ISTITUTO DI ELABORAZIONE DELLA INFORMAZIONE
C.N.R. – PISA

EQUIVALENZA E SIMILITUDINE DI SISTEMI COSTITUITI DA MACCHINE SEQUENZIALI INTERCONNESSE

P. CIOMPI, L. SIMONCINI

Nota Interna B73-3
Marzo 1973

INTRODUZIONE

Un sistema digitale è costituito generalmente da un collegamento di due o più macchine sequenziali.

Nella letteratura [1], [2] viene trattato specificamente il problema dell'equivalenza fra microprogrammi implementati da macchine sequenziali di modelli diversi in una struttura di sistema digitale formata dal collegamento di due macchine, l'una detta "parte controllo" e l'altra detta "parte operativa". In tali lavori viene mostrato come la scelta dei modelli delle macchine che compongono il collegamento, influenzi sia la velocità di calcolo, sia la complessità delle reti, sia la temporizzazione del sistema.

Nel nostro lavoro ci proponiamo di trattare in maniera generale il problema dell'equivalenza fra collegamenti di macchine sequenziali a stati finiti, in modo da avere una visione completa e teorica del problema, e di essere in grado poi di utilizzare i risultati ottenuti a tutti quei problemi che sono schematizzabili come connessioni di macchine astratte.

Nel primo capitolo verranno richiamati alcune definizioni e teoremi sulle macchine sequenziali a stati finiti.

Nel secondo capitolo verranno ricavate le condizioni per le quali sono soddisfatte le relazioni di equivalenza e similitudine fra connessioni seriali di macchine sequenziali ottenute con trasformazioni di equivalenza e similitudine sulle macchine componenti.

Nel terzo capitolo verranno ricavate le condizioni per le quali sono soddisfatte le relazioni di equivalenza e similitudine fra macchine chiuse autonome ottenute con trasformazioni di equivalenza e similitudine sulle macchine componenti.

Nel quarto capitolo verranno ricavate le condizioni per le quali sono soddisfatte le relazioni di equivalenza e similitudine fra reti di macchine ottenute per sostituzione delle macchine componenti con macchine di modello diverso.

INDICE

1. RICHIAMI SUI MODELLI DI MACCHINE SEQUENZIALI A STATI FINITI. [3], [4].

DEFINIZIONE 1.1 - (Macchine a stati finiti).

Una macchina a stati finiti è un modello astratto che consiste di un insieme finito di simboli di ingresso, di un insieme finito di simboli di uscita, di un insieme finito di stati, di una funzione stato di uscita e di una funzione stato successivo.
Gli ingressi, le uscite e gli stati sono definiti solamente per valori interi del tempo.

Sarà usata la notazione $X(t)$, $Z(t)$, $S(t)$, per denotare rispettivamente l'ingresso, l'uscita e lo stato al tempo t. La funzione stato successivo specifica $S(t+1)$ in funzione di $S(t)$ e $X(t)$, mentre la funzione di uscita specifica $Z(t)$ in funzione di $S(t)$ e $X(t)$.

La coppia dei valori $(S(t), X(t))$ viene detta "stato totale" della macchina al tempo t,
Nella letteratura esistono due modelli fondamentali per le macchine sequenziali: il modello di Mealy e il modello di Moore.
Essi differiscono per la funzione di uscita che nel modello di Mealy specifica $Z(t)$ in funzione di $S(t)$ e $X(t)$, e nel modello di Moore specifica $Z(t)$ solamente in funzione di $S(t)$.
Pertanto le relazioni che definiscono i due modelli matematici sono:
Modello di Mealy:

$$\begin{aligned} S(t+1) &= S\,[X(t), S(t)] \\ Z(t) &= Z\,[X(t), S(t)] \end{aligned}$$

Modello di Moore:

$$\begin{aligned} S(t+1) &= S\,[X(t), S(t)] \\ Z(t) &= Z\,[S(t)] \end{aligned}$$

Le due funzioni $S(t+1)$ e $Z(t)$ sono comunemente rappresentate per mezzo di una tabella di flusso. In essa le colonne corrispondono ai simboli di ingresso e le righe agli stati interni al tempo presente. Una riga e una colonna individuano una casella della tabella in cui sono indicati lo stato successivo e la uscita. Poichè nel modello di Moore l'uscita dipende solo dallo stato interno, tutte le caselle di una riga contengono lo stesso simbolo d'uscita e quindi esso può essere specificato usando una apposita colonna.

1.1. Richiami sull'equivalenza e la similitudine tra macchine a stati finiti.

DEFINIZIONE 1.1.1: (Equivalenza fra stati):

Date due macchine sequenziali M_1 ed M_2, diremo che lo stato S_i di M_1 e lo stato T_j di M_2 sono equivalenti se poste le macchine M_1 ed M_2 in tali stati, per qualsiasi sequenza di ingressi che venga presentata alle macchine, esse danno in uscita sequenze uguali.

Indicheremo che S_1 è equivalente ad T_j con $S_i \equiv T_j$.

A partire da stati equivalenti S_i di M_1 e T_j di M_2 le macchine M_1 ed M_2 sotto le stesse sequenze di ingresso transiscono in stati equivalenti.

La definizione di equivalenza fra stati si applica anche nel caso in cui $M_1 = M_2$.

DEFINIZIONE 1.1.2 - (Equivalenza fra macchine):

Due macchine sequenziali M_1 ed M_2 sono equivalenti se e soltanto se per ciascun stato S_i di M_1 esiste almeno uno stato equivalente T_j in M_2, e per ciascun stato T_j di M_2 esiste almeno uno stato equivalente S_i in M_1.

Indicheremo che M_1 è equivalente ad M_2 con $M_1 \equiv M_2$.

Una macchina M si dice "ridotta" se e soltanto se il fatto che lo stato $S_i \equiv S_j$ implica che $S_i = S_j$.

Se due macchine ridotte sono equivalenti esse sono isomorfe.

Pertanto, per qualsiasi insieme di macchine equivalenti esiste una unica macchina ridotta che è quella con il minor numero di stati.

TEOREMA 1.1.1:

Non può esistere equivalenza fra macchine di modello diverso.

Dimostrazione:

Supponiamo che esista una macchina di Mealy equivalente ad una macchina di Moore. Dalla definizione di equivalenza è necessario che nella macchina di Mealy esista uno stato S_i equivalente ad uno stato T_j della macchina di Moore tale che per ciascuna sequenza di ingresso le uscite delle due macchine siano uguali. Dall'arbitrarietà delle sequenze di ingresso deriva che la riga S_i della tabella della macchina di Mealy deve avere in tutte le caselle associate la stessa uscita 0_i associata allo stato T_j della macchina di Moore. Siccome questo deve verificarsi per tutti gli stati, la macchina di Mealy che si ottiene è in contrasto con la definizione del modello matematico, coincidendo con quella del modello matematico di Moore.

DEFINIZIONE 1.1.3 - (Contenimento):

Date due macchine M_1 ed M_2 diremo che la macchina M_1 è contenuta nella macchina M_2 e indicheremo $M_1 \subset M_2$ se per ogni stato S_i di M_1 esiste almeno uno stato T_j in M_2 tale che sia $T_j \equiv S_i$.

COROLLARIO:

Una macchina di Moore non può mai contenere una macchina di Mealy. Viceversa una macchina di Mealy può contenere una macchina di Moore.

DEFINIZIONE 1.1.4 - (Similitudine)

Due macchine sequenziali M_1 ed M_2 si dicono simili se per ciascun stato S_i di M_1 esiste almeno uno stato T_j di M_2 e viceversa, tali che posta la macchina M_1 in S_i e la macchina M_2 in T_j, per una qualsiasi sequenza di ingressi che venga presentata alle macchine, esse danno in uscita sequenze caratterizzate dal fatto che $Z_i(t) = Z_j(t + k)$ con $k \neq 0$, intero; k rappresenta la traslazione temporale fra le uscite della macchina M_1 ed M_2.

Se $k > 0$ diremo M_1 simile anticipata rispetto ad M_2 e indicheremo $M_1 \overset{\sim}{\rightarrow} M_2$ e per analogia $S_i \overset{\sim}{\rightarrow} T_j$. Se $k < 0$ diremo M_1 simile ritardata rispetto ad M_2 e indicheremo $M_1 \overset{\sim}{\leftarrow} M_2$ e per analogia $S_i \overset{\sim}{\leftarrow} T_j$.

In particolare ci interesseremo del caso in cui $|k| = 1$.

Esiste nella letteratura [5] un metodo, dovuto a Cadden, che permette di trasformare una macchina M_1 in una M_2 simile anticipata o ritardata con $|k| = 1$.

Data una macchina M_1 è sempre possibile ottenere la macchina M_2 simile ritardata, ma non è sempre possibile ottenere la simile anticipata di M_1. Si pensi al caso in cui la macchina M_1 è di Mealy.

TEOREMA 1.1.2:

Svariate macchine non equivalenti fra loro possono essere simili ritardate di una data macchina M_1.

Dimostrazione:

Data una macchina M_1 e la macchina M_2 simile ritardata ottenuta col metodo del Cadden, le altre macchine che si ottengono aggiungendo alla tabella di M_2 righe che sono uguali, per quanto riguarda gli stati successivi ad altre righe di M_2, e differiscono da queste solo per l'uscita, sono certamente simili ritardate rispetto a M_1 e non equivalenti a M_2.

Consideriamo l'esempio di Fig. 1.

	X_1	X_2
A	A^1	B^0
B	B^0	A^1

M_1

	X_1	X_2	
A'	A'	B'	1
B'	B'	A'	0

M_2

	X_1	X_2	
A''	A''	B''	1
B''	B''	A''	0
C''	A''^{0}	B''^{1}	

M_3

Fig. 1

$M_2 \stackrel{\sim}{\leftarrow} M_1$ ove M_2 è ottenuta col metodo del Cadden, e $M_3 \stackrel{\sim}{\leftarrow} M_1$. Vale la relazione: $M_3 \not\equiv M_2$.

E' facile dimostrare che tutte le macchine simili ritardate rispetto ad M_1 devono contenere la macchina M_2 ottenuta col metodo del Cadden.

TEOREMA 1.1.3:

Tutte le macchine simili anticipate rispetto ad una macchina M_1 sono equivalenti fra loro.

Dimostrazione:

Consideriamo una macchina M_1 e due macchine M_2 ed M_3, ove $M_2 \stackrel{\sim}{\rightarrow} M_1$ e $M_3 \stackrel{\sim}{\rightarrow} M_1$. Per la similitudine fra le macchine M_1 ed M_3, dato uno stato S'' di M_3 esiste almeno uno stato S di M_1 tale che poste le due macchine M_3 ed M_1 su S'' ed S per qualsiasi sequenza degli ingressi le uscite sono rispettivamente del tipo $Z_1 Z_2 \ldots\ldots Z_n$ e $Z_0 Z_1 Z_2 \ldots\ldots Z_n$. Ma ad S corrisponde almeno uno stato S' di M_2 tale che la macchina M_2 sotto le precedenti sequenze d'ingresso dà come uscita $Z_1 Z_2 \ldots\ldots Z_n$. Pertanto $S'' \equiv S'$. Questo vale per tutti gli stati di M_3. Con ragionamento analogo si può mostrare che per ogni stato S' di M_2 esiste almeno uno stato S'' di M_3, tale che $S' \equiv S''$. Pertanto $M_2 \equiv M_3$

COROLLARIO :

Due stati S_i e S_j simili anticipati di uno stesso stato S_k sono equivalenti.

DEFINIZIONE 1.1.5 - (Inclusione)

Date due macchine M_1 ed M_2 diremo che la macchina M_1 è inclusa anticipata (ritardata) nella macchina M_2 se per ogni stato S_i di M_1 esiste almeno uno stato T_j in M_2 tale che $T_j \overset{\sim}{\leftarrow} S_i$ ($T_j \overset{\sim}{\rightarrow} S_i$).

Nel seguito del lavoro quando parleremo di macchine simili, considereremo quelle ottenute col metodo del Cadden. Osserviamo a tale proposito che se una macchina di Mealy M_1 possiede uno "stato non accessibile", cioè uno stato che non compare mai come successore di qualche stato, la macchina M_2 simile ritardata che si ottiene col metodo del Cadden possiede uno stato con uscita non specificata. Si consideri ad esempio le due macchine M_1 ed M_2 di fig. 2. La macchina M_2 è ottenuta dalla M_1 col metodo del Cadden. Lo stato A è stato non accessibile di M_1 e ciò comporta in M_2 che lo stato A' ha uscita non specificata sia per l'ingresso X_1 che per l'ingresso X_2.

	X_1	X_2
A	B^0	C^1
B	C^1	D^0
C	B^0	C^1
D	C^1	B^0

M_1

	X_1	X_2	
A'	B'^-	C'^-	
B'	C'	D'	0
C'	B'	C'	1
D'	C'	B'	0

M_2

Fig. 2

Dal momento che a noi interesserà che ciascuno stato di una macchina M abbia nella macchina simile M' come simile ritardato almeno uno stato di Moore, quando si verifichino situazioni come nell'esempio di fig. 2, supporremo che per lo stato che ha uscita non specificata, tale uscita venga specificata in modo che lo stato risulti di Moore.

2. EQUIVALENZA TRA CONNESSIONI SERIALI DI MACCHINE OTTENUTE CON TRASFORMAZIONI DI EQUIVALENZA E SIMILITUDINE SULLE MACCHINE COMPONENTI

In questo capitolo si vogliono studiare i problemi relativi all'equivalenza e alla similitudine di connessioni seriali di macchine ottenute tramite le trasformazioni di equivalenza e similitudine sulle macchine componenti le connessioni seriali.

DEFINIZIONE 2.1:

Date due macchine sequenziali M_1 ed M_2 si definisce connessione seriale fra M_1 ed M_2 quella macchina M complessiva che si ottiene collegando le uscite 0_1 di M_1 a tutti gli ingressi I_2 di M_2.

Questo implica che $0_1 = I_2$, e che la macchina M ha tanti ingressi quanti sono gli ingressi di M_1 e tante uscite quante sono le uscite di M_2. Gli stati della macchina M sono tutte le possibili combinazioni degli stati S_i di M_1 e T_j di M_2.
Indicheremo il generico stato di M con S_iT_j.
Indicheremo inoltre che la macchina M è connessione seriale di M_1 e M_2 con $M(M_1, M_2)$.

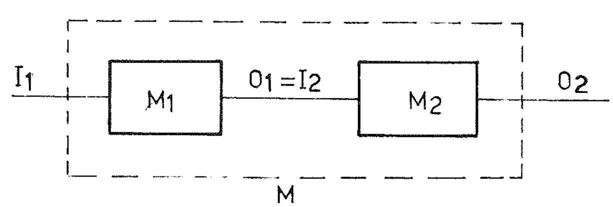


Fig. 3

E' facile dimostrare che se una delle macchine costituenti $M(M_1, M_2)$ od entrambe sono di Moore, allora la macchina M è di Moore.
Se invece M_1 ed M_2 sono entrambe di Mealy, la macchina M può risultare sia di Mealy che di Moore.

L'esempio di Fig. 4 mostra che la connessione seriale delle due macchine di Mealy M_1 ed M_2, è una macchina M di Moore.

	X_1	X_2
S_1	S_1^{02}	S_3^{02}
S_2	S_2^{03}	S_3^{03}
S_3	S_2^{02}	S_1^{01}

M_1

	0_1	0_2	0_3
T_1	$T_2^{U_1}$	$T_1^{U_1}$	$T_1^{U_3}$
T_2	$T_1^{U_2}$	$T_2^{U_2}$	$T_2^{U_4}$

M_2

	X_1	X_2	
S_1T_1	S_1T_1	S_3T_1	U_1
S_1T_2	S_1T_2	S_3T_2	U_2
S_2T_1	S_2T_1	S_3T_1	U_3
S_2T_2	S_2T_2	S_3T_2	U_4
S_3T_1	S_2T_1	S_1T_2	U_1
S_3T_2	S_2T_2	S_1T_1	U_2

M

Fig. 4

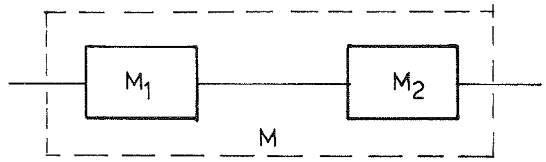
TEOREMA 2.1:

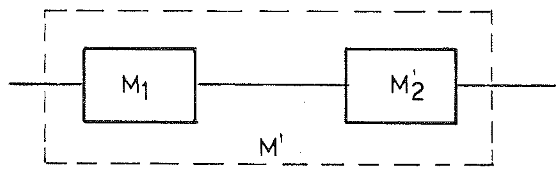
Sia data la macchina $M(M_1, M_2)$. Sostituendo a M_1 o ad M_2 o ad entrambe, macchine equivalenti, la connessione seriale così ottenuta è equivalente ad M.
La dimostrazione del teorema è banale.

TEOREMA 2.2:

Siano le macchine $M(M_1, M_2)$ e $M'(M_1, M'_2)$ tali che $M'_2 \stackrel{\sim}{\rightarrow} M_2$ $(M'_2 \stackrel{\sim}{\leftarrow} M_2)$, vale allora la relazione seguente: $M' \stackrel{\sim}{\rightarrow} M$ $(M' \stackrel{\sim}{\leftarrow} M)$.
Dimostrazione:

Per ciascuno stato S_iT_j di M, esiste sempre almeno uno stato $S_iT'_j$ di M', ove $T'_j \stackrel{\sim}{\rightarrow} T_j$ $(T'_j \stackrel{\sim}{\leftarrow} T_j)$, tale che $S_iT'_j \stackrel{\sim}{\rightarrow} S_iT_j$ $(S_iT'_j \stackrel{\sim}{\leftarrow} S_iT_j)$.
Analogamente per ciascun stato $S_iT'_j$ di M' esiste sempre almeno uno stato S_iT_j di M dove $T'_j \stackrel{\sim}{\rightarrow} T_j$ $(T'_j \stackrel{\sim}{\leftarrow} T_j)$ tale che $S_iT'_j \stackrel{\sim}{\rightarrow} S_iT_j$ $(S_iT'_j \stackrel{\sim}{\leftarrow} S_iT_j)$.
Dalla definizione 1.1.4 segue che $M' \stackrel{\sim}{\rightarrow} M(M' \stackrel{\sim}{\leftarrow} M)$.





$$M_2' \stackrel{\rightarrow}{\sim} M_2 \Rightarrow M' \stackrel{\rightarrow}{\sim} M; \qquad M_2' \stackrel{\leftarrow}{\sim} M_2 \Rightarrow M' \stackrel{\leftarrow}{\sim} M$$

Fig. 5

Consideriamo adesso la macchina la cui tabella di flusso è la seguente:

	X_1	X_2	. . . . .	X_m	
T_1	T_1	T_2		T_m	X_1
T_2	T_1	T_2		T_m	X_2
$\vdots$					
T_m	T_1	T_2		T_m	X_m

D

Tale macchina rappresenta un ritardo.

La chiameremo "macchina ritardo" e le indicheremo nel seguito con D.

Da quanto precede discende il seguente teorema:

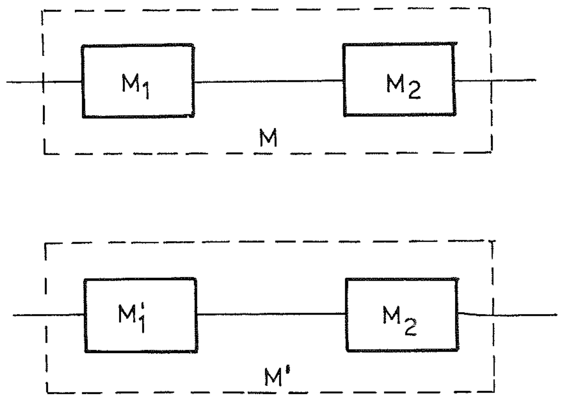
TEOREMA 2.3

Data una macchina M', la macchina $M(M', D)$ ove D è la macchina ritardo, è tale da verificare la relazione seguente

$$M' \stackrel{\rightarrow}{\sim} M.$$

TEOREMA 2.4

Siano le macchine $M(M_1, M_2)$ e $M'(M'_1, M_2)$ tali che $M'_1 \gtrsim M_1$ $(M'_1 \lesssim M_1)$, vale allora la relazione seguente: M' include M (M' è inclusa in M).



$M'_i \gtrsim M_1 \Rightarrow M'$ include M; $M'_1 \lesssim M_1 \Rightarrow M$ include M'

Fig. 6

Dimostrazione:

Dimostriamo il teorema nel caso in cui $M'_1 \gtrsim M_1$. Sia S_iT_j uno stato qualsiasi della macchina M, e sia $S'_i(T_j)_{+1}$ uno stato della macchina M' ove $S'_i \gtrsim S_i$ e $(T_j)_{+1}$ è lo stato successore dello stato totale $(T_j 0_i)$ della macchina M_2, ove 0_i è l'uscita associata ad S_i.

Vogliamo dimostrare che vale la relazione $S_iT_j \lesssim S'_i\,(T_j)_{+1}$.
Per qualsiasi sequenza di ingresso le macchine M_1 e M'_1 poste negli stati S_i ed S'_i simili transiranno sempre su stati simili dando uscite del tipo $0_i\ 0_k\ 0_{k+1}$ ...... e $0_k\ 0_{k+1}$ ....

La macchina M_2 di M transirà dallo stato totale $(T_j\ 0_i)$ allo stato totale $((T_j)_{+1}\,0_k)$ mentre la macchina M_2 di M' transirà dallo stato totale $((T_j)_{+1}\,0_k)$, allo stato totale $((T_j)_{+2}\,0_{k+1})$.

Pertanto $((T_j)_{+2}\,0_{k+1})$ è lo stato totale successivo a $((T_j)_{+1}\,0_k)$ e quindi le macchine M_2 di M e M_2 di M' transiranno sempre su stati totali uno successore dell'altro, e quindi M ed M' daranno luogo a uscite del tipo $Z_0\,Z_1\,Z_2$ .... e $Z_1\,Z_2$........ rispettivamente.

Poichè per ogni stato S_iT_j di M è sempre possibile associare almeno uno stato $S'_i(T_j)_{+1}$ di M' ove $S_iT_j \lesssim S'_i(T_j)_{+1}$, se ne conclude che certamente M' include la mac-

china ritardata M.
Con ragionamenti analoghi si prova che se $M'_1 \stackrel{\sim}{\leftarrow} M_1$, la macchina M' è inclusa nella macchina M.

Dal teorema 2.4 discende direttamente il seguente teorema

TEOREMA 2.5:

Data una macchina M', la macchina $M(D, M')$, ove D è la macchina ritardo, è tale da verificare la relazione:

$$M' \text{ include } M$$

TEOREMA 2.6:

Siano le macchine $M(M_1, M_2)$ ed $M'(M'_1, M_2)$, tali che $M'_1 \stackrel{\sim}{\rightarrow} M_1$; condizione necessaria e sufficiente perchè sia: $M' \stackrel{\sim}{\rightarrow} M$ è che: se $\{P_1\}$ e $\{\overline{P_1}\}$ sono rispettivamente gli insiemi degli stati di M' mappati e non mappati dalla corrispondenza determinata nel teorema 2.4, per ciascun stato $P_i \in \{\overline{P_1}\}$ esista almeno uno stato $P_J \in \{P_1\}$ tale che $P_i \equiv P_j$.

Dimostrazione:

Il teorema è chiaramente valido per la condizione di sufficienza e nel caso in cui $\{\overline{P_1}\} = \emptyset$. Ci limitiamo a dimostrare la necessarietà di tale condizione: ammettiamo per assurdo che $M' \stackrel{\sim}{\rightarrow} M$ e che esista uno stato $P_i \in \{\overline{P_1}\}$ di M' e che $P_i \not\equiv P_j$ ove $P_j \in \{P_1\}$. Poichè $M' \stackrel{\sim}{\rightarrow} M$ allo stato di P_i di M' corrisponde uno stato Q_k di M, tale che $P_i \stackrel{\sim}{\rightarrow} Q_k$. D'altra parte a questo stato Q_k corrisponde certamente in M' uno stato $P_j \in \{P_1\}$. Ne consegue che P_i e P_j sono stati simili anticipati di uno stesso stato Q_k e per quanto detto nel corollario del teorema 1.1.3 deve essere $P_i \equiv P_j$ il che contraddice l'ipotesi.

TEOREMA 2.7:

Gli stati $P_i \in \{\overline{P_1}\}$ sono stati non accessibili nella tabella della macchina M'.

Dimostrazione:

Mostriamo che per ciascuno elemento P_i dell'insieme $\{P_2\}$ degli stati successori di M' esiste almeno un elemento Q_j dell'insieme $\{Q\}$ degli stati di M tale che $P_i \stackrel{\sim}{\rightarrow} Q_j$. Sia infatti $P_i = S'_i(T_j)_{+1}$ ove $P_i \in \{P_2\}$; sia $((S'_i)_{-1}\ T_j, X_k)$ uno degli stati totali di M' di cui P_i è successore.
Consideriamo lo stato $Q_j = S_iT_j$ di M, ove S_i, è tale che $S_i \stackrel{\sim}{\leftarrow} S'_i$. Per la corri-

spondenza determinata nel teorema 2.4 si ha che: $P_i \stackrel{\sim}{\rightarrow} Q_j$.
Risulta pertanto dimostrato che gli stati $P_i \in \{P_2\}$, sono mappati nella corrispondenza. Pertanto gli stati $P_j \in \{\overline{P_1}\}$ sono tali che $P_j \notin \{P_2\}$ e quindi sono stati non accessibili per la macchina M'.

Dai teoremi precedenti seguono i seguenti corollari:

COROLLARIO 1

Siano le macchine $M(M_1, M_2)$ e $M'(M'_1, M_2)$ ove $M'_1 \stackrel{\sim}{\rightarrow} M_1$.

Se M' non ha stati non accessibili, vale la relazione

$$M' \stackrel{\sim}{\rightarrow} M .$$

COROLLARIO 2

Siano le macchine $M(D, M_2)$ e M_2 con D è la macchina ritardo, se M_2 non ha stati non accessibili, vale la relazione:

$$M_2 \stackrel{\sim}{\rightarrow} M$$

A chiarimento dei teoremi precedenti consideriamo gli esempi che seguono.

Esempio 1:

Siano date le macchine $M(M_1, M_2)$ e $M'(M'_1, M_2)$ le cui tabelle sono mostrate in Fig. 7

	X_1	X_2	
S_1	S_1	S_2	0_1
S_2	S_2	S_1	0_2

M_1

	0_1	0_2	
T_1	T_1	T_2	Z_1
T_2	T_1	T_1	Z_2

M_2

	X_1	X_2	
S_1T_1	S_1T_1	S_2T_1	Z_1
S_1T_2	S_1T_1	S_2T_1	Z_2
S_2T_1	S_2T_2	S_1T_2	Z_1
S_2T_2	S_2T_1	S_1T_1	Z_2

M

	X_1	X_2
S'_1	$S'^{0_1}_1$	$S'^{0_2}_2$
S'_2	$S'^{0_2}_2$	$S'^{0_1}_1$

M'_1

	0_1	0_2	
T_1	T_1	T_2	Z_1
T_2	T_1	T_1	Z_2

M

	X_1	X_2	
S'_1T_1	S'_1T_1	S'_2T_2	Z_1
S'_1T_2	S'_1T_1	S'_2T_1	Z_2
S'_2T_1	S'_2T_2	S'_1T_1	Z_1
S'_2T_1	S'_2T_1	S'_1T_1	Z_2

M'

Fig. 7

La corrispondenza determinata nel teorema 2.4 fra gli stati simili di M e M' e la seguente:

$$S_1T_1 \rightleftarrows S_1'T_1, \quad S_1T_2 \rightleftarrows S_1'T_1, \quad S_2T_1 \rightleftarrows S_2'T_2, \quad S_2T_2 \rightleftarrows S_2'T_1$$

Lo stato $S_1'T_2$ di M' non è mappato dalla corrispondenza, ed è uno stato non accessibile di M'. Poichè lo stato $S_1'T_2$ non è equivalente a nessuno degli altri stati di M' si conclude che la macchina M' include la macchina M.

Esempio 2:

Siano date la macchine $M(M_1, M_2)$ e $M'(M_1' M_2)$ le cui tabelle sono mostrate in Figura 8.

	X_1	X_2	
S_1	S_2	S_1	0_2
S_2	S_2	S_1	0_1

M_1

	0_1	0_2	
T_1	T_2	T_1	Z_1
T_2	T_1	T_1	Z_2

M_2

	X_1	X_2	
S_1T_1	S_2T_1	S_1T_1	Z_1
S_1T_2	S_2T_1	S_1T_1	Z_2
S_2T_1	S_2T_2	S_1T_2	Z_1
S_2T_2	S_2T_1	S_1T_1	Z_2

M

	X_1	X_2
S_1'	$S_2'^{0_1}$	$S_1'^{0_2}$
S_2'	$S_2'^{0_1}$	$S_1'^{0_2}$

M_1'

	0_1	0_2	
T_1	T_2	T_1	Z_1
T_2	T_1	T_1	Z_2

M_2

	X_1	X_2	
$S_1'T_1$	$S_2'T_2$	$S_1'T_1$	Z_1
$S_1'T_2$	$S_2'T_1$	$S_1'T_1$	Z_2
$S_2'T_1$	$S_2'T_2$	$S_1'T_1$	Z_1
$S_2'T_2$	$S_2'T_1$	$S_1'T_1$	Z_2

M'

Fig. 8

La corrispondenza determinata nel teorema fra gli stati simili di M e M', è la seguente:

$$S_1T_1 \rightleftarrows S_1'T_1, \quad S_1T_2 \rightleftarrows S_1'T_1, \quad S_2T_1 \rightleftarrows S_2'T_2, \quad S_2T_2 \rightleftarrows S_2'T_1$$

Lo stato S'_1T_2 di M' non essendo mappato nella corrispondenza, è uno stato non accessibile di M'. Poichè è $S'_1T_2 \equiv S'_2T_2$, si conclude che $M' \gtrsim M$.

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti nei teoremi precedenti, si può dimostrare:

TEOREMA 2.8:

Siano le macchine $M(M_1, M_2)$ e $M'(M'_1, M'_2)$ tali che $M'_1 \gtrsim M_1$ e $M'_2 \gtrsim M_2$. Vale allora la relazione:

$$M' \text{ include } M \quad \text{e} \quad K = 2$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè sia $M' \gtrsim M$ con $k = 2$ è identica a quella esposta nel teorema 2.6..
Gli stati S_iT_j di M e $S'_i(T'_j)_{+1}$ di M' ove $S'_i \gtrsim S_i$ e $(T'_j)_{+1}$ è simile anticipato dello stato successore allo stato totale $(T_j, 0_i)$ di M_2, sono tali che vale la relazione:

$$S_iT_j \lesssim S'_i\,(T'_j)_{+1} \quad \text{con} \quad k = 2$$

Esempio 3:

Siano date le macchine $M(M_1, M_2)$ e $M'(M'_1, M'_2)$ tali che $M'_1 \gtrsim M_1$ e $M'_2 \gtrsim M_2$, le cui tabelle sono mostrate in Fig. 9

	X_1	X_2
S'_1	$S'^{0_1}_1$	$S'^{0_2}_2$
S'_2	$S'^{0_2}_2$	$S'^{0_1}_1$

M'_1

	0_1	0_2
T'_1	$T'^{Z_1}_1$	$T'^{Z_2}_2$
T'_2	$T'^{Z_1}_1$	$T'^{Z_1}_1$

M'_2

	X_1	X_2
$S'_1T'_1$	$S'_1T'^{Z_1}_1$	$S'_2T'^{Z_2}_2$
$S'_1T'_2$	$S'_1T'^{Z_1}_1$	$S'_2T'^{Z_1}_1$
$S'_2T'_1$	$S'_2T'^{Z_2}_2$	$S'_1T'^{Z_1}_1$
S'_2T'	$S'_2T'^{Z_2}$	$S'_1T'^{Z_1}_1$

M'

	X_1	X_2	
S_1	S_1	S_2	0_1
S_2	S_2	S_1	0_2

	0_1	0_2	
T_1	T_1	T_2	Z_1
T_2	T_1	T_1	Z_2

	X_1	X_2	
S_1T_1	S_1T_1	S_2T_1	Z_1
S_1T_2	S_1T_1	S_2T_1	Z_2
S_2T_1	S_2T_2	S_1T_2	Z_1
S_2T_2	S_2T_1	S_1T_1	Z_2

Fig. 9

Gli stati simili con $k = 2$ nella corrispondenza sono:

$$S_1 T_1 \underset{\leftarrow}{\sim} S'_1 T'_1 , \quad S_1 T_2 \underset{\leftarrow}{\sim} S'_1 T'_1 \qquad\qquad S_2 T_1 \underset{\leftarrow}{\sim} S'_2 T'_2 ; \quad S_2 T_2 \underset{\leftarrow}{\sim} S'_2 T'_1$$

Lo stato $S'_1 T'_2$ non è mappato nella corrispondenza e non è equivalente a nessuno degli altri stati. Pertanto la macchina M' include la macchina M con $k = 2$, come può vedersi dalla sequenza delle uscite che M ed M' forniscono a partire dagli stati $S_1 T_1$ e $S'_1 T'_2$ sotto la sequenza di ingresso $X_2 X_1 X_2 X_2 X_1 X_1$.

	X_2	X_1	X_2	X_2	X_1	X_1	
$S'_2 T'_1$	Z_2	Z_1	Z_1	Z_2	Z_1	Z_2	
$S_1 T_1$	Z_1	Z_1	Z_2	Z_1	Z_1	Z_2	Z_1

TEOREMA 2.9:

Siano le macchine $M(M'_1\ M_2)$ e $M'(M_1 , M'_2)$ tali che $M'_1 \underset{\rightarrow}{\sim} M_2$ ed $M'_2 \underset{\rightarrow}{\sim} M_2$ vale la relazione seguente:

$$M \supset M'$$

Dimostrazione:

Facendo riferimento alla Fig. 10 si consideri la macchina $M''(M_1 , M_2)$.

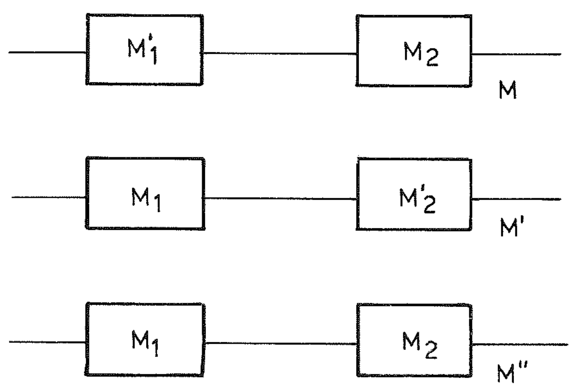


Fig. 10

Dal teorema 2.2. segue che $M' \underset{\rightarrow}{\sim} M''$. Ciò significa che per ciascun stato $S_i T'_j$ di M' esiste almeno uno stato $S_i T_j$ di M'' e viceversa tale che le macchine M' ed M'' sotto la stessa sequenza di ingressi danno uscite rispettivamente: $Z_1\,Z_2\,Z_3\ldots\ldots$ e $Z_0\,Z_1\,Z_2\,Z_3\ldots\ldots$

Dal teorema 2.4. segue che M include M'' e quindi per ogni stato S_iT_j di M'' esiste almeno uno stato $S_i'(T_j)_{+1}$ di M tale che $S_i'(T_j)_{+1} \underset{\rightarrow}{\sim} S_iT_j$. Pertanto poste le macchine M'' e M rispettivamente su S_iT_j e $S_i'(T_j)_{+1}$, sotto la stessa sequenza di ingresso esse danno uscite del tipo $Z_0\,Z_1\,Z_2\,Z_3$ e $Z_1\,Z_2\,Z_3\ldots\ldots$ Pertanto fra gli stati di M e M' vale la seguente relazione: $S_i'(T_j)_{+1} \equiv S_iT_j'$. Poichè per ciascun stato di M' si trova almeno uno stato equivalente in M, segue che $M \supset M'$. Inoltre dal teorema 2.7 segue che gli stati di M che non sono equivalenti ad alcuno stato di M' sono stati non accessibili nella tabella della macchina M.

TEOREMA 2.10:

Condizione necessaria e sufficiente perchè tra le macchine $M(M_2', M_2)$ e $M'(M_1, M_2')$ con $M_1' \underset{\rightarrow}{\sim} M_1$ e $M_2' \underset{\rightarrow}{\sim} M_2$ valga la relazione: $M \equiv M'$ è che valga la relazione: $M'' \underset{\leftarrow}{\sim} M$ ove $M''(M_1, M_2)$.

Dimostrazione:

Se $M'' \underset{\leftarrow}{\sim} M$ allora per ciascun stato $S_i'(T_j)_{+1}$ di M esiste almeno uno stato S_iT_j di M'' tale che $S_iT_j \underset{\leftarrow}{\sim} S_i'(T_j)_{+1}$ e viceversa . Essendo $M' \underset{\rightarrow}{\sim} M''$ per ciascun stato S_iT_j di M'' esiste almeno uno stato S_iT_j' di M' tale che $S_iT_j' \underset{\rightarrow}{\sim} S_iT_j$ e viceversa. Ne consegue che per ciascun stato $S_i'(T_j)_{+1}$ di M esiste almeno uno stato S_iT_j' di M' tale che $S_i'(T_j)_{+1} \equiv S_iT_j'$ e viceversa. Pertanto $M \equiv M'$.

Se non vale la relazione $M'' \underset{\leftarrow}{\sim} M$ non è possibile che $M \equiv M'$.

Supponiamo per assurdo che $M \equiv M'$ e $S_i'(T_j)_{+1}$ sia uno stato di M che non ha stato simile in M''. Poichè $M \equiv M'$, esiste uno stato S_iT_j' di M' tale che $S_i'(T_j)_{+1} \equiv S_iT_j'$. Poichè $M' \underset{\rightarrow}{\sim} M''$ esiste uno stato S_iT_j di M'' tale che $S_iT_j' \underset{\rightarrow}{\sim} S_iT_j$. Vale allora la relazione $S_i'(T_j)_{+1} \underset{\rightarrow}{\sim} S_iT_j$ contro l'ipotesi.

Dai teoremi precedenti derivano i corollari seguenti:

COROLLARIO 1

Siano le macchine $M(M_1', M_2)$ e $M'(M_1, M_2')$ con $M_1' \underset{\rightarrow}{\sim} M_1$ e $M_2' \underset{\rightarrow}{\sim} M_2$, se M non ha stati non accessibili allora vale la relazione: $M \equiv M'$

COROLLARIO 2

Siano le macchine M_2 e $M'(D, M_2')$ con $M_2' \underset{\rightarrow}{\sim} M_2$ e D è la macchina ritardo, se M_2 e quindi M_2' non hanno stati non accessibili vale la relazione:

$$M_2 \equiv M'$$

COROLLARIO 3

Siano le macchine $M(M'_2, D)$ e M_2 con $M'_2 \overset{\sim}{\rightarrow} M_2$ e D è la macchina ritardo, se M non ha stati non accessibili vale la relazione:

$$M \equiv M_2$$

A chiarimento di quanto detto consideriamo il seguente esempio.

Esempio 4:

Siano le macchine $M(M'_1\ M_2)$ e $M'(M_1\ M'_2)$ le cui tabelle sono date in Fig. 11:

	X_1	X_2
S'_1	$S'^{\,0_2}_2$	$S'^{\,0_1}_1$
S'_2	$S'^{\,0_1}_1$	$S'^{\,0_3}_3$
S'_3	$S'^{\,0_2}_1$	$S'^{\,0_2}_2$

M'_1

	0_1	0_2	0_3	
T_1	T_1	T_2	T_1	Z_1
T_2	T_1	T_1	T_2	Z_2

M_2

	X_1	X_2	
$S'_1 T_1$	$S'_2 T_2$	$S'_1 T_1$	Z_1
$S'_1 T_2$	$S'_2 T_1$	$S'_1 T_1$	Z_2
$S'_2 T_1$	$S'_1 T_1$	$S'_3 T_1$	Z_1
$S'_2 T_2$	$S'_1 T_1$	$S'_3 T_2$	Z_2
$S'_3 T_1$	$S'_1 T_1$	$S'_2 T_2$	Z_1
$S'_3 T_2$	$S'_1 T_1$	$S'_2 T_1$	Z_2

M

	X_1	X_2	
S_1	S_2	S_1	0_1
S_2	S_1	S_3	0_2
S_3	S_1	S_2	0_3

M_1

	0_1	0_2	0_3
T'_1	$T'^{\,Z_1}_1$	$T'^{\,Z_2}_2$	$T'^{\,Z_1}_1$
T'_2	$T'^{\,Z_1}_1$	$T'^{\,Z_1}_1$	$T'^{\,Z_2}_2$

M'_2

	X_1	X_2	
$S_1 T'_1$	$S_2 T'_1$	$S_1 T'_1$	Z_1
$S_1 T'_2$	$S_2 T'_1$	$S_1 T'_1$	Z_1
$S_2 T'_1$	$S_1 T'_2$	$S_3 T'_1$	Z_2
$S_2 T'_2$	$S_1 T'_1$	$S_3 T'_1$	Z_1
$S_3 T'_1$	$S_1 T'_1$	$S_2 T'_1$	Z_1
$S_3 T'_2$	$S_1 T'_2$	$S_2 T'_2$	Z_2

M'

Fig. 11

La corrispondenza tra gli stati equivalenti di M' ed M è:

$$\begin{aligned} S_1 T_1' &\equiv S_1' T_1 \\ S_1 T_2' &\equiv S_1' T_1 \\ S_2 T_1' &\equiv S_2' T_2 \\ S_2 T_2' &\equiv S_2' T_1 \\ S_3 T_1' &\equiv S_3' T_1 \\ S_3 T_2' &\equiv S_3' T_2 \end{aligned}$$

Lo stato $S_1' T_2$ di M che non è mappato nella corrispondenza, è uno stato non accessibile per la macchina M. Inoltre non essendo equivalente a nessuno degli altri stati mappati, vale la relazione:

$$M \supset M' \, .$$

3. EQUIVALENZA TRA MACCHINE CHIUSE AUTONOME OTTENUTE CON TRASFORMAZIONI DI EQUIVALENZA E SIMILITUDINE SULLE MACCHINE COMPONENTI

In questo capitolo si vogliono studiare i problemi relativi all'equivalenza di macchine chiuse autonome ottenute richiudendo sugli ingressi le uscite di una connessione seriale di macchine.

DEFINIZIONE 3.1:

Per macchina chiusa autonoma si intende una macchina che ha solamente un simbolo di ingresso.

Poichè non interviene nessuna scelta circa il simbolo da applicare all'ingresso di tale macchina, essa opera senza alcuna influenza da parte del mondo esterno.

Una macchina di questo tipo viene descritta da una tabella di flusso composta da una sola colonna.

E' stato mostrato [6] che il funzionamento di una macchina di Mealy richiusa su se stessa è indeterminato. Pertanto nel seguito, quando parleremo di macchine chiuse autonome non prenderemo mai in considerazione quelle macchine autonome che provengono dalla richiusura di una macchina di Mealy.

DEFINIZIONE 3.2:

Due macchine $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ chiuse autonome si dicono equivalenti, quando per ciascuno stato di $\overline{M}$ esiste almeno uno stato di $\overline{M}'$, e viceversa, tali che poste le macchine inizialmente in questi stati esse danno la stessa sequenza di uscita.

Valgono le seguenti affermazioni:

a) Due macchine equivalenti aperte rimengono equivalenti richiuse. La corrispondenza fra gli stati equivalenti per le macchine chiuse è la stessa esistente fra gli stati equivalenti delle macchine aperte.

b) Due macchine M ed M' tali che $M \supset M'$ per richiusura danno origine a macchine $\overline{M}$ e $\overline{M}'$ tali che $\overline{M} \supset \overline{M}!$ Nel seguito indicheremo col simbolo $\overline{M}(M_1, M_2)$, la macchina chiusa autonoma ottenuta dalla richiusura di $M(M_1, M_2)$.

3.1. Equivalenza fra due macchine autonome $\overline{M}(M'_1, M_2)$ e $\overline{M}'(M_1, M'_2)$ tali che $M'_1 \gtrsim M_1$ e $M'_2 \gtrsim M_2$.

Dalla Fig. 12 per quanto detto a proposito dei collegamenti seriali di macchine, date le macchine autonome $\overline{M}(M'_1, M_2)$ e $\overline{M}'(M_1, M'_2)$ con $M'_1 \gtrsim M_1$ e $M'_2 \gtrsim M_2$, vale la relazione $\overline{M} \supset \overline{M}'|_{22'}$ (nel seguito useremo tale simbologia per indicare le uscite rispetto alle quali è valida la relazione alla sinistra della barra) se le macchine $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ sono poste rispettivamente in stati iniziali $S'_i(T_j)_{+1}$ e $S_iT'_j$ con $S'_i \gtrsim S_i$ e $(T_j)_{+1}$ simile ritardato dello stato successore dello stato totale $(T'_j, 0_i)$ ove 0_i è l'uscita associata ad S_i. In tal caso le uscite al punto 1 sono ritardate rispetto alle uscite al punto 1'. Vale anche la relazione $\overline{M}' \supset \overline{M}|_{11'}$ se le macchine $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ sono poste rispettivamente in stati iniziali S'_iT_j e $(S_i)_{+1}\ T'_j$ con $T'_j \gtrsim T_j$ e $(S_i)_{+1}$ simile ritardato dello stato successore dello stato totale (S'_i, Z_i) di M'_1 ove Z_i è l'uscita associata allo stato T_j di M_2.
Sempre per quanto detto a proposito dei collegamenti seriali di macchine il fatto che valga la relazione $\overline{M} \supset \overline{M}'|_{22'}$ $(\overline{M}' \supset \overline{M}|_{11'})$ e non valga: $\overline{M} \equiv \overline{M}'|_{22'}$ $(\overline{M}' \equiv \overline{M}|_{11'})$ è dovuto alla presenza di stati non accessibili nella macchina $M(M')$.

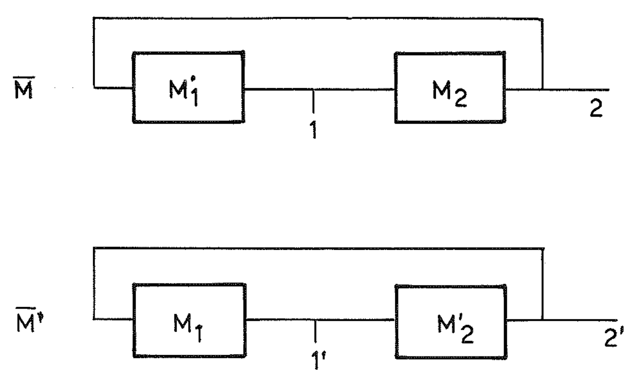


Fig. 12

3.2. Equivalenza fra due macchine autonome $\overline{M}(M_1, M_2)$ e $\overline{M}'(M_1, M'_2)$ tali che $M'_2 \gtrsim M_2$.

Facendo riferimento alle Fig. 13 si considerino le macchine autonome $\overline{M}(M_1, M_2)$ e $\overline{M}'(M_1, M'_2)$ con $M'_2 \gtrsim M_2$.

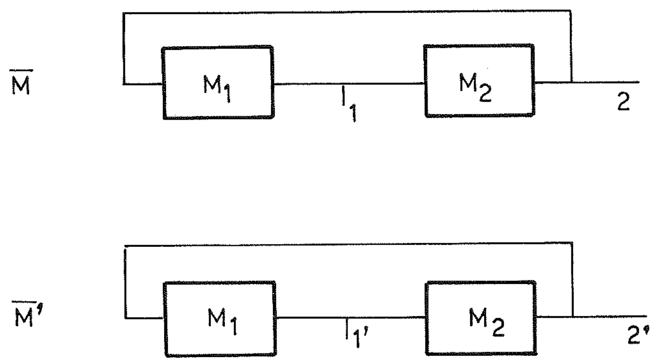


Fig. 13

In generale non sono valide le relazioni:

$$
(1)\qquad \begin{array}{l} \overline{M} \supset \overline{M}'|_{1,1'}, \quad \overline{M} \supset \overline{M}'|_{2,2'} \\ \overline{M}' \supset \overline{M}|_{1,1'}, \quad \overline{M}' \supset \overline{M}|_{2,2'} \end{array}
$$

Ad es. consideriamo le macchine $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ le cui tabelle sono mostrate in Fig. 14.

	X_1	X_2	
S_1	S_1	S_2	0_1
S_2	S_2	S_1	0_2

M_1

	0_1	0_2	
T_1	T_2	T_1	X_1
T_2	T_1	T_2	X_2

M_2

		1	2
S_1T_1	S_1T_2	0_1	X_1
S_1T_2	S_2T_1	0_1	X_2
S_2T_1	S_1T_1	0_2	X_1
S_2T_2	S_1T_2	0_2	X_2

$\overline{M}$

	X_1	X_2	
S_1	S_1	S_2	0_1
S_2	S_2	S_1	0_2

M_1

	0_1	0_2
T'_1	$T'^{X_2}_2$	$T'^{X_1}_1$
T'_2	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_2}_2$

M'_2

		1'	2'
$S_1T'_1$	$S_2T'_2$	0_1	X_2
$S_1T'_2$	$S_1T'_1$	0_1	X_1
$S_2T'_1$	$S_2T'_1$	0_2	X_1
$S_2T'_2$	$S_1T'_2$	0_2	X_2

$\overline{M}'$

Fig. 14

Relativamente alle uscite 1 ed 1′ si ha che $S_2 T_2$ non è equivalente a nessuno stato di $\overline{M}'$ e che $S_2 T'_1$ non è equivalente a nessuno stato di $\overline{M}$.

Rispetto alle uscite 2 e 2′ non esiste equivalenza fra nessuno stato delle due macchine.

L'esempio mostra che è necessario imporre dei vincoli particolari sulle tabelle delle macchine M_1, M_2 ed M'_2 perchè siano valide le relazioni (1). Diamo ora un teorema che sarà utile nel seguito per ricavare i vincoli da imporre sulle tabelle delle macchine M_1, M_2 ed M'_2 perchè valgono le relazioni (1).

Dalla definizione di contenimento fra due macchine M ed M′ deriva il seguente teorema che non dimostreremo.

TEOREMA 3.2.1:

Condizione necessaria e sufficiente perchè date due macchine chiuse autonome $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ valga la relazione:

$$\overline{M} \supset \overline{M}'$$

è che esiste una corrispondenza C tra gli stati P_i di $\overline{M}$ e P'_j di $\overline{M}'$ che soddisfi le tre condizioni seguenti:

1) tutti gli stati P'_j di $\overline{M}'$ sono mappati da C in qualche stato P_i di $\overline{M}$;
2) le coppie di stato P'_j e P_i mappati da C hanno associate uguali uscite;
3) C è chiusa: per ogni coppia di stati P'_j e P_i mappati da C, la coppia di stati successori $(P'_j)_{+1}$ di M′ e $(P_i)_{+1}$ di $\overline{M}$ sono mappati da C.

Ogni elemento della corrispondenza C sarà indicato con $P'_j \rightarrow P_i$.

E' possibile affermare alla luce del teorema precedente, che date due macchine autonome $\overline{M}(M_1, M_2)$ e $\overline{M}'(M_1, M'_2)$ con $M'_2 \not\supset M_2$, è sempre possibile ricavare un certo numero di corrispondenze C_i che soddisfano ai punti 1) e 2) del teorema ma in generale tali C_i non soddisfano il punto 3).

Si esamineranno nel seguito i problemi riguardanti l'equivalenza delle macchine autonome $\overline{M}(M_1, M_2)$ e $\overline{M}'(M_1, M'_2)$ con $M'_2 \not\supset M_2$, data una corrispondenza C′ che soddisfi alle condizioni 1) e 2) del teorema 3.2.1.

3.2.1 - Ricerca delle macchine M_1 tali che $\overline{M}(M_1, M_2) \supset \overline{M}'(M_1, M'_2)$ e C′ sia chiusa.

Si considerino le macchine autonome $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ di Fig. 15 e sia data una corrispondenza C′ che soddisfi alle condizioni 1) e 2) del teorema 3.2.1 relativamente alle uscite 1 e 1′.

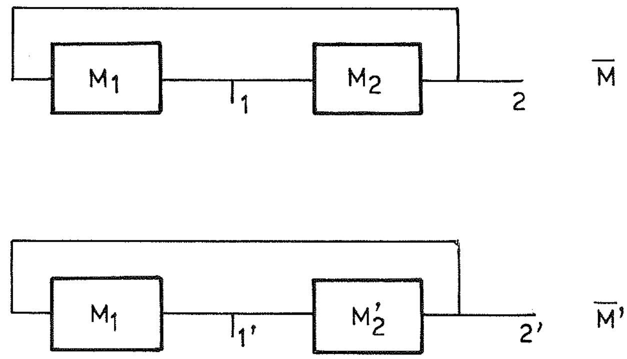


Fig. 15

Per semplicità si consideri che M_1 sia una macchina di Moore di cui sia noto il numero degli stati e le uscite ad essi associate ed M'_2 sia tale che ogniqualvolta lo stato T'_k compare all'interno della tabella ad esso sia associata la stessa uscita. (Questa ultima ipotesi non è restrittiva in quanto è sempre possibile con una trasformazione di equivalenza su M'_2 fare in modo che la macchina M'_2 abbia questa caratteristica).

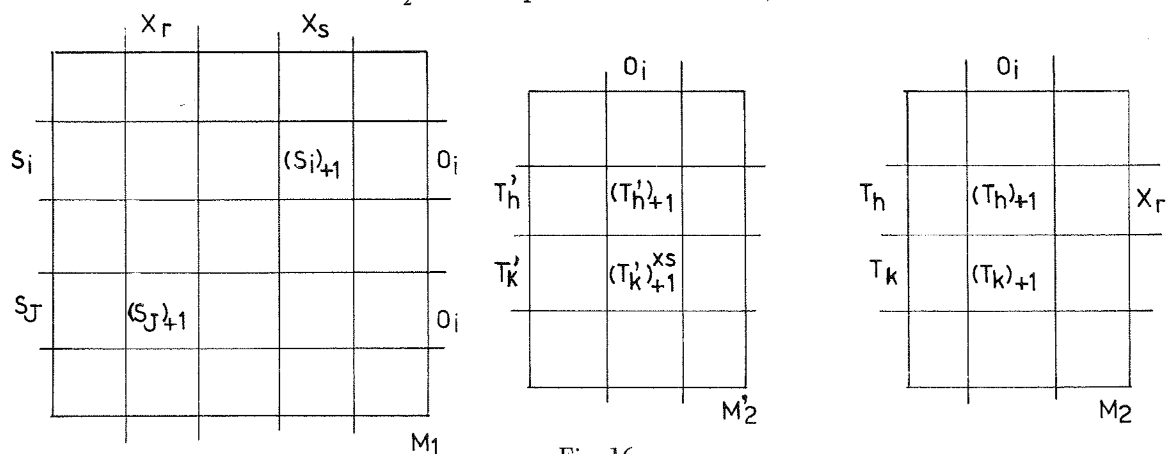


Fig. 16

Riferendoci alla Fig. 16. Sia $S_iT'_k \rightarrow S_jT_h$ un elemento della corrispondenza C'. La macchina M'_2 ed M_2, avendo posto $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ negli stati S_jT_h e $S_iT'_k$, hanno come successori degli stati $(T'_k)_{+1}$ e $(T_h)_{+1}$, e uscite X_s ed X_r rispettivamente. Siano $(S_j)_{+1}$ e $(S_i)_{+1}$ gli stati successori in M_1 rispettivamente degli stati totali (S_j, X_r) e (S_i, X_s). Allora le macchine $\overline{M}'$ ed $\overline{M}$ poste negli stati $S_iT'_k$ e S_jT_h transiranno rispettivamente sugli stati $(S_i)_{+1}$ $(T'_k)_{+1}$ e $(S_j)_{+1}$ $(T_h)_{+1}$.

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 3.2.1.1:

Siano date le tabelle delle due macchine M_2 ed M'_2 con $M'_2 \supsetneqq M_2$, sia M_1 una macchina di Moore di cui si conosce il numero degli stati e le uscite associate, e sia data una corrispondenza C' fra gli stati di $\overline{M}'$ ed $\overline{M}$ che soddisfi le condizioni 1) e 2) del teorema 3.2.1 relativamente alle uscite 1 e 1'; condizione necessaria e sufficiente perchè C' sia chiuso e quindi $\overline{M} \supset \overline{M}'_{|11'}$ è che per ogni elemento $S_i T'_k \to S_j T_h$ di C', gli stati successori $(S_i)_{+1}$ e $(S_j)_{+1}$ di M_1 siano tali che $(S_i)_{+1}\ (T'_k)_{+1} \to (S_j)_{+1}\ (T_h)_{+1}$ sia elemento di C'.

La dimostrazione del teorema è banale e pertanto non sarà data.

Tale teorema permette di ricavare delle relazioni che vincolano il contenuto delle caselle della macchina M_1.

Si osservi che le relazioni trovate possono essere incompatibili, nel senso che, data la corrispondenza C' non sempre è possibile ricavare la macchina M_1 per la quale C' sia chiusa.

Tutte e sole le macchine M_1 che soddisfano alle condizioni del teorema 3.2.1.1, sono tali da verificare le relazioni:

a) $\overline{M} \supset \overline{M}'_{|11'}$

b) C' è chiusa

Facciamo un esempio per illustrare quanto detto.

Esempio 5:

Siano date in Fig. 17 le tabelle delle macchine M'_2 ed M_2 e la corrispondenza C' che verifica le condizioni 1) e 2) del teorema 3.2.1 relativamente alle uscite 1 e 1'; e sia M_1 una macchine di Moore della cui tabella si conosce il numero di stati e le uscite ad essi associate.

	X_1	X_2	
S_1			0_1
S_2			0_2
S_3			0_1

M_1

	0_1	0_2
T'_1	$T'^{X_2}_2$	$T'^{X_1}_1$
T'_2	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_2}_2$

M'_2

$$C' \begin{cases} S_1 T'_1 \to S_1 T_1 \\ S_1 T'_2 \to S_3 T_2 \\ S_2 T'_1 \to S_2 T_1 \\ S_2 T'_2 \to S_2 T_2 \\ S_3 T'_1 \to S_3 T_1 \\ S_3 T'_2 \to S_1 T_2 \end{cases}$$

	0_1	0_2	
T_1	T_2	T_1	X_1
T_1	T_1	T_2	X_2

M_2

Fig. 17

Per ciascun elemento di C' ricaviamo le condizioni da imporre sulla macchina M_1 perchè C' sia chiusa.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & M'_2 T'_1 \to T'_2 \,|\, X_2 \arrow[dr] & & \\
S_1 T'_1 \to S_1 T_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1 & \left.\begin{matrix}(S_1 , X_2)\\[3ex](S_1 , X_1)\end{matrix}\right\} \begin{array}{l}\to (S_1 X_2) = S_1 \text{ e } (S_1 , X_1) = S_3\\ \to (S_1 , X_2) = S_2 \text{ e } (S_1 , X_1) = S_2\\ \to (S_1 , X_2) = S_3 \text{ e } (S_1 , X_1) = S_1\end{array}\\
 & M_2 T_1 \to T_2 \,|\, X_1 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Si è considerato un elemento di C' e si sono ricavate le uscite X_2 e X_1 ai punti 2' e 2 associate agli stati $S_1 T'_1$ e $S_1 T_1$. Si sono anche ricavati gli stati successori T'_2 e T_2 su cui transiscono le macchine M'_2 ed M_2. Si sono pertanto ricavate le caselle della macchina M_1, (S_1 , X_2) e (S_1 , X_1), il cui contenuto in accordo al teorema 3.2.1 deve essere tale da costituire insieme agli stati T'_2 e T_2, un elemento di C'. Tali contenuti sono indicati a destra.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & M'_2 T'_2 \to T'_1 \,|\, X_1 \arrow[dr] & & \\
S_1 T'_2 \to S_3 T_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1 & \left.\begin{matrix}(S_1 , X_1)\\[3ex](S_3 X_2)\end{matrix}\right\} \begin{array}{l}\to (S_1 X_1) = S_1 \text{ e } (S_3 X_2) = S_1\\ \to (S_1 X_1) = S_2 \text{ e } (S_3 X_2) = S_2\\ \to (S_1 X_1) = S_3 \text{ e } (S_3 X_2) = S_3\end{array}\\
 & M_2 T_2 \to T_1 \,|\, X_2 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & M'_2 T_1 \to T'_1 \,|\, X_1 \arrow[dr] & & \\
S_2 T'_1 \to S_2 T_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1 & (S_2 , X_1) \begin{array}{l}\to (S_2 X_1) = S_1\\ \to (S_2 X_1) = S_2\\ \to (S_2 X_1) = S_3\end{array}\\
 & M_2 T_1 \to T_1 \,|\, X_1 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & M'_2 T'_2 \to T'_2 \,|\, X_2 \arrow[dr] & & \\
S_2 T'_2 \to S_2 T_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1 & (S_2 X_2) \begin{array}{l}\to (S_2 X_2) = S_1 \text{ e } (S_2 X_2) = S_3\\ \to (S_2 X_2) = S_2\\ \to (S_2 X_2) = S_3 \text{ e } (S_2 X_2) = S_1\end{array}\\
 & M_2 T_2 \to T_2 \,|\, X_2 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & M'_2 T'_1 \to T'_2 \,|\, X_2 \arrow[dr] & & \\
S_3 T'_1 \to S_3 T_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1 & \left.\begin{matrix}(S_3 X_2)\\[3ex](S_3 X_1)\end{matrix}\right\} \begin{array}{l}\to (S_3 X_2) = S_1 \text{ e } (S_3 X_1) = S_3\\ \to (S_3 X_2) = S_2 \text{ e } (S_3 X_1) = S_2\\ \to (S_3 X_2) = S_3 \text{ e } (S_3 X_2) = S_1\end{array}\\
 & M_2 T_1 \to T_2 \,|\, X_1 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & M'_2\ T'_2 \to T'_2\,|X_1 \arrow[dr] & \\ S_3 T'_2 \to S_1 T_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1 \\ & M_2\ T_2 \to T_1\,|X_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \left.\begin{matrix}(S_3 X_1)\\ \\ (S_1 X_2)\end{matrix}\right\} \begin{array}{l} \to (S_3 X_1) = S_1 \ \text{e} \ (S_1 X_2) = S_1 \\ \to (S_3 X_1) = S_2 \ \text{e} \ (S_1 X_2) = S_2 \\ \to (S_3 X_1) = S_3 \ \text{e} \ (S_1 X_2) = S_3 \end{array}$$

In Fig. 18 è riportata la tabella di M_1 : gli archi indicano le caselle fra le quali esistono vincoli sul riempimento. All'interno delle caselle i contenuti sono nell'ordine con cui vengono soddisfatti tali vincoli.
Tutte le macchine M_1 tali che $\overline{M} \supset \overline{M}'$ rispetto alle uscite 1 e 1' e tali che C' è chiusa sono riportate anche esse in Fig. 18.

	X_1	X_2	
S_1	S_3 S_2 S_1	S_1 S_2 S_3	0_1
S_2	S_1 S_2 S_3	S_2	0_2
S_3	S_1 S_2 S_3	S_3 S_2 S_1	0_1

	X_1	X_2	
S_1	S_3	S_1	0_1
S_2	–	S_2	0_2
S_3	S_1	S_3	0_1

	X_1	X_2	
S_1	S_2	S_2	0_1
S_2	–	S_2	0_2
S_3	S_2	S_2	0_1

	X_1	X_2	
S_1	S_1	S_3	0_1
S_2	–	S_2	0_2
S_3	S_3	S_1	0_1

Fig. 18

Con una procedura perfettamente analoga a quella data nell'esempio si possono ottenere le relazioni che vincolano il contenuto delle caselle della macchina M_1 nel caso in cui si voglia che valgano le relazioni:

$$\overline{M} \supset \overline{M}'_{|2,2'} \qquad \text{o} \qquad \overline{M} \supset \overline{M}'_{|1,1' \atop 2,2'}$$

A tale scopo è sufficiente considerare delle corrispondenze C' che verifichino le ipotesi 1) e 2) del teorema 3.2.1 relativamente alle uscite 2 e 2' ovvero 1 e 1' e 2 e 2'.

Si sono visti in questo paragrafo i vincoli da imporre sulle macchine M_1 per ottenere che $\overline{M} \supset \overline{M}'$.
Nel successivo paragrafo saranno esaminati i vincoli da imporre sulle macchine M_2 ed M_2' perchè valga la stessa relazione $\overline{M} \supset \overline{M}'$.

3.2.2 - Ricerca di tutte le macchine M_2 ed M_2' tali che $\overline{M}(M_1, M_2) \supset \overline{M}'(M_1, M_2')$ e C' sia chiusa.

Si considerino le macchine autonome $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ di Fig. 19 e sia data una corrispondenza C' che soddisfi alle condizioni 1) e 2) del teorema 3.2.1 relativamente alle uscite 1 e 1'.

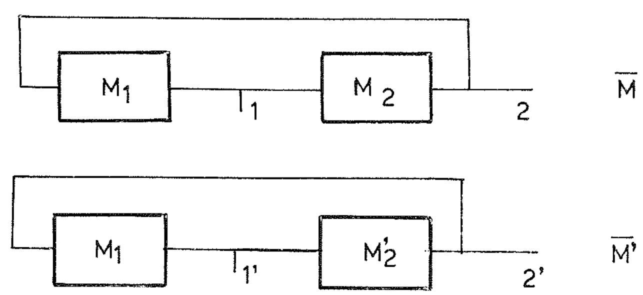


Fig. 19

Per semplicità consideriamo che la macchina M_1 di cui è data la tabella sia di Moore, e di conoscere il numero degli stati e le uscite associate alla macchina M_2. Notiamo che poichè $M_2' \cong M_2$, M_2 è una macchina di Moore.
Riferendoci alla Fig. 20, sia $S_i T_k' \to S_j T_h$ un elemento della corrispondenza C'. Le macchine M_2' ed M_2, avendo posto $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ negli stati $S_j T_h$ e $S_i T_k'$, hanno come successori gli stati $(T_k')_{+1}$ e $(T_h)_{+1}$, e uscite X_s ed X_r rispettivamente. Siano $(S_j)_{+1}$ e $(S_i)_{+1}$ gli stati successori in M_1 rispettivamente degli stati totali (S_j, X_r) e (S_i, X_s). Allora le macchine $\overline{M}'$ ed $\overline{M}$ poste negli stati $S_i T_k'$ e $S_j T_h$ transiranno rispettivamente sugli stati $(S_i)_{+1}$ $(T_k')_{+1}$ e $(S_j)_{+1}$ $(T_h)_{+1}$.

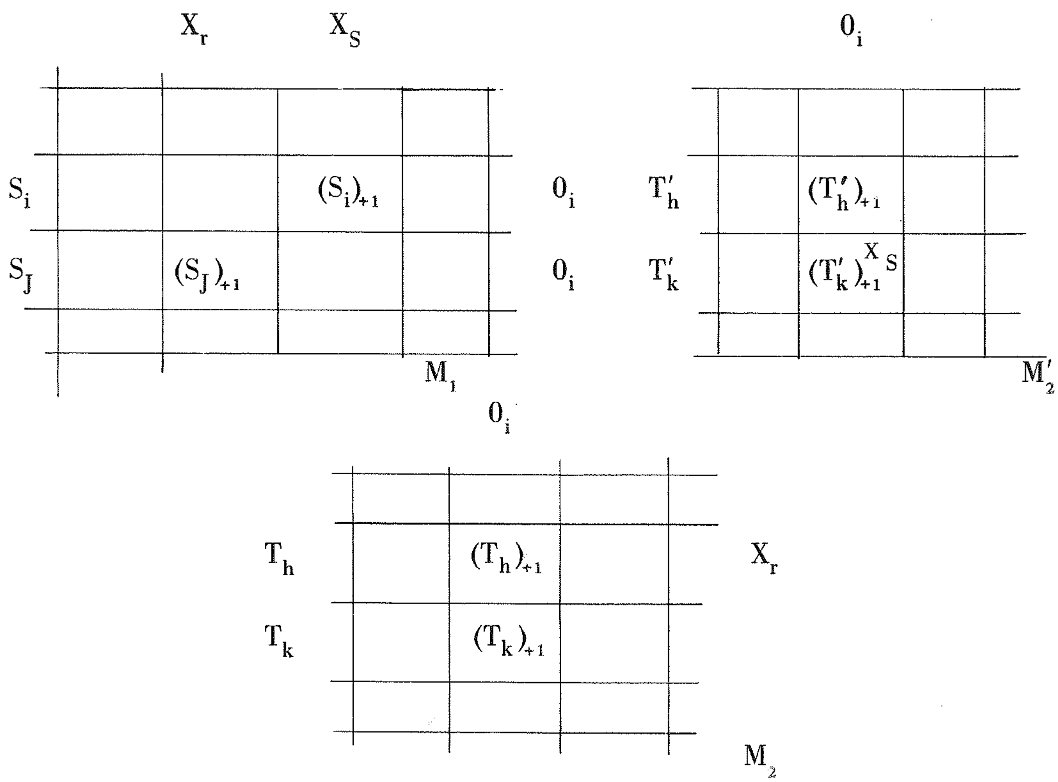


Fig. 20

Vale il seguente Teorema.

TEOREMA 3.2.2.1:

Sia data la tabella della macchina M_1, e siano M_2 ed M'_2 due macchine tali che $M'_2 \gtrsim M_2$. Si conosca inoltre il numero degli stati e le uscite associate ad essi per la macchina M_2, e sia data una corrispondenza C' fra gli stati di $\overline{M}'$ ed $\overline{M}$ che soddisfi le condizioni 1) e 2) relativamente alle uscite 1 e 1′ dal teorema 3.2.1.
Condizione necessaria e sufficiente perchè C' sia chiusa e quindi $\overline{M} \supset \overline{M}'_{|1,1'}$ è che per ogni elemento $S_iT'_k \to S_jT_h$ di C; gli stati successori $(T'_k)_{+1}$ di M'_2 e $(T_h)_{+1}$ di M_2 siano tali che $(S_i)_{+1}\ (T'_k)_{+1} \to (S_j)_{+1}\ (T_h)_{+1}$ sia elemento di C'.

La dimostrazione del teorema è banale e pertanto non sarà data.
Tale teorema permette di ricavare delle relazioni che vincolano il contenuto delle caselle delle tabelle di stato delle macchine M_2 e M'_2.
Si osservi che le relazioni trovate possono essere incompatibili nel senso che data la corrispondenza C' non è sempre possibile ricavare le macchine M_2 e M'_2 per le quali C'

sia chiusa.

Tutte e sole le macchine che soddisfano alle condizioni del teorema 3.2.2.1 sono tali da verificare le relazioni:

a) $\overline{M} \supset \overline{M}'|_{1,1'}$

b) C' è chiusa.

Facciamo un esempio per illustrare quanto detto.

Esempio 6:

Siano date in Fig. 21 la tabella della macchina M_1 e la corrispondenza C' che verifica le condizioni 1) e 2) del teorema 3.2.1 relativamente alle uscite 1 e 1'. Della macchina M_2 si conosce il numero degli stati e le uscite ad essi associate.

	X_1	X_2	
S_1	S_3	S_1	0_1
S_2	S_3	S_2	0_2
S_3	S_1	S_3	0_1

M_1

	0_1	0_2	
T_1			X_1
T_2			X_2

M_2

	0_1	0_2
T'_1		
T'_2		

M'_2

$$C' \begin{cases} S_1T'_1 \longrightarrow S_1T_1 \\ S_1T'_2 \longrightarrow S_3T_2 \\ S_2T'_1 \longrightarrow S_2T_1 \\ S_2T'_2 \longrightarrow S_2T_2 \\ S_3T'_1 \longrightarrow S_3T_1 \\ S_3T'_2 \dashrightarrow S_1T_2 \end{cases}$$

Fig. 21

Per ciascun elemento di C' ricaviamo le condizioni da imporre sulle macchine M_2 e M'_2 perchè C' sia chiusa.

$$S_1T'_1 \to S_1T_1 \} \to M_1 \quad S_1 \to S_3 \mid 0_1 \to (T_1, 0_1) \begin{array}{l} \nearrow (T_1, 0_1) = T_1 \to (T'_1, 0_1) = T'_1 \\ \searrow (T_1, 0_1) = T_2 \to (T'_1, 0_1) = T'_1 \end{array}$$

$$S_1T'_2 \to S_3T_2 \;\}\!\to M_1 \quad S_3 \to S_3 \mid 0_1 \to (T_2,0_1) \begin{array}{l} \nearrow (T_2,0_1)=T_1 \to (T'_2,0_1)=T'_1 \\ \searrow (T_2,0_1)=T_2 \to (T'_2,0_1)=T'_2 \end{array}$$

$$S_2T'_1 \to S_2T_1 \;\}\!\to M_1 \quad S_2 \to S_3 \mid 0_2 \to (T_1,0_2) \begin{array}{l} \nearrow (T_1,0_2)=T_1 \to (T'_1,0_2)=T'_2 \\ \searrow (T_1,0_2)=T_2 \to (T'_1,0_2)=T'_2 \end{array}$$

$$S_2T'_2 \to S_2T_2 \;\}\!\to M_1 \quad S_2 \to S_2 \mid 0_2 \to (T_2,0_2) \begin{array}{l} \nearrow (T_2,0_2)=T_1 \to (T'_2,0_2)=T'_1 \\ \searrow (T_2,0_2)=T_2 \to (T'_2,0_2)=T'_2 \end{array}$$

$$S_3T'_2 \to S_3T_1 \;\}\!\to M_1 \quad S_3 \to S_1 \mid 0_1 \to (T_1,0_1) \begin{array}{l} \nearrow (T_1,0_1)=T_1 \to (T'_1,0_1)=T'_1 \\ \searrow (T_1,0_1)=T_2 \to (T'_1,0_1)=T'_2 \end{array}$$

$$S_3T'_2 \to S_1T_2 \;\}\!\to M_1 \quad S_1 \to S_1 \mid 0_1 \to (T_2,0_1) \begin{array}{l} \nearrow (T_2,0_1)=T_2 \to (T'_2,0_1)=T'_1 \\ \searrow (T_2,0_1)=T_2 \to (T'_2,0_1)=T'_2 \end{array}$$

Si è considerato un elemento di C' e si è ricavata l'uscita 0_1 al punto 1 di $\overline{M}$. Si è anche ricavato lo stato successivo S_3 in cui transisce M_1 di $\overline{M}$. Se la casella $(T_1, 0_1)$ di M_2 contiene T_1, la casella $(T'_1, 0_1)$ di M'_2 deve contenere T'_1 e gli stati successori di $S_1T'_1$ e S_1T_1 sono rispettivamente $S_3T'_1$ e S_3T_1. L'elemento $S_3T'_1 \to S_3T_1$ appartiene a C' e pertanto le caselle $(T_1, 0_1)$ e $(T'_1, 0_1)$ possono contenere rispettivamente T_1 e T'_1.

In Fig. 22 sono riportate le tabelle di M_2 e M'_2.

	0_1	0_2	
T_1	–	T_1	X_1
T_2	–	T_2	X_2

M_2

	0_1	0_2
T'_1	–	$T_1'^{X_1}$
T'_2	–	$T_2'^{X_2}$

M'_2

Fig. 22

Con una procedura analoga a quella data nell'esempio si possono ottenere le relazioni che vincolano il contenuto delle caselle delle macchine M_2 e M_2' nel caso si voglia che valgano le relazioni:

$$\overline{M} \supset \overline{M}'|_{2,2'} \qquad \text{o} \qquad \overline{M} \supset \overline{M}'|_{\substack{1,2',\\ 2,2'}}$$

A tale scopo è sufficiente considerare delle corrispondenze C' che verifichino le ipotesi 1) e 2) del teorema 3.2.1 relativamente alle uscite 2, 2' ovvero 1 e 1' e 2, 2'.

3.2.3 - Condizioni sufficienti perchè $\overline{M}(M_1, M_2) \supset \overline{M}'(M_1, M_2')$.

Nei paragrafi precedenti è stato mostrato che affinchè $\overline{M} \supset \overline{M}'$ deve esistere una corrispondenza C che verifichi le condizioni del Teorema 3.2.1. In particolare le caratteristiche delle macchine che chiudono la corrispondenza C sono strettamente influenzate da C stessa.

In questo paragrafo daremo delle condizioni che devono essere soddisfatte dalle macchine M_1 ed M_2 perchè $\overline{M} \supset \overline{M}'$ rispetto ad alcune particolare corrispondenze.

TEOREMA 3.2.3.1:

Condizione necessaria e sufficiente perchè, date due macchine chiuse autonome $\overline{M}(M_1, M_2)$ ed $\overline{M}'(M_1, M_2')$ con $\overline{M}(M_1, M_2')$ con $M_2' \gtrsim M_2$, valga la relazione: $\overline{M} \equiv \overline{M}'|_{11'}$, a partire da stati del tipo S_iT_j ed S_iT_j' con $T_j' \gtrsim T_j$ è che per ciascun stato S_iT_j di $\overline{M}$ l'uscita attuale a quella successiva di M_2 determinino la stessa uscita da M_1 e facciano transire M_1 o sullo stesso stato successore $(S_i)_{+1}$ o su stati diversi S_r e S_s, purchè $S_r(T_j)_{+1} \equiv S_s(T_j)_{+1}$ in $\overline{M}$ ove $(T_j)_{+1}$ è lo stato successore dello stato totale $(T_j, 0_i)$ di M_2, ove 0_i è l'uscita associata allo stato S_i.

Dimostrazione:

La sufficienza di tale condizione è banale. Ci limitiamo pertanto a dimostrare che tale condizione è necessaria. Cioè non è possibile che le due macchine $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ siano equivalenti a partire da due stati S_iT_j ed S_iT_j' senza che siano verificate le condizioni date. Difatti se a partire da S_iT_j di $\overline{M}$, l'uscita attuale e quella successiva di M_2, non determinano la stessa uscita da M_1, gli stati S_iT_j di $\overline{M}$ e S_iT_j' di $\overline{M}'$ non danno la stessa sequenza delle uscite in 1 ed in 1' e pertanto non possono essere equivalenti.

Se la macchina M_1 sotto l'uscita attuale e successiva di M_2 va su stati S_r ed S_s

differenti è necessario che $S_r(T_j)_{+1}$ e $S_s(T_j)_{+1}$ siano equivalenti. Difatti dal momento che S_iT_j di $\overline{M}$ ed $S_iT'_j$ di $\overline{M}'$ sono equivalenti, sono pure equivalenti $S_r(T_j)_{+1}$ di $\overline{M}$ e $S_s(T'_J)_{+1}$ di $\overline{M}'$. Dal momento però che allo stato $S_s(T'_J)_{+1}$ di $\overline{M}'$ corrisponde l'equivalente $S_s(T_j)_{+1}$ in M ne deriva che $S_r(T_j)_{+1} \equiv S_s(T_j)_{+1}$.

Esempio 7:

Consideriamo le macchine di Fig. 23.

	X_1	X_2	X_3	X_4	
S_1	S_2	S_3	S_2	S_3	0_1
S_2	S_4	S_4	S_3	S_3	0_2
S_3	S_4	S_1	S_4	S_1	0_3
S_4	S_1	S_1	S_1	S_1	0_4

M_1

	0_1	0_2	0_3	0_4
T'_1	$T'^{X_3}_3$	$T'^{X_2}_2$	$T'^{X_3}_3$	$T'^{X_2}_2$
T'_2	$T'^{X_4}_4$	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_4}_4$	$T'^{X_3}_3$
T'_3	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_4}_4$	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_4}_4$
T'_4	$T'^{X_2}_2$	$T'^{X_3}_3$	$T'^{X_2}_2$	$T'^{X_1}_1$

M'_2

	0_1	0_2	0_3	0_4	
T_1	T_3	T_2	T_3	T_2	X_1
T_2	T_4	T_1	T_4	T_3	X_2
T_3	T_1	T_4	T_1	T_4	X_3
T_4	T_2	T_3	T_2	T_1	X_4

M_2

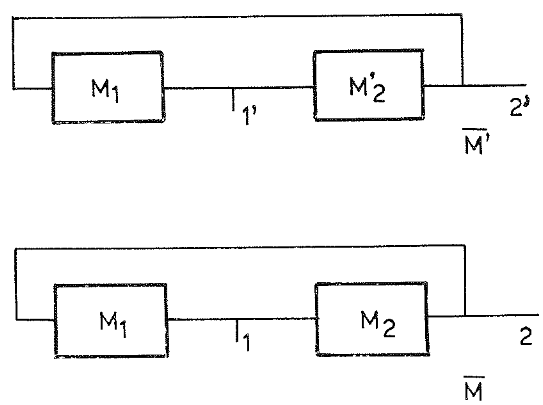


Fig. 23

In base alla corrispondenza che ci permette di determinare per ogni stato S_iT_j di $\overline{M}$, uno stato $S_iT'_j$ di $\overline{M}'$ tali che $S_iT_j \equiv S_iT'_j$ con $T'_j \rightleftarrows T_j$, determiniamo gli stati equivalenti:

$S_1T_1 \equiv S_1T'_1$	$S_2T_1 \equiv S_2T'_1$	$S_3T_1 \equiv S_3T'_1$	$S_4T_1 \equiv S_4T'_1$
$S_1T_2 \equiv S_1T'_2$	$S_2T_2 \equiv S_2T'_2$	$S_3T_2 \equiv S_3T'_2$	$S_4T_2 \equiv S_4T'_2$
$S_1T_3 \equiv S_1T'_3$	$S_2T_3 \equiv S_2T'_3$	$S_3T_3 \equiv S_3T'_3$	$S_4T_3 \equiv S_4T'_3$
$S_1T_4 \equiv S_1T'_4$	$S_2T_4 \equiv S_2T'_4$	$S_3T_4 \equiv S_3T'_4$	$S_4T_4 \equiv S_4T'_4$

A partire da questi stati le macchine $\overline{M}'$ ed $\overline{M}$ sono equivalenti relativamente alle uscite $1'$ ed 1.

Per concludere l'esempio verifichiamo sulla tabella della macchina M_1 della macchina M la condizione data nel teorema 3.2.3.1:
consideriamo lo stato S_1T_1, l'uscita X attuale di $\overline{M}$ è X_1, la successiva è X_3.
Si vede immediatamente che la macchina M_1 sotto X_1 ed X_3 transisce sullo stesso stato successivo S_2 con la stessa uscita 0_2.
Questo vale per tutti gli stati S_iT_j di $\overline{M}$.

TEOREMA 3.2.3.2:

Condizione necessaria e sufficiente perchè, date due macchine chiuse autonome $\overline{M}(M_1, M_2)$ ed $\overline{M}'(M_1, M'_2)$ con $M'_2 \stackrel{\sim}{\rightarrow} M_2$, la corrispondenza C' del tipo $S_iT'_j \rightarrow S_i(T_j)_{+1}$ sia chiusa e valga la relazione $\overline{M} \supset \overline{M}'|^{11'}_{22'}$, ove $(T_j)_{+1}$ è lo stato simile al successore dello stato totale $(T'_j, 0_i)$ essendo 0_i l'uscita associata ad S_i, è che: per ciascun stato $S_iT'_j$ di $\overline{M}'$, gli stati successori degli stati totali $((T'_j)_{+1}, 0_i)$ e $((T'_j)_{+1}, 0_{i+1})$ abbiano associata la stessa uscita e siano uguali o equivalenti, ove $(T'_j)_{+1}$ è lo stato successore di $(T'_j, 0_i)$ ed 0_{i+1} è l'uscita associata allo stato $(S_i)_{+1}$.

Dimostrazione:

La sufficienza di tale condizione è banale. Ci limitiamo a dimostrare che tale condizione è necessaria. Consideriamo la Fig. 24.

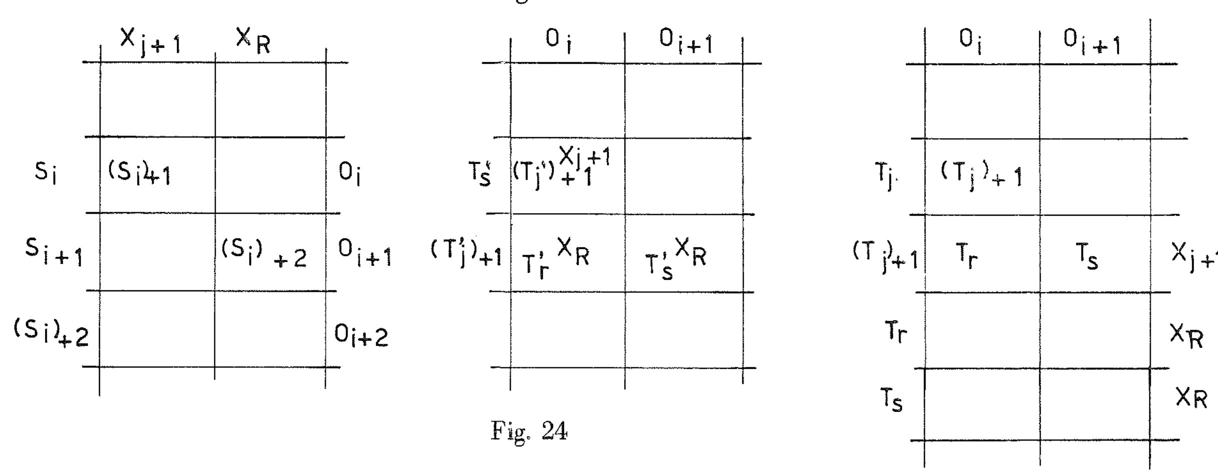


Fig. 24

Supponiamo che $S_iT'_j \equiv S_i(T_j)_{+1}$ che C' sia chiusa e che $\overline{M} \supset \overline{M}'|^{11'}_{22'}$.
Inoltre gli stati successori degli stati totali $((T'_j)_{+1}, 0_i)$ e $((T'_j)_{+1}\ 0_{i+1})$ siano diversi. Chiameremo tali stati T'_r e T'_s.

A partire da $S_iT'_j$ la macchina $\overline{M}'$ transirà nello stato $(S_i)_{+1}\ (T'_j)_{+1}$ e la macchina $\overline{M}$ a partire da $S_i(T_j)_{+1}$ transirà nello stato $(S_i)_{+1}\ T_r$. Dal momento che si è ipotizzato che C' sia chiusa si deduce che T_r è simile al successore dello stato totale $((T'_j)_{+1}, 0_{i+1})$. Ma anche T_s è simile al successore di $((T'_j)_{+1}, 0_{i+1})$. Pertanto T_r e T_s sono simili posticipati dello stesso stato T'_s. Da ciò si deduce che $T'_r \equiv T'_s$ da cui l'asserto che gli stati successori degli stati totali $((T'_j)_{+1}, 0_i)$ e $((T'_j)_{+1}, 0_{i+1})$ sono uguali o equivalenti.
Poichè abbiamo supposto che $\overline{M} \supset \overline{M}'|^{11'}_{22'}$ è necessario che le uscite associate a tali stati siano uguali.

Da questo teorema discende il seguente corollario:

COROLLARIO:

Condizione sufficiente perchè, date due macchine chiuse autonome $\overline{M}(M_1, M_2)$ e $\overline{M}'(M_1, M'_2)$ con $M'_2 \not\simeq M_2$, valga la relazione $\overline{M} \supset \overline{M}'|^{11'}_{22'}$ a partire da stati del tipo $S_i(T_j)_{+1}$ e $S_iT'_j$ con $(T_j)_{+1}$ simile al successore dello stato totale $(T'_j, 0_i)$ essendo 0_i l'uscita associata ad S_i è che: per ciascun stato $S_iT'_j$ di $\overline{M}'$, gli stati successori T'_r e T'_s degli stati totali $((T'_j)_{+1}, 0_i)$ e $((T'_j)_{+1}, 0_{i+1})$ abbiano associata la stessa uscita e siano uguali o equivalenti o se diversi valga la relazione: $(S_i)_{+2}\ T'_r \equiv (S_i)_{+2}\ T'_s$, essendo $(T'_J)_{+1}$ lo stato successore di $(T'_j, 0_i)$, 0_{i+1} l'uscita associata allo stato $(S_i)_{+1}$.
Facciamo un esempio che chiarisce quanto affermato.

Esempio 8:

Consideriamo in Fig. 25 le seguenti macchine $\overline{M}(M_1, M_2)$ e $\overline{M}'(M_1, M'_2)$

	X_1	X_2	X_3	X_4	
S_1	S_3	S_2	S_3	S_2	0_1
S_2	S_4	S_1	S_4	S_3	0_2
S_3	S_1	S_4	S_1	S_4	0_3
S_4	S_2	S_3	S_2	S_1	0_4

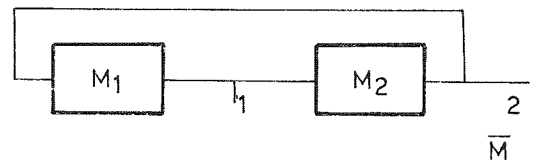
M_1

	0_1	0_2	0_3	0_4	
T_1	T_2	T_3	T_2	T_3	X_1
T_2	T_4	T_4	T_3	T_3	X_2
T_3	T_4	T_1	T_4	T_1	X_3
T_4	T_1	T_1	T_1	T_1	X_4

M_2

	0_1	0_2	0_3	0_4
T'_1	$T'^{X_2}_2$	$T'^{X_3}_3$	$T'^{X_2}_2$	$T'^{X_3}_3$
T'_2	$T'^{X_4}_4$	$T'^{X_4}_4$	$T'^{X_4}_3$	$T'^{X_3}_3$
T'_3	$T'^{X_4}_4$	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_4}_4$	$T'^{X_1}_1$
T'_4	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_1}_1$

M'_2



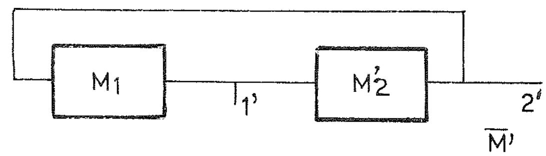


Fig. 25

E' facile verificare che le macchine $\overline{M}$ e $\overline{M}'$ soddisfano alle condizione del teorema 3.2.3.2. In particolare la corrispondenza fra gli stati equivalenti è la seguente:

$S_1T'_1 \equiv S_1T_2$	$S_2T'_1 \equiv S_2T_3$	$S_3T'_1 \equiv S_3T_2$	$S_4T'_1 \equiv S_4T_3$
$S_1T'_2 \equiv S_1T_4$	$S_2T'_2 \equiv S_2T_4$	$S_3T'_2 \equiv S_3T_3$	$S_4T'_2 \equiv S_4T_3$
$S_1T'_3 \equiv S_1T_4$	$S_2T'_3 \equiv S_2T_1$	$S_3T'_3 \equiv S_3T_4$	$S_4T'_3 \equiv S_4T_1$
$S_1T'_4 \equiv S_1T_1$	$S_2T'_4 \equiv S_2T_1$	$S_3T'_4 \equiv S_3T_1$	$S_4T'_4 \equiv S_4T_1$

Gli stati S_2T_2, S_4T_2, S_1T_3, S_4T_4 di $\overline{M}$ non sono mappati nella corrispondenza (essi sono stati non accessibili per la macchina $\overline{M}$).

Vale pertanto la relazione $\overline{M} \supset \overline{M}'|^{1\,1'}_{2\,2'}$.

Si osservi che i teoremi 3.2.3.1 e 3.2.3.2 danno delle condizioni sufficienti perchè in generale le macchine $\overline{M}(M_1, M_2)$ e $\overline{M}'(M_1, M'_1)$ verifichino rispettivamente le relazioni:

$\overline{M} \supset \overline{M}'|_{11'}$ e $\overline{M} \supset \overline{M}'|^{11'}_{22'}$.

Concludiamo con un esempio che mostra come possa essere valida la relazione $\overline{M} \supset \overline{M}'|_{11'}$ senza che sia soddisfatti i due teoremi precedenti:

Esempio 9:

Consideriamo le macchine M e M' di Fig. 26:

	X_1	X_2	X_3	
S_1	S_2	S_3	S_3	0_1
S_2	S_1	S_1	S_1	0_2
S_3	S_2	S_3	S_2	0_3

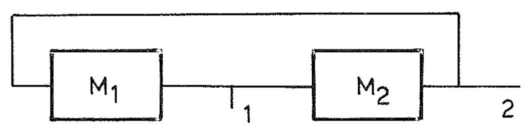
M_1

	0_1	0_2	0_3	
T_1	T_2	T_1	T_3	X_1
T_2	T_2	T_3	T_1	X_2
T_3	T_1	T_3	T_1	X_3

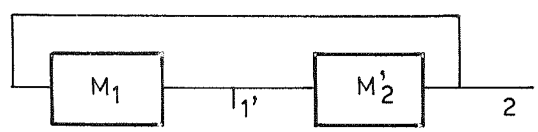
M_2

	0_1	0_2	0_3
T'_1	$T'^{X_2}_2$	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_3}_3$
T'_2	$T'^{X_2}_2$	$T'^{X_3}_3$	$T'^{X_1}_1$
T'_3	$T'^{X_1}_1$	$T'^{X_3}_3$	$T'^{X_1}_1$

M'_2



$\overline{M}$



$\overline{M}'$

Fig. 26

Consideriamo la seguente corrispondenza fra gli stati delle macchine $\overline{M}$ e $\overline{M}'$:

$$\begin{array}{lll}
S_1T'_1 \equiv S_1T_3 & S_2T'_1 \equiv S_2T_3 & S_3T'_1 \equiv S_3T_3 \\
S_1T'_2 \equiv S_1T_3 & S_2T'_2 \equiv S_2T_1 & S_3T'_2 \equiv S_3T_1 \\
S_1T'_3 \equiv S_1T_1 & S_2T'_3 \equiv S_2T_1 & S_3T'_3 \equiv S_3T_1 \\
 & S_2T'_1 \equiv S_2T_2 &
\end{array}$$

E' facile mostrare che questa corrispondenza è chiusa e che vale la relazione $\overline{M} \supset \overline{M}'|_{11'}$. Mostriamo adesso che le condizioni dei teoremi 3.2.3.1 e 3.2.3.2 non sono verificate: difatti se fosse verificato il teorema 3.2.3.1 dovrebbero essere equivalenti gli stati $S_1T'_1$ di $\overline{M}'$ e

S_1T_1 di $\overline{M}$, che è facile vedere non essere vero. Se fosse verificato il teorema 3.2.3.2 dovrebbero essere equivalenti gli stati S_1T_1' di $\overline{M}'$ e S_1T_2 di $\overline{M}$. Anche questa relazione non è verificata.

4. EQUIVALENZA TRA RETI DI MACCHINE OTTENUTE PER SOSTITUZIONE DELLE MACCHINE COMPONENTI CON MACCHINE DI MODELLI DIVERSI

Nel capitolo precedente venivano confrontate macchine chiuse autonome che erano vincolate dal fatto che una delle macchine componenti rimaneva inalterata mentre si operava con una trasformazione di similitudine sull'altra.

In generale si è visto che questa trasformazione di similitudine non mantiene l'equivalenza fra le macchine $\overline{M}$ e $\overline{M}'$ e che l'equivalenza si ha solo in casi particolari.

Abbiamo dato inoltre delle condizioni sufficienti perché fossero verificate le relazioni: $\overline{M} \supset \overline{M}'|_{11'}$ e $\overline{M}'|^{11'}_{22'}$. In particolare questo significa che, data una macchina $\overline{M}'$ costituita dal collegamento della macchina di Mealy M_1' e dalla macchina di Moore M_2, la macchina $\overline{M}$ costituita dal collegamento della macchina di Moore M_1, ove $M_1 \gtrless M_1'$ e dalla macchina di Moore M_2, le macchine $\overline{M}$ ed $\overline{M}'$ non sono equivalenti.

In questo capitolo mostreremo come data una qualsiasi macchina $\overline{M}'(M_3', M_2)$, ove M_3' è una macchina di Mealy e M_2 è di Moore, esiste sempre una macchina $\overline{M}(M_1, M_2)$ ove sia M_1 che M_2 sono macchine di Moore, tale che $\overline{M} \supset \overline{M}'|^{11'}_{22'}$.

Le considerazioni che faremo sono valide anche a partire dalla macchina $\overline{M}(M_1, M_2)$, in tal caso esisterà sempre la macchina $\overline{M}'(M_3', M_2)$ tale che verifica la relazione:

$$\text{(A)} \qquad \overline{M}' \supset \overline{M}|^{1'1}_{2'2}$$

4.1. Equivalenza fra due macchine chiuse autonome $\overline{M}'(M_3', M_2)$ ed $\overline{M}(M_1, M_2)$ con M_3' di Mealy e M_1 ed M_2 di Moore.

TEOREMA 4.1.1:

Data una qualsiasi macchina $\overline{M}'(M_3', M_2)$, ove M_3' è una macchina di Mealy e M_2 è di Moore, esiste sempre una macchina $\overline{M}(M_1, M_2)$, ove M_1 è di Moore, tale che valga la relazione:

$$\overline{M} \supset \overline{M}'|_{\substack{11' \\ 22'}}$$

Dimostrazione:

Riferiamoci alla Fig. 27:

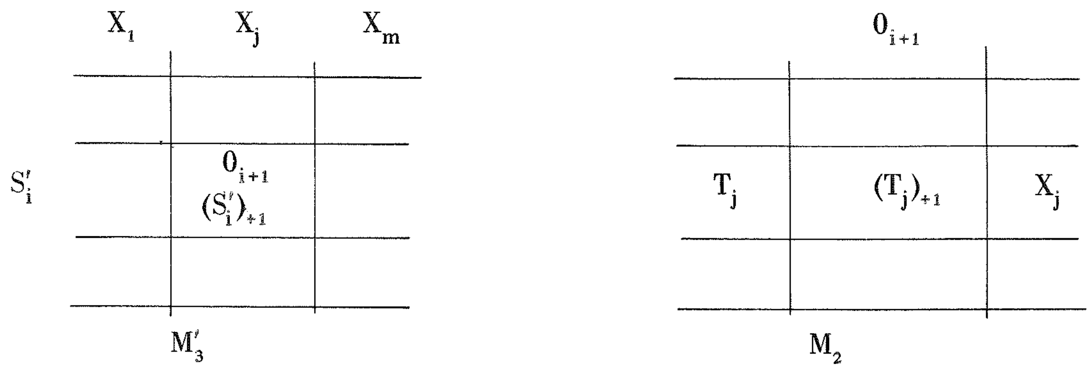


Fig. 27

Per ciascun stato $S'_i T_j$ di $\overline{M}'$ ricaviamo lo stato successore $(S'_i)_{+1}$ $(T_j)_{+1}$ e si considerino le uscite 0_{i+1} e X_j delle macchine M'_3 e M_2 quando $\overline{M}'$ si trovi nello stato $S'_i T_j$.

Si costruisca una tabella che ha tante righe quanti sono tutti gli strati distinti $S'_i T_j$ e che ha m colonne ove m è il numero di configurazioni di ingresso di M'_3. Si chiami lo stato $S'_i T_j$ con ij nella tabella di tale macchina e lo stato $(S'_i)_{+1}$ $(T_j)_{+1}$ con $(i+1)(j+1)$.

La riga corrisponde allo stato ij sarà quella di fig. 28:

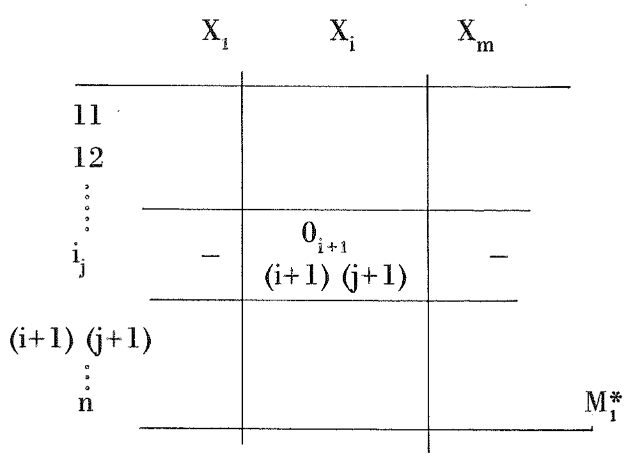


Fig. 28

La casella corrispondente allo stato totale (ij, X_j) conterrà lo stato $(i+1)(j+1)$ come successore e 0_{i+1} come uscita. Tutte le altre caselle della riga ij-esima sono non specificate. La macchina $\bar{M}^*(M_1^*, M_2) \supset \bar{M}'(M'_3, M_2)\big|_{\substack{11'\\22'}}$ per costruzione. La corrispondenza fra gli stati equivalenti è $S'_i T_j \equiv ij\ T_j$.

Fra le possibili specifiche delle caselle non specificate di M_1^*, c'è quella per cui si ottiene la macchina di Moore M_1 di Fig. 29.

	X_1	$\cdots$	X_j	$\cdots$	X_m	
11						
12						
$\vdots$						
ij	–	$\cdots$	(i+1)(j+1)	$\cdots$	–	0_{i+1}
$\vdots$						
n						M_1

Fig. 29

La macchina $\bar{M}(M_1, M_2)$ è tale da verificare l'asserto: $\bar{M}(M_1, M_2) \supset \bar{M}'(M'_3, M_2)\big|_{\substack{11'\\22'}}$.

Con una procedura analoga a quella descritta, si può dimostrare che, data una macchina $\bar{M}(M_1, M_2)$ ove M_1 e M_2 sono di Moore, esiste sempre una macchina $\bar{M}'(M'_3, M_2)$ ove M'_3 è di Mealy tale che: $\bar{M}'(M'_3, M_2) \supset \bar{M}(M_1, M_2)\big|_{\substack{11'\\22'}}$.

A conclusione di quanto detto facciamo il seguente esempio.

Esempio 10:

Consideriamo la macchina $\bar{M}'(M'_3, M_2)$. Le tabelle di M'_3 e M_2 sono riportate in fig. 30.

	X_1	X_2	X_3
S'_1	0_1 S'_1	0_1 S'_2	0_3 S'_3
S'_2	0_2 S'_2	0_2 S'_2	0_1 S'_1
S'_3	0_3 S'_1	0_1 S'_1	0_2 S'_2

	0_1	0_2	0_3	
T_1	T_2	T_3	T_1	X_1
T_2	T_3	T_1	T_2	X_2
T_3	T_1	T_2	T_3	X_3

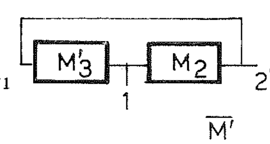


Fig. 30

Per ciascuno stato $S'_i T_j$ consideriamo il successore e le uscite ai punti 1' e 2'.

(11) $S'_1 T_1 \rightarrow S'_1 T_2$ $(0_1 X_1)$

(12) $S'_1 T_2 \rightarrow S'_2 T_3$ $(0_1 X_2)$

(13) $S'_1 T_3 \rightarrow S'_3 T_3$ $(0_3 X_3)$

(21) $S'_2 T_1 \rightarrow S'_2 T_3$ $(0_2 X_1)$

(22) $S'_2 T_2 \rightarrow S'_2 T_1$ $(0_2 X_2)$

(23) $S'_2 T_3 \rightarrow S'_1 T_1$ $(0_1 X_3)$

(31) $S'_3 T_1 \rightarrow S'_3 T_1$ $(0_3 X_1)$

(32) $S'_3 T_2 \rightarrow S'_1 T_3$ $(0_1 X_2)$

(33) $S'_3 T_3 \rightarrow S'_2 T_2$ $(0_2 X_3)$

Tra parentesi sono indicati i nomi degli stati della tabella della macchina M_1^* riportata in fig. 31.

Tra le possibili specifiche della macchina M_1^* c'è quella riportata in Fig. 32.

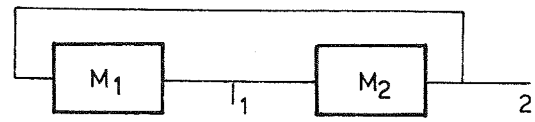
	X_1	X_2	X_3
11	0_1 12	–	–
12	–	0_1 23	–
13	–	–	0_1 33
21	0_2 23	–	–
22	–	0_2 21	–
23	–	–	0_1 11
31	0_3 31	–	–
32	–	0_1 13	–
33	–	–	0_2 22

M_1^*

Fig. 31

	X_1	X_2	X_3	
P_1	P_1	P_1	P_1	0_1
P_2	P_2	–	P_3	0_3
P_3	P_1	P_3	P_3	0_2
P_4	–	P_2	–	0_1

M_1



$P_1 \equiv \{11, 12, 23\}$
$P_2 \equiv \{13, 31\}$
$P_3 \equiv \{21, 22, 33\}$
$P_4 \equiv \{32\}$

Fig. 32

La macchina $\overline{M}(M_1, M_2)$ è tale da verificare la relazione $\overline{M}(M_1, M_2) \supset \overline{M}'(M'_3, M_2)|_{11', 22'}$.

4.2. Reti di macchine, ottenute sostituendo le macchine componenti con macchine di modello diverso.

Nel precedente paragrafo abbiamo considerato i problemi relativi all'equivalenza di macchine chiuse autonome:

In questo paragrafo generaliziamo i risultati ottenuti al caso di Fig. 33.

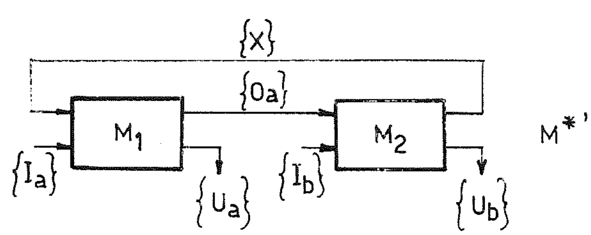
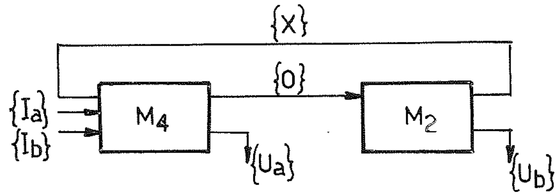


Fig. 33

ove M_1' è una macchina di Mealy e M_2 è una macchina di Moore. Con $\{I_a\}$ intendiamo l'insieme degli ingressi esterni alla macchina M_1'.

TEOREMA 4.2.1.

Sia data la macchina $M^{*\prime}$ di Fig. 33. Se essa non ha stati non accessibili è sempre possibile sostituire alla macchina M_1' di $M_1^{*\prime}$ una macchina M_4 di Moore tale che la macchina M^* di Fig. 34



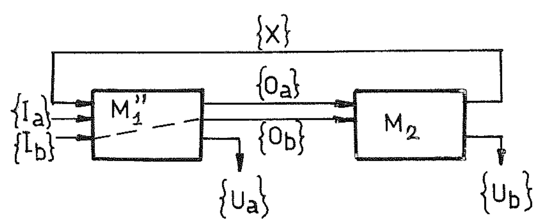
$M^*\{0\} = \{0_a\} \cup \{I_b\}$

Fig. 34

verifica la relazione: M^* include $M^{*\prime}$.

Dimostrazione:

La macchina $M^{*\prime}$ di Fig. 33 può essere sempre schematizzata come in Fig. 35



$M^{*\prime\prime}$ $\{0_b\} = \{I_b\}$

Fig. 35

in cui gli ingressi $\{I_b\}$ alla macchina M_2 sono riportati come ingressi della macchina M_1'. La macchina $M^{*\prime\prime}$ è equivalente a $M^{*\prime}$. Possiamo pertanto dimostrare il teorema 4.2.1 nel caso della macchina $M^{*\prime\prime}$ di Fig. 36 ove $\{I\} = \{I_a\} \cup \{I_b\}$ e $\{0\} = \{0_a\} \cup \{0_b\}$.

$$S_i\,T_j \xrightarrow{I_1} (S_i)_{+1}\ (T_j)_{+1} \qquad (0_{k+1},\, X_j)$$

$$S_i\,T_j \xrightarrow{I_2} (S_i)_{+2}\ (T_j)_{+2} \qquad (0_{k+2},\, X_j)$$

$$\vdots$$

$$S_i\,T_j \xrightarrow{I_n} (S_i)_{+n}\ (T_j)_{+n} \qquad (0_{k+n},\, X_j)$$

$S_i\ T_j$	ij
$(S_i)_{+1}\ (T_j)_{+1}$	$(i+1)\ (j+1)$
$(S_i)_{+2}\ (T_j)_{+2}$	$(i+2)\ (j+2)$
$\vdots$	$\vdots$
$(S_i)_{+n}\ (T_j)_{+n}$	$(i+n)\ (j+n)$

Si contraddistingono tutti gli stati $S_i\,T_i$ differenti con le coppie ij dei loro indici.

Si può costruire la tabella della macchina M'_3 che ha tanti stati quante sono tutte le coppie differenti di indici ij che abbiamo associato agli stati $S_i\,T_j$, e tanti ingressi quanti sono gli ingressi della macchina M''_1.

La tabella di M'_3 è riportata in Fig. 38:

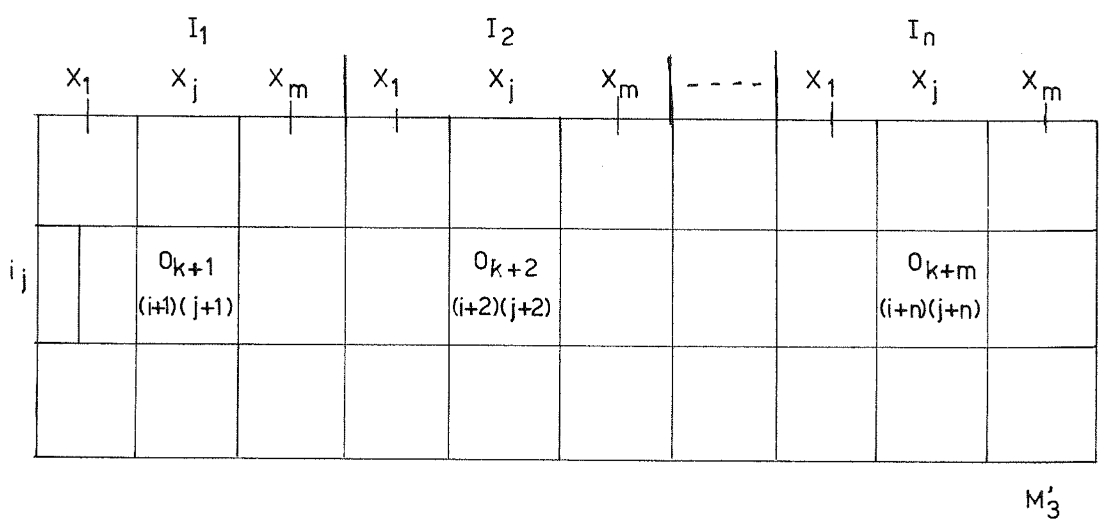


Fig. 38

Per la riga relativa al generico stato ij si hanno n caselle specificate e tutte le altre risultano non specificate.

In generale tale macchina M'_3 è di Mealy.

E' chiaro che la macchine $M^{*'''}$ di Fig. 39 è tale che $M^{*'''} \supset M^{*''}$.

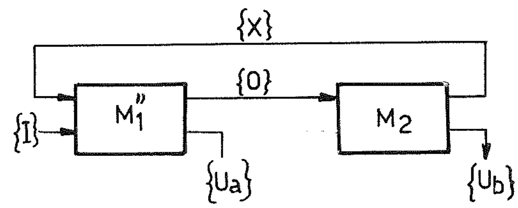


Fig. 36

Consideriamo in Fig. 37 due generiche tabelle di flusso per le macchine M_1'' e M_2 :

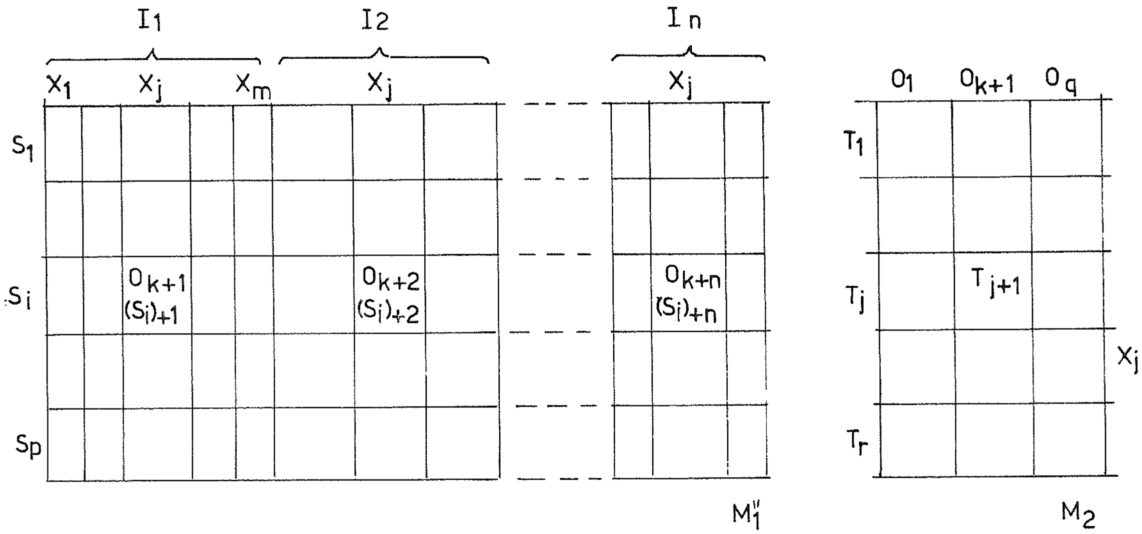


Fig. 37

Nella tabella di M_1'' sono evidenziate le configurazioni $I_1, I_2, \dots, I_n$ e $X_1 \dots X_j \dots X_m$ che possono essere assunte rispettivamente dagli insiemi $\{I\}$ e $\{X\}$. Nella tabella di M_2 sono evidenziate le configurazioni $\{0_1\} \dots \{0_{k+1}\} \dots \{0_q\}$ che possono essere assunte dallo insieme $\{0\}$.

Si ricavino per ogni stato iniziale $S_i T_j$ di $M^{*''}$ gli stati successori relativi alle configurazioni degli ingressi $\{I\}$

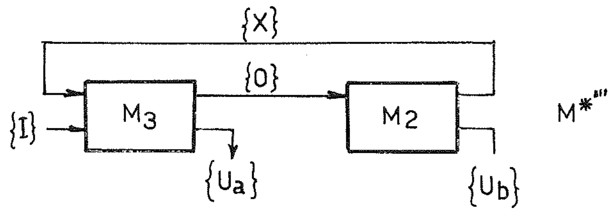


Fig. 39

La corrispondenza fra stati equivalenti è del tipo $S_i\,T_j \equiv ij\ T_j$. Se $S_i\,T_j$ non è stato non accessibile di $M^{*''}$ neppure $ij\ T_j$ è stato non accessibile di $M^{*'''}$. Dal teorema 2.5 se inseriamo dei ritardi sugli ingressi $\{I\}$ della macchina $M^{*'''}$ si ottiene la macchina M^{*IV} di fig. 40:

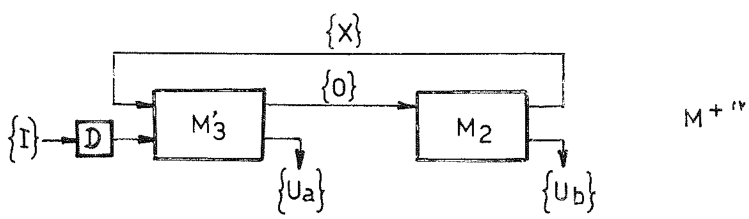


Fig. 40

tale che M^{*III} include M^{*IV}. Se però la macchina M^{*III} non ha stati non accessibili, dal corollario 2 del teorema 2.7, discende la relazione $M^{*III} \underset{\rightarrow}{\simeq} M^{*IV}$, e poiché $M^{*III} \supset M^{*II}$, vale anche la relazione:

$$M^{*IV} \text{ include } M^{*II}.$$

In particolare la macchina di Fig. 41 può essere sostituita con la macchina equivalente M_4 di Fig. 41, la cui tabella è quella della connessione della macchina D e della macchina M'_3.

La tabella della macchina M_4 ha un numero di stati pari al prodotto del numero degli stati di M'_3 per le configurazioni di ingresso relative agli ingressi $\{I\}$.

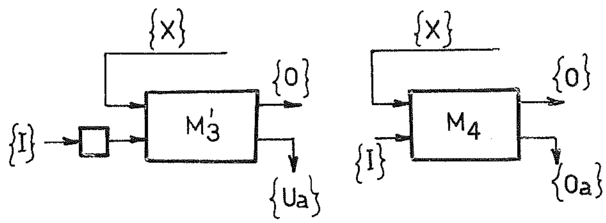


Fig. 41

Per ciascun stato sono specificate un numero di caselle pari al numero delle configurazioni degli ingressi I e a tali caselle, per ciascun stato è associata la stessa uscita.

Pertanto tale macchina M_4 è specificabile come una macchina di Moore.

Abbiamo così ottenuto la macchina M^* di Fig. 42

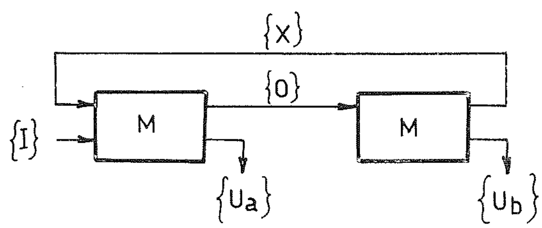


Fig. 42

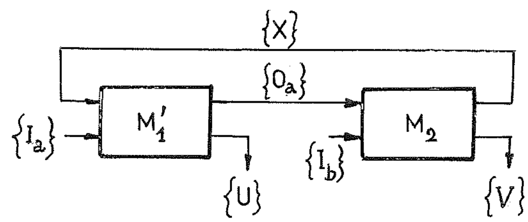
che include la macchina M^{*II} di Fig. 36.

Poiché $M^{*II} = M^{*I}$ vale anche la relazione:

$$M^* \text{ include } M^{*I}$$

Esempio 11:

Consideriamo la macchina $M^{*'}$ di Fig. 43:



M*'

	I_{a1}		I_{a2}	
	X_1	X_2	X_1	X_2
S_1	$0_{a1}\,U_1$ S_2	$0_{a2}\,U_2$ S_1	$0_{a1}\,U_2$ S_1	$0_{a2}\,U_1$ S_2
S_2	$0_{a2}\,U_2$ S_1	$0_{a1}\,U_2$ S_1	$0_{a1}\,U_1$ S_2	$0_{a2}\,U_1$ S_1

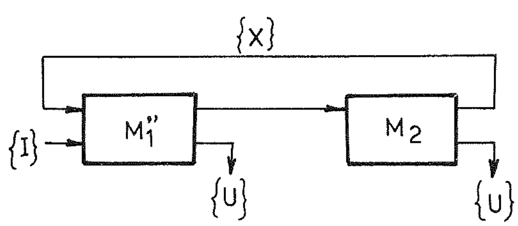
M'_1

	I_{b1}		I_{b2}		
	0_{a1}	0_{a2}	0_{a1}	0_{a2}	
T_1	T_1	T_1	T_2	T_2	$X_1\,V_1$
T_2	T_2	T_1	T_1	T_2	$X_2\,V_2$

M_2

Fig. 43

Essa è equivalente alla macchina M^{*II} di Fig. 44:



M*''

$\{I\} = \{I_a\} \cup \{I_b\}$

$\{0\} = \{I_b\} \cup \{0_a\}$

$I_1 = I_{a1}\,I_{b1}$	$0_1 = 0_{a1}\,I_{b1}$
$I_2 = I_{a1}\,I_{b2}$	$0_2 = 0_{a1}\,I_{b2}$
$I_3 = I_{a2}\,I_{b1}$	$0_3 = 0_{a2}\,I_{b1}$
$I_4 = I_{a2}\,I_{b2}$	$0_4 = 0_{a2}\,I_{b2}$

Fig. 44

	I_1		I_2		I_3		I_4	
	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
S_1	$0_1 U_1$ S_2	$0_3 U_2$ S_1	$0_2 U_1$ S_2	$0_4 U_2$ S_1	$0_1 U_2$ S_1	$0_3 U_1$ S_2	$0_2 U_2$ S_1	$0_4 U_1$ S_2
S_2	$0_3 U_2$ S_1	$0_1 U_2$ S_1	$0_4 U_2$ S_1	$0_2 U_2$ S_1	$0_1 U_1$ S_2	$0_3 U_1$ S_1	$0_1 U_1$ S_2	$0_4 U_1$ S_1

M_1''

	0_1	0_3	0_2	0_4	
T_1	T_1	T_1	T_2	T_2	$X_1\ V_1$
T_2	T_2	T_1	T_1	T_2	$X_2\ V_2$

M_2

Consideriamo gli stati successori di ciascuno stato $S_i T_j$ di $M^{*''}$:

$S_1 T_1$	$I_1 \to S_2 T_1$		$(0_1 U_1, X_1 V_1)$
	$I_2 \to S_2 T_2$		$(0_2 U_1, X_1 V_1)$
	$I_3 \to S_1 T_1$		$(0_1 U_2, X_1 V_1)$
	$I_4 \to S_1 T_2$		$(0_2 U_2, X_1 V_1)$
$S_1 T_2$	$I_1 \to S_1 T_1$		$(0_3 U_2, X_2 V_2)$
	$I_2 \to S_1 T_2$		$(0_4 U_2, X_2 V_2)$
	$I_3 \to S_2 T_1$		$(0_3 U_1, X_2 V_2)$
	$I_4 \to S_2 T_2$		$(0_4 U_1, X_2 V_2)$
$S_2 T_1$	$I_1 \to S_1 T_1$		$(0_3 U_2, X_1 V_1)$
	$I_2 \to S_1 T_2$		$(0_4 U_2, X_1 V_1)$
	$I_3 \to S_2 T_1$		$(0_1 U_1, X_1 V_1)$
	$I_4 \to S_2 T_1$		$(0_1 U_1, X_1 V_1)$

$$
S_2T_2 \begin{cases} I_1 \to S_1T_2 & (0_1U_2,\ X_2V_2) \\ I_2 \to S_1T_1 & (0_2U_2,\ X_2V_2) \\ I_3 \to S_1T_1 & (0_3U_1,\ X_2V_2) \\ I_4 \to S_1T_2 & (0_4U_1,\ X_2V_2) \end{cases}
$$

Costruiamo la tabella della macchina M_3'.

	I_1		I_2		I_3		I_4	
	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
11	0_1U_1 21		0_2U_1 22		0_1U_2 11		0_2U_2 12	
12		0_3U_2 11		0_4U_2 12		0_3U_1 21		0_4U_1 22
21	0_3U_2 11		0_4U_2 12		0_1U_1 21		0_1U_1 21	
22		0_1U_2 12		0_2U_2 11		0_3U_1 11		0_4U_1 12

M_3'

Costruiamo la tabella della macchina M_4, ottenuta da M_3' inserendo la "macchina ritardo" seguente sugli ingressi I :

	I_1	I_2	I_3	I_4	
D_1	D_1	D_2	D_3	D_4	I_1
D_2	D_1	D_2	D_3	D_4	I_2
D_3	D_1	D_2	D_3	D_4	I_3
D_4	D_1	D_2	D_3	D_4	I_4

D

La tabella di M_4 è la seguente:

		I_1		I_2		I_3		I_4	
		X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
11	D_1	21 $0_1\,U_1$ D1		21 $0_1\,U_1$ D2		21 $0_1\,U_1$ D3		21 $0_1\,U_1$ D4	
	D_2	22 $0_2\,U_1$ D1		22 $0_2\,U_1$ D2		22 $0_2\,U_1$ D3		22 $0_2\,U_1$ D4	
	D_3	11 $0_1\,U_2$ D1		11 $0_1\,U_2$ D2		11 $0_1\,U_2$ D3		11 $0_1\,U_2$ D4	
	D_4	12 $0_2\,U_2$ D1		12 $0_2\,U_2$ D2		12 $0_2\,U_2$ D3		12 $0_2\,U_2$ D4	
12	D_1		11 $0_3\,U_2$ D1		11 $0_3\,U_2$ D2		11 $0_3\,U_2$ D3		11 $0_3\,U_2$ D4
	D_2		12 $0_4\,U_2$ D1		12 $0_4\,U_2$ D2		12 $0_4\,U_2$ D3		12 $0_4\,U_2$ D4
	D_3		21 $0_3\,U_1$ D1		21 $0_3\,U_1$ D2		21 $0_3\,U_1$ D3		21 $0_3\,U_1$ D4
	D_4		22 $0_4\,U_1$ D1		22 $0_4\,U_1$ D2		22 $0_4\,U_1$ D3		22 $0_4\,U_1$ D4
21	D_1	11 $0_3\,U_2$ D1		11 $0_3\,U_2$ D2		11 $0_3\,U_2$ D3		11 $0_3\,U_2$ D4	
	D_2	12 $0_4\,U_2$ D1		12 $0_4\,U_2$ D2		12 $0_4\,U_2$ D3		12 $0_4\,U_2$ D4	
	D_3	21 $0_1\,U_1$ D1		21 $0_1\,U_1$ D2		21 $0_1\,U_1$ D3		21 $0_1\,U_1$ D4	
	D_4	21 $0_1\,U_1$ D1		21 $0_1\,U_1$ D2		21 $0_1\,U_1$ D3		21 $0_1\,U_1$ D4	

segue

segue

		I_1		I_2		I_3		I_4	
		X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
22	D_1		$0_1 U_2$ 12 D1		$0_1 U_2$ 12 D2		$0_1 U_2$ 12 D3		$0_1 U_2$ 12 D4
	D_2		$0_2 U_2$ 11 D1		$0_2 U_2$ 11 D2		$0_2 U_2$ 11 D3		$0_2 U_2$ 11 D4
	D_3		$0_3 U_1$ 11 D1		$0_3 U_1$ 11 D2		$0_3 U_1$ 11 D3		$0_3 U_1$ 11 D4
	D_4		$0_4 U_1$ 12 D1		$0_4 U_1$ 12 D2		$0_4 U_1$ 12 D3		$0_4 U_1$ 12 D4

M_4

Un possibile compattamento per ridurre il numero degli stati è mostrato nella tabella seguente.

Gli stati compatti sono i seguenti:

$\{11\ D_4,\ 22\ D_2\} = 11\ D_4$

$\{11\ D_3,\ 22\ D_1\} = 11\ D_3$

$\{12\ D_1,\ 21\ D_1\} = 12\ D_1$

$\{12\ D_2,\ 21\ D_2\} = 12\ D_2$

$\{11\ D_1,\ 21\ D_3,\ 21\ D_4\} = 11\ D_1$

	I_1		I_2		I_3		I_4		
	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	
$11\,D_1$	$12\,D_1$		$12\,D_2$		$11\,D_1$		$11\,D_1$		$0_1\,U_1$
$11\,D_2$	$11\,D_3$		$11\,D_4$		$22\,D_3$		$22\,D_4$		$0_2\,U_1$
$11\,D_3$	$11\,D_1$	$12\,D_1$	$11\,D_2$	$12\,D_2$	$11\,D_3$	$12\,D_3$	$11\,D_4$	$12\,D_4$	$0_1\,U_2$
$11\,D_4$	$12\,D_1$	$11\,D_1$	$12\,D_2$	$11\,D_2$	$12\,D_3$	$11\,D_3$	$12\,D_4$	$11\,D_4$	$0_2\,U_2$
$12\,D_1$	$11\,D_1$	$11\,D_1$	$11\,D_2$	$11\,D_2$	$11\,D_3$	$11\,D_3$	$11\,D_4$	$11\,D_4$	$0_3\,U_2$
$12\,D_2$	$12\,D_1$	$12\,D_1$	$12\,D_2$	$12\,D_2$	$12\,D_3$	$12\,D_3$	$12\,D_4$	$12\,D_4$	$0_4\,U_2$
$12\,D_3$		$12\,D_1$		$12\,D_2$		$11\,D_1$		$11\,D_1$	$0_3\,U_1$
$12\,D_4$		$11\,D_3$		$11\,D_4$		$22\,D_3$		$22\,D_4$	$0_4\,U_1$
$22\,D_3$		$11\,D_1$		$11\,D_2$		$11\,D_3$		$11\,D_4$	$0_3\,U_1$
$22\,D_4$		$12\,D_1$		$12\,D_2$		$12\,D_3$		$12\,D_4$	$0_4\,U_1$

M_5

La macchina $M^*(M_5, M_2)$ include la $M^{*\prime}(M_1', M_2)$ e la corrispondenza fra gli stati simili di $M^{*\prime}$ e M^* è indicata nella tabella seguente, ove sono riportati le relazioni tra gli stati della macchina M^{*III} (M_3', M_2) e M^{*IV} (M_4, M_2).

$M^{*\prime}$		$M^{*\prime\prime\prime}$		M^{*IV}		M^*
$S_1\,T_1$	$\equiv$	$11\,T_1$	$\rightleftarrows$	$11\,D_3\,T_1$	$\equiv$	$11\,D_3\,T_1$
				$12\,D_1\,T_2$	$\equiv$	$12\,D_1\,T_2$
				$21\,D_1\,T_1$	$\equiv$	$12\,D_1\,T_1$
				$22\,D_2\,T_2$	$\equiv$	$11\,D_4\,T_2$
				$22\,D_3\,T_2$	$\equiv$	$22\,D_3\,T_2$
$S_1\,T_2$	$\equiv$	$12\,T_2$	$\rightleftarrows$	$11\,D_4\,T_1$	$\equiv$	$11\,D_4\,T_1$
				$12\,D_2\,T_2$	$\equiv$	$12\,D_2\,T_2$
				$21\,D_2\,T_1$	$\equiv$	$12\,D_2\,T_1$
				$22\,D_1\,T_2$	$\equiv$	$11\,D_3\,T_2$
				$22\,D_4\,T_2$	$\equiv$	$11\,D_4\,T_2$

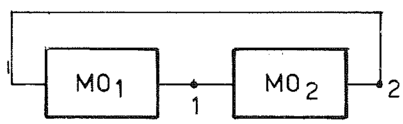
$$\begin{array}{lllll} S_2T_1 & \equiv & 21\,T_1 & \overset{\sim}{\rightarrow} & \left.\begin{array}{l}11\,D_1T_1\\ 12\,D_3T_2\\ 21\,D_3T_1\\ 21\,D_4T_1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\equiv \quad 11\,D_1T_1\\ \equiv \quad 12\,D_3T_2\\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} S_2T_2 & \equiv & 22\,T_2 & \overset{\sim}{\rightarrow} & \left.\begin{array}{l}11\,D_2T_1\\ 12\,D_4T_2\end{array}\right\} \begin{array}{l}\equiv \quad 11\,D_2T_1\\ \equiv \quad 12\,D_4T_2\end{array}\end{array}$$

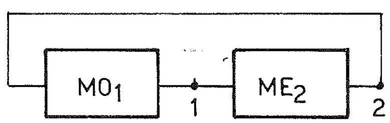
5. CONCLUSIONI

Nella prima parte di questo lavoro sono stati affrontati i problemi relativi all'equivalenza di sistemi schematizzabili per mezzo dell'interconnessione di macchine sequenziali, quando si operi su tali macchine attraverso trasformazioni di equivalenza e similitudine.

Ci limitiamo a riassumere i risultati ottenuti nel caso delle macchine chiuse autonome, indicando con ME una macchina di Mealy e con MO una macchina di Moore.



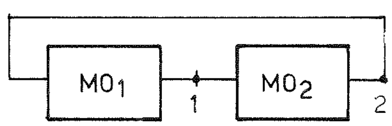
$\overline{M}$ $\qquad \overline{M} \supset \overline{M}'|_{22'}$, $\qquad S'_i\,(T_j)_{+1} \equiv S_i\,T'_j$



$\overline{M}'$ $\qquad \overline{M}' \supset \overline{M}|_{11'}$, $\qquad (S_i)_{+1}\,T'_j \equiv S'_i\,T_j$

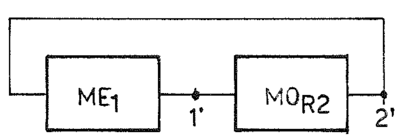
$ME_1 \underset{\rightarrow}{\sim} MO_1$

$ME_2 \underset{\rightarrow}{\sim} MO_2$



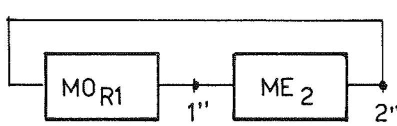
$\overline{M}$ $\qquad \overline{M} \supset \overline{M}'|_{11'}$, $\qquad (S_i)_{+1}\,T_j = S'_i\,T''_j$

$\overline{M}' \supset \overline{M}|_{22'}$, $\qquad S'_i\,(T''_j)_{+1} = S_i\,T_j$



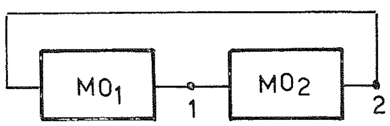
$\overline{M}'$ $\qquad \overline{M} \supset \overline{M}''|_{22'}$, $\qquad S_i\,(T_j)_{+1} = S''_i\,T'_j$

$\overline{M}''$ $\qquad \overline{M}'' \supset \overline{M}|_{11'}$, $\qquad (S''_i)_{+1}\,T'_j = S_i\,T_j$

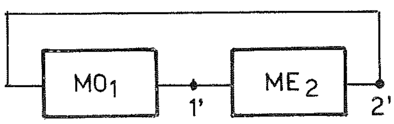


$ME_1 \underset{\rightarrow}{\sim} MO_1$
$MO_{R1} \underset{\rightarrow}{\sim} MO_1$
$ME_2 \underset{\rightarrow}{\sim} MO_2$
$MO_{R2} \underset{\rightarrow}{\sim} MO_2$

Abbiamo inoltre mostrato alcune condizioni per le quali è valida l'equivalenza fra le macchine seguenti:



$\bar{M}$



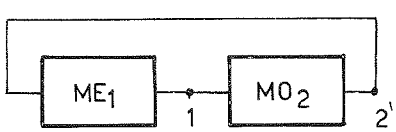
$\bar{M}'$

$ME_2 \underset{\rightarrow}{\sim} MO_2$

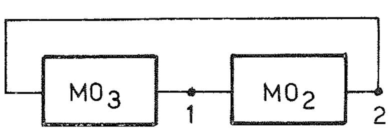
cond. a) $\bar{M} \equiv \bar{M}'|_{11'}$ $S_i T_j \equiv S_i T'_j$
(Teorema 3.2.3.1)

cond. b) $\bar{M} \supset \bar{M}'|_{\substack{11'\\22'}}$ $S_i (T_j)_{+1} \equiv S_i T'_j$
corollario del
(Teorema 3.2.3.2)

Successivamente si è ricavata una procedura che mostra come sia sempre possibile sostituire alla macchina ME_1 di $\bar{M}$ una macchina di Moore MO_3 tale da soddisfare la relazione seguente:



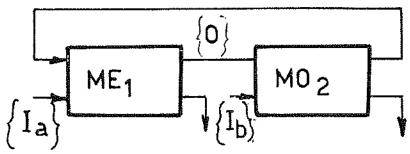
$\bar{M}'$



$\bar{M}$

$$\overline{M} \supset \overline{M}'_{|11', 22'}$$

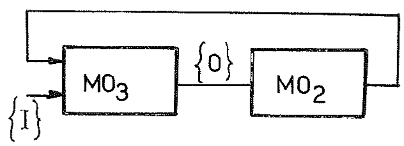
Infine si sono generalizzati i precedenti risultati al caso generale di collegamenti di macchine con ingressi e uscite esterni ottenendo i risultati seguenti:



$M^{*\prime}$

M^* include $M^{*\prime}$

Se $M^{*\prime}$ non ha stati non accessibili



M^*

$\{I\} = \{I_a\} \cup \{I_b\}$

$\{0\} = \{0_a\} \cup \{I_b\}$

BIBLIOGRAFIA

[1] G.F. CASAGLIA, G.B. GERACE, M. VANNESCHI, "Equivalent models and comparison of microprogrammed systems" Presentato a "Int. Advanced Summer School on Microprogramming" St. Raphael, France, 30 Agosto – 10 Settembre 1971.

[2] G.F. CASAGLIA, M. VANNESCHI, "Modelli e strutture per il progetto di sistemi microprogrammati".
Nota Interna n. 2 – Serie speciale – Conv. CNR-ENI, Agosto 1971.

[3] F.C. HENNIE, "Finite state models for logic machines" Wiley, 1968.

[4] J. HARTMANIS, R.E. STEARNS, "Algebric structure theory of sequential machines". Prentice Hall, 1966.

[5] W.I. CADDEN, "Equivalent sequential circuits"
IRE Trans., on Circuit Theory, Vol. CT-6, pp. 30-34, Mar., 1969.

[6] G.B. GERACE, "Clocked sequential circuits".
Atti del X Congresso dell'automaz. e Strumentazione, Milano 1968, pp. 209, 226.