore di entrambi i membri della (3 b) e tenendo conto della (4 c),

$$\text{rot rot } \underline{E} = - \frac{\partial}{\partial t}(\mu \text{ rot } \underline{H})$$

ovvero, sostituendovi la (3a) e tenendo conto delle (4a) e (4b),

$$\text{rot rot } \underline{E} = - \frac{\partial}{\partial t}(\mu(\sigma\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon\underline{E})))$$

e, per la stazionarieta',

$$\text{rot rot } \underline{E} + \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \underline{E} + \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{E} = \underline{\emptyset} \qquad (5)$$

che, risolta unitamente alla (3 d), fornisce il campo elettrico, mentre il campo magnetico puo' ottenersi dalla (3 b) come:

$$\underline{H} = - \frac{1}{\mu} \int \text{rot } \underline{E}\, dt \qquad (6).$$

Facendo uso di proprieta' note dell'operatore di rotore la (5) diviene:

$$\nabla^2\underline{E} - \text{grad div } \underline{E} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \underline{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{E} = \underline{\emptyset} \qquad (7).$$

Se si suppone di avere un campo elettrico in condizioni di regime sinusoidale di pulsazione $2\pi f$, si puo' passare alla notazione fasoriale ottenendo cosi':

$$\nabla^2\underset{\sim}{E} + K^2(\underline{r})\, \underset{\sim}{E} + \text{grad}(1/\epsilon \text{ grad } \epsilon \cdot \underset{\sim}{E}) = \emptyset \qquad (8),$$

essendo $\underset{\sim}{E}$ un campo vettoriale complesso indipendente dal tempo ottenuto rimuovendo l'esponenziale temporale dal fasore rappresentativo del campo elettrico. La (8) e' stata ottenuta dalla (7) avendo ricavato, dalle (3 d), (4 b) e da ben note relazioni valide per gli operatori differenziali alle derivate parziali

$$\mathrm{div}\ \underline{E} = - 1/\epsilon\ \mathrm{grad}\ \epsilon \cdot \underline{E} \qquad (9)$$

e avendo posto:

$$K^2 = (2\pi f)^2 \mu(\epsilon - j\ \sigma/(2\pi f)) = (2\pi f)^2/c^2 \qquad (10\ a)$$

$$c^2 = 1/(\mu(\epsilon - j\ \sigma/(2\pi f))) \qquad (10\ b).$$

La quantita' K (funzione della posizione) e' detta "numero d'onda", mentre, nel caso di conducibilita' nulla, la quantita' c e' la velocita' di fase dell'onda elettromagnetica; il termine $(\epsilon - j\ \sigma/(2\pi f))$ e' detto "permittivita' complessa".

Tornando alla (7), si supponga ora che sia grad div $\underline{E}$ = 0, ovvero che div $\underline{E}$ sia uniforme. Cio' accade quando il mezzo sia completamente omogeneo, ma anche con una distribuzione qualunque della conducibilita' ed uniforme della permittivita' e della densita' di carica, oppure con distribuzione uniforme di conducibilita', purche' non nulla, e qualunque di permittivita' e di densita' di carica. In questi casi la (8) si trasforma in una relazione vettoriale formalmente identica alla (1 a), con K = nk, formata da tre equazioni indipendenti. Se poi il campo incidente ha polarizzazione lineare, la (8) puo' essere sostituita dalla (1a), applicata alla sola ampiezza complessa del vettore campo elettrico. La sostituzione della (8) con la (1a) e' un'operazione che viene fatta normalmente, anche se le ipotesi sopra indicate non sono verificate, ma le variazioni della permittivita' ϵ sono talmente graduali da poter considerare questa grandezza costante entro lo spazio di alcune lunghezze d'onda [66]. Nel campo dei problemi di propagazione atmosferica delle microonde questa e' senz'altro una ipotesi sensata, ma nel caso della tomografia, in cui si vogliono conoscere le caratteristiche di corpi di ridotte dimensioni, diventa un'ipotesi poco realistica. Nonostante cio' [54] l'equazione scalare (1 a) e' comunemente usata come base per diversi algoritmi ricostruttivi nell'ambito della tomografia a microonde su piccola scala [1, 8, 29, 32, 41, 42, 45, 48, 50, 53, 59]. Inoltre, quando le disomogeneita' del mezzo sono indipendenti da una delle tre coordinate spaziali, cioe' quando il corpo e' costituito da un insieme di cilindri indefiniti con caratteristiche invarianti nel senso di uno degli assi coordinati, e ci si riconduce quindi a un caso bidimensionale, non si ha alcuna depolarizzazione e la (1 a) vale in maniera rigorosa.

In casi piu' generali il termine aggiuntivo presente nella (8) rende le tre equazioni scalari non piu' indipendenti, causando depolarizzazione del campo incidente.

Prima di proseguire si riassumono qui di seguito le condizioni poste per poter passare dalle equazioni di Maxwell all'equazione di Helmholtz:

- mezzo isotropo;
- mezzo stazionario;
- densita' di carica libera nulla;
- permeabilita' magnetica del mezzo uniforme;
- campo elettrico in regime sinusoidale a pulsazione $2\pi f$;
- conducibiblita' del mezzo uniforme e non nulla, oppure variazioni graduali della permittivita'.

b) Trasformazioni ed Approssimazioni.

Si torni ora alle equazioni scalari (1 a,b) e si indichi con $\alpha(\underline{r})$ il campo scalare risultante dal rapporto punto per punto tra il campo perturbato risultante $u(\underline{r})$, soluzione della (1 a), e il campo di illuminazione $u_0(r)$, soluzione della (1 b):

$$\alpha = u/u_0 \qquad (11)$$

e con $g(\alpha)$ una generica funzione regolare scalare della variabile α e si ponga:

$$\Phi_1 = u_0\, g(\alpha) \qquad (12).$$

Applicando la (1 b), la (12), la (11), la (1 d) e relazioni note per gli operatori differenziali si ottiene [54, par. I.5]:

$$\nabla^2\Phi_1 + k^2\Phi_1 = \left(|\mathrm{grad}\ \alpha|^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} g(\alpha) + f(r)\ \alpha \frac{d}{d\alpha} g(\alpha)\right) u_0 \qquad (13)$$

in cui compare la funzione oggetto $f(\underline{r})$ come da (2 b).

La (13) rappresenta una classe di equazioni equivalenti alla (1 a) ottenute per mezzo della trasformazione (12) e quindi dipendenti dalla particolare forma della funzione $g(\alpha)$. Nella (13) la funzione oggetto appare distorta da un termine additivo d_a e da un termine moltiplicativo d_m, entrambi incogniti, visto che lo e'

α, dato dalla (11).

$$d_{ad} = |\text{grad } \alpha|^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} g(\alpha) \qquad (14)$$

$$d_{m} = \alpha \frac{d}{d\alpha} g(\alpha) \qquad (15).$$

Ogni trasformazione del tipo (12) che debba poter essere sfruttata per la risoluzione esatta della (13) deve essere in grado di ridurre questi due termini a delle costanti note. Se si riesce invece a ottenere che cio' sia vero solo approssimativamente si puo' giungere a una soluzione approssimata della (13) e quindi della (1 a).

Si consideri adesso la trasformazione di Born, consistente nel porre, nella (12):

$$g(\alpha) = \alpha - 1 \qquad (16).$$

Si vede immediatamente dalla (14) che con questa posizione il termine distorcente additivo si annulla, ma rimane il termine moltiplicativo uguale ad α, incognito perche dipendente da u. L'approssimazione di Born del primo ordine, cui si e' accennato nell'introduzione, consiste nel porre $\alpha = 1$, ottenendo cosi', dalle (12), (13) e (16), tenendo conto anche delle (1 b) e (1 c):

$$\nabla^2 u_{1B} + k^2 u_{1B} = f(r)\, u_{(i)} \qquad (17);$$

si e' cosi' riottenuta l'equazione (1 d) con al secondo membro il termine noto $u_{(i)}$ in luogo dell'incognita u.

Naturalmente la (17) poteva essere ottenuta con procedimento ben piu' semplice di quello mostrato, che si poteva vedere facilmente anche dalle brevi considerazioni dell'introduzione; si e' voluto pero' inquadrare la prima approssimazione di Born nel contesto piu' generale delle trasformazioni e approssimazioni al fine di mettere in grado, mediante la (13), di valutare altre possibili trasformazioni e relative approssimazioni.

c) Funzione di Green per l'Equazione Scalare di Helmholtz nello Spazio Tridimensionale Illimitato [54].

Ammesso che la (17) sia valida, si da' ora un accenno su come si arrivi alla (2a) per la sua risoluzione nell'ambito del problema diretto.

Si voglia risolvere in un dato volume W, con assegnate condizioni al contorno, un'equazione scalare inomogenea di Helmholtz, cioe' del tipo (17):

$$\nabla^2 u(\underline{r}) + k^2 u(\underline{r}) = - d(\underline{r}) \qquad (18)$$

con u funzione incognita della posizione, k costante e d campo scalare assegnato funzione della posizione (campo sorgente). Se con $g(\underline{r})$ (funzione di Green) si indica la generica soluzione dell'equazione, associata a una sorgente puntiforme posta nell'origine del sistema di riferimento, la (18) si trasforma nel modo seguente:

$$\nabla^2 g(\underline{r}) + k^2 g(\underline{r}) = - \delta(\underline{r}) \qquad (19),$$

dove $\delta(\underline{r})$ e' l'impulso di Dirac tridimensionale. La $g(\underline{r})$ puo' quindi essere vista come la risposta impulsiva del sistema e, intuitivamente si puo' ritenere verosimile che la soluzione della (18) per una sorgente distribuita d sia data da una opportuna combinazione lineare di funzioni di Green. Se anziche' nell'origine la sorgente puntiforme e' posta in un punto $\underline{R}$ la (19) diviene:

$$\nabla^2 g(\underline{r} - \underline{R}) + k^2 g(\underline{r} - \underline{R}) = - \delta(\underline{r} - \underline{R}) \qquad (20).$$

Moltiplicando la (18) per $g(\underline{r} - \underline{R})$ e la (20) per $u(\underline{r})$ e sottraendo membro a membro si ottiene:

$$g(\underline{r} - \underline{R})\nabla^2 u(\underline{r}) - u(\underline{r})\nabla^2 g(\underline{r} - \underline{R}) = -d(\underline{r})g(\underline{r} - \underline{R}) + u(\underline{r})\delta(\underline{r} - \underline{R})$$

che, integrando ambo i membri sull'intero volume W fornisce

$$\int (g(\underline{r} - \underline{R})\nabla^2 u(\underline{r}) - u(\underline{r})\nabla^2 g(\underline{r} - \underline{R}))\, d\underline{r} = - \int d(\underline{r})g(\underline{r} - \underline{R})\, d\underline{r} + u(\underline{R})$$

(21).

L'integrale al primo membro puo' essere ricondotto a un integrale di superficie sulla frontiera di W per mezzo del teorema di Green, tenendo anche presente che l'integrando e' uguale a:

$$I(\underline{r}) = \mathrm{div}[g(\underline{r} - \underline{R})\ \mathrm{grad}\ u(\underline{r}) - u(\underline{r})\ \mathrm{grad}\ g(\underline{r} - \underline{R})].$$

Se il mezzo e' illimitato si puo' considerare come frontiera di W una sfera di raggio talmente grande da poter ritenere nulli sulla sua superficie sia la soluzione u che il suo gradiente quando il campo sorgente d sia identicamente nullo al di fuori di una regione finita. In questo caso l'integrale di superficie e' nullo e dalla (21) si ottiene:

$$u(\underline{R}) = \int d(\underline{r})\ g(\underline{r} - \underline{R})\ d\underline{r} \qquad (22).$$

La (22) mostra come la soluzione $u(\underline{R})$ sia data dalla risultante delle sorgenti elementari $d \cdot d\underline{r}$ moltiplicate per le relative funzioni di Green.

Si puo' verificare [54] che la funzione:

$$g(\underline{r}) = \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \qquad (23),$$

in cui r e' il modulo di $\underline{r}$, e' soluzione della (19) e, sostituita nella (22), restituisce la soluzione nella forma (2a).

3. PROBLEMA INVERSO

La risoluzione dell'equazione integrale (2a) con la funzione f(x,y,z) come incognita, quando sia noto il campo diffratto u_s, costituisce, come gia' accennato, il "problema inverso". Naturalmente il campo diffratto puo' essere conosciuto, da misure dirette, solamente nella regione esterna al corpo scatterante; da qui la necessita' di adoperare la (2a) sotto una opportuna approssimazione. Ad esempio la prima approssimazione di Born consiste nel sostituire al campo totale u nella funzione integranda il campo incidente u_0 considerandolo molto maggiore di u_s. Inoltre nella pratica non sara' possibile, e, come si vedra', neanche necessario, considerare il campo in tutto lo spazio esterno al corpo, ma solo in una sua restrizione che, una volta scelta, condizionera' i calcoli necessari per la ricostruzione della funzione oggetto (vedere per esempio [1] o [39]), ma non l'accuratezza teorica di tale ricostruzione.

a) Completezza dell'Informazione.

Nel caso di onda scalare soddisfacente alle ipotesi di base gia' poste si dimostrera' che la conoscenza del solo diagramma di radiazione, cioe' dei soli dati di campo lontano, e' equivalente alla conoscenza del campo in tutti i punti dello spazio esterni alla regione in cui e' localizzata la funzione potenziale di scattering. Questa proprieta' del diagramma di radiazione non vale solo per campi scalari, ma, come si dimostra in [19], anche per campi vettoriali. La presente dimostrazione non ha la pretesa di essere rigorosa, ma servira' per avere un'idea intuitiva di come vanno le cose.

Si consideri la soluzione all'equazione inomogenea di Helmholtz nella forma (2a), qui riportata per comodita'

$$u_{s}(\underline{r}) = -1/(4\pi) \int \frac{\exp\{jk|\underline{r} - \underline{R}|\}}{|\underline{r} - \underline{R}|} f(\underline{R})\ u(\underline{R})\ d\underline{R} \qquad (2a).$$

La funzione di Green che compare all'integrando puo' essere scritta come una combinazione di onde piane secondo tutte le direzioni dello spazio, individuate dai relativi coseni direttori, p, q, m. Si ha [1, 19, 42, 54, 59]:

$$\frac{\exp\{jk|\underline{r} - \underline{R}|\}}{|\underline{r} - \underline{R}|} = \frac{jk}{2\pi} \iint \frac{1}{m} \exp\{jk[p(x-X)+q(y-Y)+m|z-Z|]\}\ dp\ dq$$

(24);

le variabili x, y, z sono le componenti del vettore $\underline{r}$, mentre le X, Y, Z sono le componenti del vettore $\underline{R}$.

Sostituendo la (24) nella (2a) si ottiene:

$$u_{s}(\underline{r}) = \frac{jk}{2\pi} \iint A'(p,q,m)\ \exp\{jk(px + qy \pm mz)\}\ dp\ dq \qquad (25)$$

con, supposto $k = 2\pi/\lambda$,

$$A'(p,q,m) = 1/m \int f(\underline{R})\ u(\underline{R})\ \exp\{-jk(pX + qY \pm mZ)\}\ dX\ dY\ dZ =$$

$$= 1/m\ A(p/\lambda,\ q/\lambda,\ \pm m/\lambda) \qquad (26),$$

in cui la funzione A e' la trasformata di Fourier tridimensionale del prodotto tra la funzione potenziale di scattering e il campo totale u, supposto noto, calcolata nelle frequenze spaziali p/λ, q/λ, $\pm m/\lambda$, se queste sono reali, cioe' legate tra loro dalle relazioni:

$$p^2 + q^2 \leq 1 \qquad (27\ a)$$

$$m = \sqrt{1 - p^2 - q^2} \qquad (27\ b).$$

La (25) rappresenta una espansione in onde piane del campo scalare soluzione dell'equazione (1 d), in cui l'ampiezza di ogni onda piana, propagantesi secondo i coseni direttori p, q ed m, e' data dalla (26) ed e' legata nel modo visto alla trasformata di Fourier del potenziale di scattering. Si noti che la (24) vale se l'integrazione e' fatta su tutto il piano p-q, quindi anche per valori immaginari di m. Le onde con p e q soddisfacenti la (27 a) costituiscono la componenete "omogenea" del campo e si propagano in tutte le direzioni dello spazio. Se p e q non soddisfano la (27 a) danno origine alla componente "inomogenea" o "evanescente" del campo [60].

Si supponga adesso di avere, nella (2), $\underline{r} >> \underline{R}$, cioe' di calcolare il campo diffratto in un punto dello spazio molto lontano dal corpo scatterante (ipotesi di campo lontano). In questo caso si ha, se $\underline{v} = \underline{r}/r$ e' il versore associato al vettore $\underline{r}$, di modulo r:

$$|\underline{r} - \underline{R}| \approx r - \underline{R} \cdot \underline{v} \qquad (28).$$

Fatta questa approssimazione, dalla (2) si ottiene:

$$u_\infty(r) = \int f(R)\ u(R)\ \frac{\exp\{ik(r - \underline{R} \cdot \underline{v})\}}{r - \underline{R} \cdot \underline{v}}\ dR \qquad (29)$$

assumendo ora, come e' lecito, il denominatore della frazione all'integrando uguale a r si ha ancora:

$$u_\infty(\underline{r}) = \frac{\exp\{jkr\}}{r} \int f(\underline{R})\ u(\underline{R})\ \exp\{-jk\underline{R}\cdot\underline{v}\}\ d\underline{R} =$$

$$= \frac{\exp\{jkr\}}{r}\ A(\underline{v}/\lambda) \qquad (30).$$

Il campo diffratto lontano e' quindi uguale ad un'onda sferica divergente moltiplicata per una funzione della direzione, ovvero dell'angolo di scattering [63], detta diagramma di radiazione o spettro angolare di scattering.

Si noti adesso che, per la (26), e' $A(\underline{v}/\lambda) = m\, A'(p,q,m)$; la funzione $A'(p,q,m)$ specifica univocamente il campo diffratto in tutti i punti dello spazio esterni al corpo scatterante mediante la (25), quindi la conoscenza del diagramma di radiazione risulta esattamente equivalente alla conoscenza del campo in ogni punto esterno al corpo, trattandosi di funzioni ricavabili l'una per mezzo dell'altra.

b) Unicita' della Soluzione nell'Approssimazione di Born.

Si supponga che il campo incidente sul corpo scatterante sia un'onda piana uniforme il cui inviluppo complesso e' $\exp\{jk\underline{V} \cdot \underline{r}\}$, in cui $\underline{V}$ e' il versore di propagazione dell'onda e $\underline{r}$ e' il vettore posizione. Si supponga anche valida l'approssimazione di Born, cosi' che nella (20) sia lecito assumere il campo all'interno del corpo $u(\underline{R})$ uguale a $\exp\{jk\underline{V} \cdot \underline{R}\}$. In questo caso, in condizioni di campo lontano, dalla (30) si ricava:

$$u_s(\underline{r}) = \frac{\exp\{jkr\}}{r} A_B(\underline{v}/\lambda, \underline{V}/\lambda) \qquad (31)$$

con

$$A_B(\underline{v}/\lambda, \underline{V}/\lambda) = \int f(\underline{R}) \exp\{jk\underline{V}\cdot\underline{R}\} \exp\{-jk\underline{v}\cdot\underline{R}\}\, d\underline{R} \qquad (32).$$

La funzione A_B e' il diagramma di radiazione nell'approssimazione di Born; in esso e' stata messa in evidenza la dipendenza dalla direzione di incidenza $\underline{V}$ dell'onda "esplorante" oltre che dalla direzione di scattering $\underline{v}$. Dalla (32) si nota che il diagramma di radiazione nell'approssimazione di Born, con illuminazione in onda piana, e' legato alla trasformata di Fourier della funzione potenziale di scattering in maniera molto semplice:

$$A_B(\underline{v}/\lambda,\ \underline{V}/\lambda) = F[(\underline{v} - \underline{V})/\lambda] \qquad (33),$$

in cui la funzione F e' la trasformata di Fourier tridimensionale della funzione potenziale di scattering $f(\underline{r})$. Il diagramma di radiazione determina quindi la trasformata del potenziale per tutti i vettori frequenza spaziale $\underline{S}$ dati da:

$$\underline{S} = (\underline{v} - \underline{V})/\lambda \qquad (34).$$

Fissata una direzione di incidenza $\underline{V}$ la F e' quindi conosciuta su una superficie di equazione:

$$\underline{S} \cdot \underline{S} = S^2 = 2/\lambda^2 \; (1 - \underline{V} \cdot \underline{v}) \qquad (35),$$

che rappresenta una sfera passante per l'origine dello spazio di Fourier e di diametro $2/\lambda$. Al variare del versore di incidenza $\underline{V}$, ma tenendo costante la lunghezza d'onda , si vede facilmente che la F puo essere ricavata in tutti i punti della sfera centrata nell'origine dello spazio di Fourier e di raggio $2/\lambda$, rendendo possibile una ricostruzione passa-basso della funzione potenziale di scattering. Poiche' poi la $f(\underline{r})$ e' stata supposta essere almeno continua a tratti in un dominio finito dello spazio, la sua trasformata e' una funzione analitica delle tre componenti cartesiane del vettore frequenza spaziale $\underline{S}$, e quindi e' univocamente determinata se e' nota almeno in una porzione dello spazio di Fourier di volume non nullo. Ora, l'equazione (35), una volta stabilita la direzione di incidenza, rappresenta una superficie, che si puo' descrivere completamente se si adotta un numero infinito di direzioni di osservazione $\underline{v}$. Un volume finito si puo' quindi coprire, nell'ambito dell'approssimazione di Born, solo se si prendono in considerazione infinite direzioni di incidenza, cioe' infiniti esperimenti di scattering, e infinite misure di campo per ogni esperimento.

In [20] si dimostra che, per ogni insieme finito di direzioni di incidenza, esiste almeno una classe di funzioni potenziale che da' luogo a diagramma di radiazione identicamente nullo. Queste funzioni possono essere sommate al potenziale di scattering che si vuole ricostruire senza modificare il diagramma di radiazione ottenuto. Cio' vuol dire che, come si voleva dimostrare, per un numero finito di esperimenti di scattering, la ricostruzione della funzione potenziale non e' unica, almeno nell'ambito dell'approssimazione di Born.

c) Unicita' della Soluzione nell'Ambito della Teoria Esatta [20].

Si ha ora intenzione di dimostrare che la conoscenza del diagramma di radiazione per tutte le direzioni dello spazio, fissata un'unica direzione dell'onda piana incidente non e' sufficiente per la determinazione unica della funzione potenziale neanche se si considera la teoria esatta dello scattering. Il diagramma di radiazione di scattering nell'ambito della teoria esatta ha un'espressione simile a quella data, nell'approssimazione di Born, dalla (32):

$$A(\underline{v}/\lambda,\ \underline{V}/\lambda) = \int f(\underline{R})\ u(\underline{R},\ \underline{V}/\lambda)\ \exp\{-jk\underline{v}\cdot\underline{R}\}\ d\underline{R} \qquad (36),$$

in cui si e' messa in evidenza la dipendenza del campo totale u all'interno del corpo oltre che dal vettore posizione anche dal versore di incidenza $\underline{V}$. Per dimostrare quanto asserito ci si servira' di un Lemma:

Esiste un numero infinito di funzioni continue $p(\underline{r})$, localizzate entro un volume arbitrario W, tali che valga la seguente relazione in tutti i punti $\underline{r}$ esterni a W:

$$\int p(\underline{R})\ \frac{\exp\{jk|\underline{r} - \underline{R}|\}}{|\underline{r} - \underline{R}|}\ d\underline{R} = 0 \qquad (37).$$

L'asserto puo' essere dimostrato se si sceglie:

$$p(\underline{r}) = (\nabla^2 + k^2)q(\underline{r}) \qquad (38),$$

in cui $q(\underline{r})$ e' una funzione continua con le sue derivate parziali prime e seconde, localizzata in W e per il resto totalmente arbitraria. Si dimostra [20] che, operata la scelta (38), il risultato della (37) e' $-4\pi q(\underline{r})$, nullo al di fuori di W per le ipotesi fatte sulla funzione q.

La validita' di questo lemma consente di passare alla dimostrazione del seguente

Teorema: Se esiste una classe di funzioni (u, f) che soddisfano l'equazione integrale (2a) per un fissato versore di incidenza $\underline{V}$, allora esiste almeno un'altra classe di funzioni (u', f') che soddisfano la (2a) per lo stesso valore di $\underline{V}$, tali che:

i) le regioni di localizzazione di f e di f' sono identiche e coincidenti con il volume W;

ii) al di fuori di W le funzioni u e u' sono identicamente uguali.

Il precedente lemma assicura che e' possibile trovare una classe di funzioni (Φ, p) tali che Φ, ottenuta da p mediante la (37), sia identicamente nulla al di fuori di W. La funzione

$$u'(\underline{r},\ \underline{V}/\lambda) = u(\underline{r},\ \underline{V}/\lambda) + \Phi(\underline{r}) \qquad (39)$$

e' ovunque uguale a u al di fuori di W. Per la (37) e' anche:

$$u_\infty(\underline{r}, \underline{V}/\lambda) = \int [f(\underline{R})\, u(\underline{R}, \underline{V}/\lambda) + p(\underline{R})] \frac{\exp\{jk|\underline{r} - \underline{R}|\}}{|\underline{r} - \underline{R}|} d\underline{R} \quad (40).$$

Esiste quindi una funzione potenziale f' data da:

$$f'(\underline{r}) = \frac{f(\underline{r})u(\underline{r}, \underline{V}/\lambda) + p(\underline{r})}{u'(\underline{r}, \underline{V}/\lambda)} = \frac{f(\underline{r})u(\underline{r}, \underline{V}/\lambda) + p(\underline{r})}{u(\underline{r}, \underline{V}/\lambda) + \Phi(\underline{r})} \quad (41),$$

che e' localizzata nello stesso volume W e, insieme alla u', soddisfa alla (2a) come richiesto dal teorema. Le (38) e (39) assicurano la soddisfazione del requisito ii), mentre dalla (41) si vede facilmente che anche il requisito i) e' soddisfatto dalla funzione f'.

Il teorema appena esposto mostra che per una singola direzione di incidenza del campo esplorante esistono infinite funzioni potenziale che possono dare origine allo stesso diagramma di radiazione e sono tutte localizzate all'interno dello stesso volume. Come si e' dimostrato al sottoparagrafo a) il diagramma di radiazione specifica univocamente il campo diffratto in tutti i punti dello spazio esterni al volume W, quindi resta dimostrato che la conoscenza di tutto il campo di scattering per un singolo esperimento non consente la ricostruzione univoca della funzione potenziale.

Esaminando la dimostrazione del teorema si nota che la sua validita' non dipende dal fatto che il campo di illuminazione e' piano e uniforme, quindi la non unicita' di ricostruzione vale anche per campi incidenti di altro tipo. In [20] si trova anche una parziale dimostrazione della validita' di questa tesi anche nell'ambito dell'approssimazione di Born per un numero finito di esperimenti di scattering.

d) Relazione tra i Dati Diffrattivi e la Trasformata della Funzione Oggetto.

Nel caso in cui vengano considerati valori del campo di scattering lontano, la (31) e la (33) precisano la relazione che intercorre tra questo e la trasformata di Fourier della funzione potenziale di scattering quando sia valida l'approssimazione di Born del primo ordine.

Fissata dunque una direzione di incidenza di versore $\underline{V}$, misurando il campo di scattering in punti ad r costante, cioe' su una superficie sferica di raggio r tale da soddisfare la condizione di campo lontano (28), si ottiene direttamente una funzione del versore di scattering $\underline{v}$ che, a meno di un fattore complesso di proporzionalita', e' uguale alla trasformata di Fourier tridimensionale della funzione potenziale di scattering sulla superficie sferica descritta dalla (35).

Esplicitando la (35) in funzione dei coseni direttori di incidenza, P, Q, M, e di scattering, p, q, m, e' facile vedere che, se si lascia variare arbitrariamente anche la direzione di incidenza, la (35) descrive una superficie sferica con centro nell'origine dello spazio di Fourier e raggio variabile, in funzione di $\underline{V}$ e $\underline{v}$, tra 0 e $2/\lambda$; quindi, come accennato al sottoparagrafo b), la variazione delle direzioni di scattering e di incidenza consente di misurare direttamente i valori della trasformata di Fourier della $f(\underline{r})$ in tutti i punti della sfera di centro l'origine e raggio $2/\lambda$.

Cio' comporta la variazione arbitraria della direzione di incidenza e la misura del campo di scattering su una intera superficie sferica di raggio abbastanza grande da soddisfare la (28). Dal punto di vista pratico queste esigenze possono facilmente risultare eccessive; riveste quindi un certo interesse la conoscenza della relazione tra il campo di scattering misurato su una superficie piana, in zona lontana o anche vicina, e la trasformata della $f(\underline{r})$ sempre nei casi i cui si possa adottare l'approssimazione di Born.

Si supponga, senza perdere in generalita', che la direzione di incidenza sia fissata e coincidente con quella dell'asse z, sia cioe' $\underline{V} = (0,0,1)$, e che il campo di scattering venga misurato su un piano ortogonale all'asse z, posto a distanza $z = z'$ dall'origine dello spazio cartesiano, coincidente con un punto del corpo sotto esame. In questa fase si ammette che il valore di z' sia tale da soddisfare la condizione di campo lontano. Detto $\underline{r}=(x,y,z')$ il generico punto di misura sul piano $z = z'$, il versore di scattering sara' dato da:

$$\underline{v} = \underline{r}/r = (x/r, y/r, z'/r) \qquad (42)$$

con

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} \qquad (43).$$

Sostituendo nella (31) i valori di $\underline{V}$ e $\underline{v}$ cosi' definiti e tenendo conto della (33) si vede facilmente che il campo di scattering misurato in un punto generico del piano $z = z'$ e moltiplicato per un fattore di compensazione r exp{-jkr} e' uguale alla trasformata della funzione oggetto nelle coordinate:

$$S_x = x/(\lambda r) \qquad (44\ a)$$

$$S_y = y/(\lambda r) \qquad (44\ b)$$

$$S_z = z'/(\lambda r) - 1/\lambda \qquad (44\ c)$$

Con facili passaggi, tenendo conto della (43), si ottiene:

$$1/\lambda^2 - S_x{}^2 - S_y{}^2 = z'^2/(\lambda^2 r^2) \qquad (45\ a)$$

$$(S_z + 1/\lambda)^2 = z'^2/(\lambda^2 r^2) \qquad (45\ b),$$

da cui, se si assume $z' = \pm |z'|$, si ottiene:

$$S_x{}^2 + S_y{}^2 + (S_z + 1/\lambda)^2 = 1/\lambda^2 \qquad (46).$$

La (46) ci dice che, fissata la direzione di incidenza, la misura del campo di scattering su due superfici piane in zona lontana e' equivalente alla misura su una intera superficie sferica con raggio abbastanza grande, poiche' consente di calcolare la trasformata della funzione oggetto sulla stessa superficie sferica nello spazio di Fourier, centrata in (Ø, Ø, $-1/\lambda$) e di raggio $1/\lambda$. A parte le eventuali complicazioni tecniche il calcolo della trasformata in base a misure su superficie sferica ha il vantaggio di richiedere un fattore di compensazione r exp{-jkr} costante per ognuno dei valori raccolti dell'inviluppo complesso del campo di scattering. Variando la direzione di incidenza dell'onda piana esplorante e, di conseguenza, la posizione dei piani di misura o, equivalentemente, ruotando l'oggetto sotto esame attorno all'origine dello spazio cartesiano, si puo' calcolare la trasformata su sfere analoghe alla (46), ma diversamente orientate rispetto agli assi di Fourier. Se per effettuare le misure si sceglie solo il valore positivo di z', cioe' si misura solo il campo di "forward scattering" o di "trasmissione", la superficie descritta dalle (44) sara' solo la meta' della superficie sferica (46) che contiene l'origine dello spazio di Fourier; cio' e' facilmente costatabile valutando le variazioni delle coordinate date dalle (44) al variare tra zero e l'infinito dei valori di x e di y e supponendo che il valore di z' sia positivo.

Per oggetti di grandi dimensioni rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione esplorante la distanza dell'oggetto dal piano di misura necessaria per poter fare misure in zona di campo lontano potrebbe risultare eccessiva. Resta quindi da vedere se si e' in grado di calcolare la trasformata della funzione oggetto in qualche sottospazio di Fourier anche effettuando misure di campo vicino.

Si consideri quindi nuovamente l'equazione (2), supponendo che sia sempre valida l'approssimazione di Born e che il campo incidente sia un'onda piana uniforme diretta come l'asse z, cioe' che sia $u(\underline{R}) = \exp\{jkz\}$. Si supponga anche che le misure siano fatte sempre sul piano z = z' e quindi sia $\underline{r} = (x, y, z')$. Il campo di scattering misurato sara' quindi una funzione delle sole due variabili x e y. Si nota che l'equazione (2) e' un'integrale di convoluzione tra le funzioni

i) $g'(\underline{r}) = f(\underline{r}) \exp\{jkz\}$ (47 a)

ii) $g''(\underline{r}) = \exp\{jk\sqrt{(x^2+y^2+z'^2)}\}/\sqrt{(x^2+y^2+z'^2)}$ (47 b).

Operando quindi la trasformata di Fourier bidimensionale di ambo membri della (2) rispetto a x e y si ottiene [1]:

$$U_{s}(S_x,S_y) = \int G'(S_x,S_y,Z)\, G''(S_x,S_y,z'-Z)\, dZ \qquad (48),$$

in cui le G' e G'' sono le trasformate bidimensionali in x e y delle g' e g'' rispettivamente. Dalla (24) con X = Y = Ø e ponendo

$$p = \lambda S_x \qquad (49\ a),$$

$$q = \lambda S_y \qquad (49\ b),$$

si deduce facilmente che e':

$$G''(S_x,S_y,z'-Z) = \frac{j\lambda}{4\pi}\, \frac{\exp\{jkm(z'-Z)\}}{m} \qquad (5Ø),$$

in cui m e' dato dalla (27 b) operando le sostituzioni (49). Sostituendo la (5Ø) nella (48) si ottiene:

$$U_{s}(S_x,S_y) = \frac{j\lambda}{4\pi} \int G'(S_x,S_y,Z)\, \frac{\exp\{jkm(z'-Z)\}}{m}\, dZ \qquad (51),$$

che per le frequenze spaziali soddisfacenti alle condizioni date dalla (27 a), tenendo conto delle (49), puo' essere vista come una trasformata di Fourier rispetto alla variabile Z, quindi:

$$U_m(S_x,S_y) = \frac{j\lambda}{4\pi} \, \frac{\exp\{jkmz'\}}{m} \, G'(S_x,S_y,m/\lambda) \qquad (52),$$

in cui la funzione G' e' la trasformata di fourier tridimensionale della funzione g', calcolata per $S_z = m/\lambda$. Dalla (47 a), per la proprieta' di traslazione frequenziale della trasformata di Fourier, si ha:

$$G'(S_x,S_y,S_z) = F(S_x,S_y,S_z - 1/\lambda) \qquad (53).$$

in cui la funzione F e' la trasformata di Fourier tridimensionale del potenziale di scattering $f(\underline{r})$. Operando questa sostituzione nella (52) si ottiene:

$$F(S_x,S_y,(m - 1)/\lambda) = \frac{4\pi m}{j\,\lambda} \exp\{-jkmz'\} \, U_m(S_x,S_y) \qquad (54).$$

La (54), insieme alle (27) e alle (49), mostra che, senza alcuna limitazione sul valore di z', la trasformata di Fourier del potenziale di scattering si puo' ricavare, nella stessa regione dello spazio di Fourier ottenuta nel caso di misure in zona di campo lontano, compensando opportunamente la trasformata bidimensionale del campo di scattering misurato su un piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda esplorante. anche in questo caso per ottenere la F su tutta la superficie (46) bisognera' fare le misure sia su un piano del tipo $z = |z'|$, corrispondente ai valori positivi della radice quadrata in (27 b) (forward scattering), sia su un piano del tipo $z = -|z'|$, corrispondente ai valori negativi della stessa radice quadrata (backscattering). Anche in questo caso naturalmente l'aver scelto la direzione dell'asse z come direzione di propagazione non limita la generalita' dei risultati ottenuti; infatti con onda illuminante piana comunque orientata rispetto agli assi x, y e z si puo' ottenere la trasformata su una superficie sferica il cui diametro passante per l'origine ha lo stesso orientamento rispetto agli assi S_x, S_y ed S_z [54, 67].

4. TECNICHE DI TOMOGRAFIA DIFFRATTIVA

Si prenderanno ora in considerazione alcune tecniche particolari che, basandosi sui risultati ottenuti nei paragrafi precedenti, sono in grado di fornire immagini tomografiche (bi- o tridimensionali) di oggetti non troppo disadattati nei confronti del mezzo trasmissivo in cui sono immersi, in maniera tale da giustificare l'adozione dell'approssimazione di Born del primo ordine. Sotto il punto di vista della modalita' di acquisizione dei dati queste tecniche si dividono in tecniche di forward scattering e tecniche di backscattering; all'interno poi di queste due grandi classi le varie tecniche sono differenziate a seconda degli algoritmi ricostruttivi adottati. Tutte queste tecniche sono gia' state ampiamente analizzate in letteratura, sia dal punto di vista delle prestazioni teoriche sia da quello della realizzabilita' tecnica e della efficienza degli algoritmi adottati. Problemi ancora aperti sono quelli relativi alle possibili azioni correttive da intraprendere quando le condizioni teoriche alla base delle formule ricostruttive non sono perfettamente verificate, come nel caso in cui i corpi sotto esame sono decisamente disadattati rispetto al mezzo circostante, oppure in quello in cui non si puo' prescindere dalla natura vettoriale del campo esplorante [2, 3, 66]. Oltre allo studio di azioni correttive nell'ambito degli stessi algoritmi di Born, resta aperto tutto il vasto campo di ricerca relativo allo sviluppo di formule ricostruttive basate su assunzioni piu' generali e, nello stesso tempo, facilmente traducibili in algoritmi di calcolo.

Tutti gli algoritmi ricostruttivi descritti sfruttano i legami tra il campo di scattering e la trasformata di Fourier della funzione oggetto. Come si e' dimostrato al paragrafo precedente, ogni procedura di acquisizione dei dati che sia fisicamente e tecnicamente realizzabile porta alla non unicita' nella ricostruzione della funzione oggetto. Per ottenere delle immagini tomografiche dei corpi sotto esame bisognera' quindi porre dei vincoli supplementari alla soluzione del problema inverso che si cerca. La procedura piu' banale, e anche quella usata comunemente, consiste nel cercare quella particolare soluzione del problema che ha la trasformata di Fourier nulla al di fuori della regione in cui essa e' nota. L'imposizione di questo tipo di vincolo e' totalmente arbitraria e porta a una soluzione unica ma certamente non rispondente alla realta', poiche' nei casi pratici la funzione oggetto sara' confinata in una regione finita di spazio e la sua trasformata di Fourier non sara' certamente di tipo passa-basso. A causa di cio' esiste un vasto campo di ricerca ancora aperto, che si occupa di trovare per la soluzione del problema inverso dei vincoli tali da condurre a una ricostruzione piu' fedele della funzione oggetto.

a) Metodi di Forward Scattering [1, 6, 8, 14, 17, 21, 32, 33, 34, 42, 45, 48, 49, 50, 54, 59, 61, 66, 67].

Si supponga di illuminare l'oggetto sotto esame con un'onda elettromagnetica piana e uniforme, ottenuta facendo uso di una sorgente di microonde posta a sufficiente distanza. Il campo elettrico totale viene misurato su un un piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda incidente e dai campioni prelevati vengono sottratti i corrispondenti valori del campo di illuminazione in modo da ottenere i campioni del campo di scattering. Cio' e' realizzabile tecnicamente disponendo di una opportuna schiera di elementi riceventi o di un apparato di scansione, meccanica o elettronica, del piano di misura, che, per non recare disturbo all'illuminazione, dovra' essere necessariamente posto in zona di Forward Scattering.

Se il piano di misura si trova in zona di campo lontano, dai dati cosi' ottenuti si puo' ricavare la trasformata della funzione oggetto sulla superficie descritta dalle (44), con z' positivo. Anche in caso di misure in zona di campo vicino, come mostrato dalla (54), si puo' ottenere la trasformata di Fourier della funzione oggetto sulla stessa superficie semisferica.

L'operazione di illuminazione, misura e calcolo della trasformata della funzione oggetto, viene poi ripetuta piu' volte per diverse posizioni angolari dell'oggetto sotto esame arrivando alla conoscenza della trasformata che interessa su un adeguato numero di semisfere contenute entro la sfera con centro nell'origine dello spazio di Fourier e raggio $\sqrt{2}/\lambda$.

La breve descrizione qui riportata, insieme a considerazioni che si possono facilmente derivare dagli argomenti teorici trattati nei paragrafi precedenti, consente di arrivare abbastanza direttamente alla definizione delle prestazioni teoriche della tecnica tomografica in esame, in particolare al suo potere di risoluzione, strettamente legato alla massima frequenza spaziale per cui e' nota la trasformata della funzione oggetto. Vi sono pero' degli aspetti che e' necessario precisare per quanto riguarda la realizzazione pratica. La semisfera "campionatrice" dello spazio di Fourier, di equazione (44) nel caso di misure in condizioni di campo lontano, puo' essere effettivamente coperta da campioni della trasformata solo nel caso in cui il campo di scattering sia stato valutato sull'intero piano di misura, cioe' su una estensione infinita. Nel caso reale, in cui necessariamente si dovra' ricorrere a una regione di misura di estensione finita, si avra' quindi una perdita in risoluzione rispetto al caso teorico, poiche' la frequenza di taglio nello spazio di Fourier risultera' minore di $\sqrt{2}/\lambda$. Prima della realizzazione pratica si dovra' quindi individuare l'estensione minima della regione di misura che dia luogo a perdite trascurabili di potere risolutivo, insieme alla piu' opportuna distanza dall'oggetto del piano di misura e al massimo passo di campionamento per il campo di scattering. Questi tre parametri realizzativi sono risultati strettamente legati e indicazioni per la loro scelta possono essere trovati in [14], [54] e [67]. Non si ritiene qui opportuno riportare i risultati ottenuti in quelle sedi; per quanto riguarda l'estensione della regione di misura vale pero' la pena di osservare come con una piccola modifica delle modalita' di acquisizione dei dati si puo' giungere a una conoscenza della trasformata della funzione oggetto equivalente a quella che deriverebbe dalla misura del campo di scattering su tutto il piano $z = z'$. Se infatti si fanno misure su una superficie semisferica in condizioni di campo lontano, dalle (31), (33) e (35) si vede facilmente che la trasformata viene conosciuta su una semisfera uguale a quella descritta dalle (44) per misure fatte su tutto il piano $z = z'$, con $z' > 0$.

Il passo successivo da compiere nella procedura di ricostruzione dell'immagine, dopo il calcolo della trasformata della funzione oggetto, e' l'antitrasformazione dei dati a disposizione.

Questa puo' essere fatta in maniera diretta con algoritmi di FFT se, mediante una procedura di interpolazione, si ricavano i valori della trasformata su un reticolo cartesiano adeguatamente fitto. Il raggiungimento di questo scopo e' subordinato all'adozione di un numero sufficiente di posizioni dell'oggetto sotto esame ("viste"); in [54] e [67] e' indicata la procedura da seguire per ottenere tale numero.

Oltre alla procedura di interpolazione ed antitrasformazione diretta sono stati proposti anche altri algoritmi per la ricostruzione dell'immagine nello spazio oggetto [1 , 21 , 59]. Si tratta di metodi derivati dall'algoritmo di proiezione inversa filtrata utilizzato nella tomografia a raggi X, modificati per tener conto degli effetti di diffrazione che intervengono nel caso della tomografia coerente. L'algoritmo di "retropropagazione filtrata" consente la ricostruzione dell'immagine in maniera totalmente indipendente da procedure di interpolazione dei dati nello spazio di Fourier, ma implica l'applicazione di un filtro non invariante alle traslazioni che, dal punto di vista computazionale, lo rende di realizzazione abbastanza pesante. Un algoritmo alternativo, detto di "retropropagazione filtrata modificato", e' piu' semplice computazionalmente ma da' luogo ad effetti di "sfocamento" nello spazio oggetto al di fuori di una ristretta regione attorno al punto "focale".

Un confronto tra i due diversi approcci, interpolazione e retropropagazione, e' riportato in [48], in cui, dal punto di vista dell'efficienza computazionale, si rileva un certo vantaggio di una procedura interpolativa bilineare rispetto all'algoritmo di retropropagazione filtrata.

Un altro parametro da stabilire per una realizzazione pratica e' la frequenza di lavoro. Al fine di rendere piu' alta possibile la frequenza spaziale di taglio nello spazio di Fourier la frequenza del campo esplorante dovrebbe essere scelta piu' alta possibile, ma, oltre un certo limite, a parte limitazioni di ordine tecnico, vengono meno le condizioni per poter ritenere accettabile l'approssimazione di Born, che riguardano, come e' noto [17, 54, 59], le condizioni di adattamento dell'oggetto sotto esame al mezzo in cui e' immerso e anche le sue dimensioni rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione esplorante.

Come si accennava nell'introduzione, nella generalita' dei casi un modello di propagazione scalare non e' applicabile quando la radiazione esplorante e' un'onda vettoriale, come nel caso qui analizzato. In generale quindi il campo di scattering conterra' delle componenti depolarizzate rispetto al campo incidente. In [54] e [66] e' indicata una procedura che, sfruttando proprio queste componenti depolarizzate, consente di restaurare l'immagine ottenuta applicando l'algoritmo scalare alla componente del campo di scattering polarizzata nella stessa direzione del campo incidente. In [2] e [3] e' descritto un metodo di imaging a microonde di tipo intrinsecamente vettoriale che consente di ottenere delle mappe delle tre componenti spaziali della corrente di Maxwell all'interno del corpo sotto esame.

b) Metodi di Backscattering [7, 9-12, 13, 15, 36-39, 43, 44, 58].

I metodi di tomografia ricostruttiva che sfruttano la conoscenza del campo di backscattering hanno molteplici aspetti in comune con le tecniche di "radar imaging", e possono ritenersi in gran parte derivati da queste ultime. Oltre ai riferimenti qui riportati esiste quindi una estesissima bibliografia, riguardante il radar imaging, che tratta argomenti affini, spesso con approcci del tutto simili a quelli tomografici (si consideri per tutti il riferimento [37], che costituisce un testo base sia per la ricostruzione di immagini in ambito radar sia per la tomografia diffrattiva da backscattering).

Con le stesse notazioni adottate al paragrafo 3 b), si supponga che sia $\underline{v} = - \underline{V}$ e che si operi in condizioni di campo lontano, cioe', in pratica, che il campo di scattering sia misurato nello stesso punto da cui ha origine l'onda incidente. In queste condizioni, variando comunque il versore $\underline{V}$ di incidenza, dalla (35) si ottiene facilmente che la trasformata della funzione oggetto puo' essere ricavata sulla superficie sferica:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 4/\lambda^2 \qquad (55).$$

In [39] viene presentata una tecnica di tomografia da backscattering che suggerisce di fare variare il versore $\underline{V}$ secondo tutte le direzioni contenute in un dato piano di interesse, con il che la sfera (55) si particolarizza in una circonferenza con centro nell'origine dello spazio di Fourier e raggio $2/\lambda$. Si ottiene cioe' una sezione piana della trasformata di Fourier tridimensionale della funzione oggetto, la cui inversione, per il noto teorema di proiezione-sezione, fornisce una ricostruzione di una proiezione della funzione oggetto sul piano in cui si muove la direzione di propagazione del campo incidente. Il problema viene cosi' ridotto a bidimensionale e puo' fornire immagini utili di oggetti che abbiano estensione planare [12, 13, 15, 39, 58] come per esempio piastre di cui si voglia conoscere la struttura interna.

Se ad esempio la direzione di incidenza viene fatta variare nel piano x - y dello spazio oggetto, ovvero se il sistema di illuminazione e misura viene tenuto fisso e il corpo sotto esame viene fatto ruotare attorno all'asse z dello spazio oggetto la trasformata della funzione potenziale di scattering puo' essere conosciuta sui punti della circonferenza:

$$S_x^2 + S_y^2 = 4/\lambda^2 \qquad (56).$$

La conoscenza della trasformata su un insieme cosi' ristretto, come si puo' rilevare da tutta la letteratura sull'argomento, da' luogo a un sistema con una PSF che presenta dei lobi laterali molto accentuati, che diminuiscono la dinamica della tecnica tomografica e ne rendono estremamente ambigui i risultati. Nel caso in cui la funzione potenziale sia indipendente dalla frequenza del campo incidente, o vi dipenda in maniera nota, il campo in cui se ne conosce la trasformata puo' essere allargato rispetto alla circonferenza (56) ripetendo piu' volte la procedura di illuminazione e misura per diversi valori della frequenza e ottenendo cosi' la trasformata su un insieme di circonferenze concentriche. Questo risultato puo' essere ottenuto anche facendo misure in "diversita' bistatica" (vedere p.es. [38]), cioe' spostando il punto di misura del campo di scattering rispetto alla sorgente del campo incidente. Rimanendo in condizioni di campo lontano l'effetto della diversita' bistatica puo' essere pienamente giustificato facendo anche uso delle (31)-(35) o di argomenti equivalenti mostrati in [59].

Delle indicazioni sui criteri di scelta dell'insieme di frequenze da adottare nell'applicazione pratica di questa tecnica si possono trovare in [7, 9, 11, 13, 15, 58] insieme a valutazioni teoriche sulle prestazioni, non inquadrate pero' nel presente contesto generale.

In [10] le prestazioni di questa tecnica vengono analizzate nel caso in cui il versore di incidenza non assuma tutte le direzioni giacenti sul piano $x - y$ e quindi la trasformata della funzione oggetto sia conosciuta solo in una parte piu' o meno piccola delle circonferenze del tipo (56).

In [39] viene dimostrato come l'antitrasformazione dei dati nel piano di Fourier possa essere considerata come una serie di convoluzioni circolari monodimensionali, che possono essere calcolate per mezzo di algoritmi veloci basati sulla FFT. Questo tipo di approccio consente di evitare passi di interpolazione nell'algoritmo ricostruttivo rendendolo cosi' estremamente veloce.

Basandosi sulle (31)-(35) si vede come, con poche modifiche, questa tecnica possa essere resa di tipo tridimensionale eliminando il requisito di planarita' degli oggetti esplorati, e per mezzo della diversita' bistatica, eliminando anche l'esigenza di misure multifrequenza e l'eventuale conseguente necessita' di compensare i dati provenienti da diverse esplorazioni. Infatti, disponendo, in zona di campo lontano, di una sorgente e di uno o piu' elementi riceventi spostabili a piacere su una superficie sferica contenente il corpo sotto esame, si puo' ottenere, in base alla (35), la trasformata della funzione oggetto in tutti i punti della sfera di raggio $2/\lambda$ centrata nell'origine dello spazio di Fourier. Dal punto di vista teorico non si riscontrano ostacoli a questa estensione della tecnica presentata in [39]. In pratica bisognerebbe indagare sulla realizzabilita' tecnica di un sistema di illuminazione e misura dislocato su una superficie sferica di grandi dimensioni e sul carico computazionale che comporta l'elaborazione della grande quantita' di dati che dovrebbero essere acquisiti. Inoltre sarebbe interessante sviluppare anche in questo caso tridimensionale algoritmi di inversione veloce dei dati dallo spazio di Fourier e/o particolari architetture di sistemi dedicati in grado di eseguire velocemente i calcoli necessari per la ricostruzione delle immagini.

5. CONCLUSIONI

Sono state presentate le basi della teoria dello scattering mettendo in evidenza le due diverse classi di problemi che si possono presentare: quelli diretti e quelli inversi.

Il problema diretto e' stato inquadrato nella teoria generale dell'elettromagnetismo. Nell'ambito dell'argomento generale delle trasformazioni e approssimazioni, dopo averne precisate le condizioni di applicabilita', e' stata indicata la soluzione al problema diretto nell'approssomazione di Born del primo ordine.

Per quanto riguarda lo scattering inverso si sono mostrate le ipotesi sulle quali s puo' basare una trattazione di tipo scalare anche nel caso in cui le grandezze in esame siano vettoriali (approssimazione di Born, assenza di depolarizzazione).

Due diverse tecniche di tomografia diffrattiva sono poi state presentate come applicazioni delle formule generali dello scattering inverso in zona di campo lontano. Semprre basandosi su tali formule sono state anche individuate delle possibilita' di modificare le tecniche presentate al fine di ottenenre una conoscenza piu' completa possibile della trasformata della funzione oggetto pur semplificando le procedure sperimentali e senza ricorrere a particolari algoritmi di restauro delle immagini.

BIBLIOGRAFIA

[1] M.F.Adams, A.P.Anderson: "Synthetic Aperture Tomographic (SAT) Imaging for Microwave Diagnostics", IEE Proc., Vol. 129, pt. H, no. 2, Apr. 1982, pp. 83-88.

[2] M.Baribaud, F.Dubois, R.Floyrac, M.Kom, S.Wang: "Tomographic Image Reconstitution of Biological Objects from Coherent Microwave Diffraction Data", IEE Proc., Vol. 129, pt. H, no. 6, Dec. 1982, pp. 356-359.

[3] M.Baribaud, F.Dubois, R.Floyrac, S.Wang: "Tomographic Image Reconstitution of Objects from Multi-incidence Microwave Exploration", IEE Proc., Vol. 132, pt. H, no. 5, Aug. 1985, pp. 286-290.

[4] J.Ch.Bolomey, A.Izadnegahdar, L.Jofre, Ch.Pichot, G.Peronnet, M.Solaimani: "Microwave Diffraction Tomography for Biomedical Application", IEEE Trans., Vol. MTT-30, no. 11, Nov. 1982, pp. 1998 - 2000.

[5] J.C.Bolomey, L.Jofre, G.Peronnet: "On the Possible Use of Microwave-Active Imaging for Remote thermal Sensing", IEEE Trans., Vol. MTT-31, no. 9, Sept. 1983, pp. 777-781.

[6] M.Bramanti, M.Curci: "Algoritmi per la Ricostruzione di Immagini nella Tomografia Impiegante Ultrasuoni o Campi Elettromagnetici", IEI-CNR, Pisa, N.I. B83-01, Feb. 1983.

[7] M.Bramanti, A.Tonazzini, E.Salerno: "Some Theoretical Aspects of a Backscattering Based Tomographic Imaging Technique", IEI-CNR, Pisa, N.I. B84-25, Dic. 1984.

[8] M.Bramanti, M.Curci: "Des Possibilités et Limites de l'Algoritme de Reconstruction dans l'Approximation de Born Appliquée a la Tomographie Diffractive a Micro-Ondes", ITBM, Vol. 6, no. 3, 1985, pp. 247-258.

[9] M.Bramanti, A.Tonazzini: "On the Resolution Properties of a Particular Tomographic Technique for Industrial Testing

Using Ultrasounds or Microwaves", Dixième Colloque sur le Traitement du Signal et ses Applications, Nice, du 20 au 24 May 1985.

[10] M.Bramanti, Sang En Fang: "On the Performance of a Backscattering Based Tomographic Technique in Reduced Angular Extent Exploration", International Conference on Advances in Image Processing and Pattern Recognition, Pisa, Dec. 10-12, 1985, pp. 42-46.

[11] M.Bramanti, A.Tonazzini, E.Salerno: "Some Theoretical Aspects of a Backscattering Based Tomographic Imaging Technique", Signal Processing, Vol. 10, no. 4, Jun. 1986,pp. 415-425.

[12] M.Bramanti, E.A.Salerno: "La Tomografia a Microonde per il Rilievo di "Inclusioni" all'Interno di Laminati e Profilati in Materiali Compositi", IEI-CNR, Pisa, N.I. B4-62, Nov. 1986.

[13] M.Bramanti, E.Salerno: "On the Performance of a Backscattering Based Tomographic Imaging Technique: Some Results for an Actual Case", IEI-CNR, Pisa, N.I. B4-08, Mar. 1987.

[14] M.Bramanti, E.A.Salerno: "Analisi delle Prestazioni di una Tecnica Tomografica a Microonde Basata sulla Misura del Campo di "Forward Scattering"", IEI-CNR, Pisa, N.I. B4-25, Ott. 1987.

[15] M.Bramanti, E.Salerno: "On the Performance of a Backscattering-Based Tomographic Imaging Technique: Some Results for an Actual Case", Signal Processing, Vol. 14, no. 2, Mar. 1988.

[16] W.H.Carter: "Computational Reconstruction of Scattering Objects from Holograms", J.Opt.Soc.Am., Vol. 60, no. 3, Mar. 1970, p. 306.

[17] M.Curci: "Fondamenti e Tecniche Realizzative della Tomografia Computerizzata", Tesi di Laurea, Facolta' di Ingegneria, Pisa, a.a. 1981/'82.

[18] C.K.Chan, N.H.Farhat: "Frequency Swept Tomographic Imaging of Three Dimensional Perfectly Conducting

Objects", IEEE Trans., Vol. AP-29, 1981, pp. 312 - 319.

[19] A.J.Devaney, E.Wolf: "Multipole Expansion and Plane Wave Representation of the Electromagnetic Field", J.Math. Phys., Vol. 15, no. 2, Feb. 1974, pp. 234 - 244.

[20] A.J.Devaney: "Nonuniqueness in the Inverse Scattering Problem", J.Math.Phys., Vol. 19, no. 7, 1978, pp. 1526-1531.

[21] A.J.Devaney: "A Computer Study of Diffraction Tomography" IEEE Trans., Vol. BME-30, no. 7, July 1983, pp. 377-386.

[22] C.Esmersoy, B.C.Levy: "Multidimensional Born Inversion with a Wide-Band Plane-Wave Source", IEEE Proc. Vol. 74, 1986, pp. 466 - 475.

[23] D.K.Ghodgaonkar, O.P.Gandhi, M.J.Hagmann: "Estimation of Complex Permittivities of Three-Dimensional Inhomogeneous Biological Bodies", IEEE Trans., Vol. MTT-31, no. 6, June 1983, pp. 442 - 446.

[24] J.M.Girones, L.Jofre, M.Ferrando, E.de los Reyes, J.Ch.Bolomey: "Microwave Imaging with Crossed Linear Arrays", IEE Proc., Vol. 134, pt. H, no. 3, Jun. 1987, pp. 249-252.

[25] J.W.Goodman: "An Introduction to the Principles and Applications of Holography", IEEE Proc., Vol. 59, no. 9, Sept. 1971, pp. 1292 - 1304.

[26] E.W.Hansen: "Theory of Circular Harmonic Image Reconstruction", J.Opt.Soc.Am., Vol. 71, no. 3, Mar. 1981, pp. 304-308.

[27] E.W.Hansen: "Circular Harmonic Image Reconstruction. Experiments", Appl.Opt., Vol. 20, no. 13, Jul. 1981, pp. 2266-2274.

[28] R.F.Harrington: "Field Computation by Moment Methods", Mac Millan, New York, 1968.

[29] R.W.Hart, E.W.Montroll: "On the Scattering of Plane Waves by Soft Obstacles. I. Spherical Obstacles", J.Appl.Phys., Vol. 22, no. 4, Apr. 1951, pp. 376 - 386.

[30] B.P.Hildebrand, T.J.Davis, A.J.Boland, R.L.Silta: "A Portable Digital Ultrasonis Holography System for Imaging Flaws in Heavy Section Materials", IEEE Trans., Vol. SU-31, no. 4, July 1984, pp. 287 - 294.

[31] D.Hiller, H.Ermert: "System Analysis of Ultrasound Reflection Mode Computerized Tomography", IEEE Trans., Vol. SU-31, no. 4, July 1984, pp. 240 - 250.

[32] M.Kaveh, M.Soumekh, J.F.Greenleaf: "Signal Processing for Diffraction Tomography", IEEE Trans., Vol. SU-31, 1984, pp. 230 - 239.

[33] H.Lee: "Formulation of the Generalized Backward-Projection Method for Acoustical Imaging", IEEE Trans., Vol. SU-31, no. 3, May 1984, pp. 157 - 161.

[34] Z.C.Lin, H.Lee, G.Wade: "Back-and-Forth Propagation for Diffraction Tomography", IEEE,Trans., Vol. SU-31, no. 6, Nov. 1984, pp. 626 - 634.

[35] D.E.Livesay, K.Chen: "Electromagnetic Fields Induced Inside Arbitrarily Shaped Biological Bodies", IEEE Trans., Vol. MTT-22, no. 12, Dec. 1974, p. 1273.

[36] D.Mensa, G.Heidbreder, G.Wade: "Aperture Synthesis by Object Rotation in Coherent Imaging", IEEE Trans., Vol. NS-27, no. 2, Apr. 1980, pp. 989-998.

[37] D.Mensa: "High Resolution Radar Imaging", Artech House, Dedham, MA, 1981.

[38] D.Mensa, G.Heidbreder: "Bistatic Synthetic Aperture Radar Imaging of Rotating Objects", IEEE Trans., Vol. AES-18, no. 4, Jul. 1982, pp. 423-431.

[39] D.Mensa, S.Halevy, G.Wade: "Coherent Doppler Tomography for Microwave Imaging", IEEE Proc., Vol. 71, no. 2, Feb. 1983, pp. 254-261.

[40] D.M.Milder, W.H.Wells: "Acoustic Holography with Crossed Linear Arrays", IBM J. Res. Develop., Vol. 14, no. 5, Sept. 1970, pp. 492 - 500.

[41] E.W.Montroll, R.W.Hart: "Scattering of Plane Waves by Soft Obstacles. II. Scattering by Cylinders, Spheroids and Disks", J.Appl.Phys., Vol. 22, no. 10, Oct. 1951, pp. 1278 - 1289.

[42] R.K.Mueller, M.Kaveh, G.Wade: "Reconstructive Tomography and Applications to Ultrasonics", IEEE Proc., Vol. 67, no. 4, Apr. 1979, pp. 567 - 587.

[43] D.C.Munson Jr., J.D.O'Brien, W.K.Jenkins: "A Tomographic Formulation of Spotlight-Mode Synthetic Aperture Radar", IEEE Proc., Vol. 71, no. 8, Aug. 1983, pp. 917 - 925.

[44] D.C.Munson, J.L.C.Sanz: "Image Reconstruction from Frequency-Offset Fourier Data", IEEE Proc., Vol. 72, no. 6, June 1984, pp. 661 - 669.

[45] D.Nahamoo, S.X.Pan, A.C.Kak: "Synthetic Aperture Diffraction Tomography and Its Interpolation-Free Computer Implementation", IEEE Trans., Vol. SU-31, no. 4, July 1984, pp. 218 - 229.

[46] K.Nagai: "Multifrequency Acoustical Holography Using a Narrow Pulse", IEEE Trans., Vol. SU-31, no. 3, May 1984, pp. 151 - 156.

[47] S.J.Norton, M.Linzer: "Ultrasonic Reflectivity Imaging in Three Dimensions: Exact Inverse Scattering for Plane, Cylindrical and Spherical Apertures", IEEE Trans., Vol. BME-28, 1981, pp. 202 - 220.

[48] S.X.Pan, A.C.Kak: "A Computational Study of Reconstruction Algorithms for Diffraction Tomography: Interpolation Versus Filtered Backpropagation", IEEE Trans., Vol. ASSP-31, no. 5, Oct. 1983, pp. 1262 - 1275.

[49] F.J.Paoloni: "The Effects of Attenuation on the Born Reconstruction Procedure for Microwave Diffraction Tomography", IEEE Trans., Vol. MTT-34, 1986, pp. 366-368.

[50] F.J.Paoloni: "Implementation of Microwave Diffraction Tomography for Measurement of Dielectric Constant Distribution", IEE Proc., Vol. 134, pt. H, no. 1, Feb. 1987, pp. 25-29.

[51] D.K.Peterson, G.S.Kino: "Real-Time Digital Image Reconstruction: A Description of Imaging Hardware and an Analysis of Quantization Errors", IEEE Trans., Vol. SU-31, no. 4, July 1984, pp. 337 - 351.

[52] C.Pichot, L.Jofre, G.Peronnet, J.C.Bolomey: "Active Microvave Imaging of Inhomogeneous Bodies", IEEE Trans., Vol. AP-33, 1985, pp. 416 - 425.

[53] R.T.Prosser: "Formal Solutions of Inverse Scattering Problems", J.Math.Phys., Vol. 10, no. 10, pp. 1819-1822, Oct. 1969.

[54] G.Pugliano: "Fondamenti Teorici e Prestazioni della Tomografia Ricostruttiva a Microonde", Tesi di Laurea, Facolta' di Ingegneria, Pisa, a.a. 1986/'87.

[55] J.H.Richmond: "Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross Section Shape", IEEE Trans., Vol. AP-13, no. 3, May 1965, pp. 334 - 341.

[56] J.H.Richmond: "TE-Wave Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross-Section Shape", IEEE Trans., Vol. AP-14, no. 4, July 1966, pp. 460 - 464.

[57] J.M.Rius, M.Ferrando, L.Jofre, E.de los Reyes, A.Elias, A.Broquetas: "Microwave Tomography: an Algorithm for Cylindrical Geometries", Electronics Letters, Vol. 23, no. 11, May 1987, pp. 564-565.

[58] E.Salerno: "Tecniche di Tomografia Ricostruttiva a Microonde di Tipo Diffrattivo", Tesi di Laurea, Facolta' di Ingegneria, Pisa, a.a. 1984/'85.

[59] C.F.Schueler, H.Lee, G.Wade: "Fundamentals of Digital Ultrasonic Imaging", IEEE Trans., Vol. SU-31, no. 4, July 1984, pp. 195 - 217.

[60] J.R.Shewell, E.Wolf: "Inverse Diffraction and a New Reciprocity Theorem", J.Opt.Soc.Am., no. 58, 1968, pp. 1596-1603.

[61] M.Slaney, A.C.Kak, L.E.Larsen: "Limitations of Imaging with First Order Diffraction Tomography", IEEE Trans., Vol. MTT-32, no. 8, Aug. 1984, pp. 860-874.

[62] J.A.Stratton: "Electromagnetic Theory", McGraw - Hill, New York, 1941.

[63] H.C.Van De Hulst: "Light Scattering by Small Particles", John Wiley and Sons, New York, 1957.

[64] E.Wolf: "Three-Dimensional Structure Determination of Semi-Transparent Objects from Holographic Data", Opt. Comm., Vol. 1, no. 4, Sept./Oct. 1969, pp. 153 - 156.

[65] E.Wolf: "Determination of Amplitude and Phase by Holography", J.Opt.Soc.Am., Vol. 60, no. 3, 1970, pp. 18-20.

[66] M.Bramanti, G.Pugliano, E.A.Salerno:"Possibili Correzioni delle Distorsioni Indotte da Fenomeni di Depolarizzazione delle Onde Elettromagnetiche su Immagini Ottenute con Tecniche di Tomografia Ricostruttiva a Microonde", IEI - CNR, Pisa, N.I. B4-01, Gen. 1988.

[67] M.Bramanti, G.Pugliano, E.A.Salerno: "Considerazioni Teoriche su Alcuni Aspetti Realizzativi di una Tecnica di Tomografia Diffrattiva Basata sull'Approssimazione di Born", IEI - CNR, Pisa, N.I. B4-03, Gen. 1988.