

MODELLAZIONE NUMERICA DI ANTICHE COSTRUZIONI IN MURATURA

Massimiliano Lucchesi¹, Cristina Padovani², Nicola Zani¹

¹ Dipartimento di Costruzioni, Università di Firenze

² Istituto di Scienza e Tecnologie dell'Informazione "A. Faedo", Consiglio Nazionale delle Ricerche, Pisa

1. MODELLAZIONE NUMERICA E RESTAURO DEI MONUMENTI

Molte costruzioni in muratura di interesse artistico e storico, appartenenti al patrimonio architettonico nazionale, necessitano di interventi di manutenzione e restauro. Per ottimizzare questi interventi dal punto di vista dei costi, dell'impatto architettonico e dell'efficacia statica è talvolta utile modellare il comportamento strutturale delle costruzioni murarie, allo scopo di ottenere alcune informazioni, quali lo stato di tensione e una stima dell'estensione delle zone fratturate e della loro evoluzione quando la struttura è soggetta a variazioni delle condizioni di carico. Sebbene si costruisca in muratura da molti secoli, solo da pochi anni sono disponibili modelli costitutivi e tecniche di calcolo che consentono di descrivere in modo abbastanza realistico il comportamento statico di edifici costituiti da questo materiale che è eterogeneo e la cui risposta a trazione è profondamente diversa da quella a compressione.

Importanti intuizioni sul comportamento meccanico di archi e volte in muratura risalgono a Leonardo, Hooke, Poleni (Figura 1) [5, 22, 44] e a molti altri autori (si veda [19, 4, 5] per una dettagliata bibliografia). Castigliano, nel suo famoso lavoro sul ponte Mosca a Torino [10], e Signorini, nei suoi studi sulle travi in muratura [49, 50], hanno messo in evidenza sia la possibilità che la necessità di tenere conto della debole resistenza a trazione del materiale muratura.

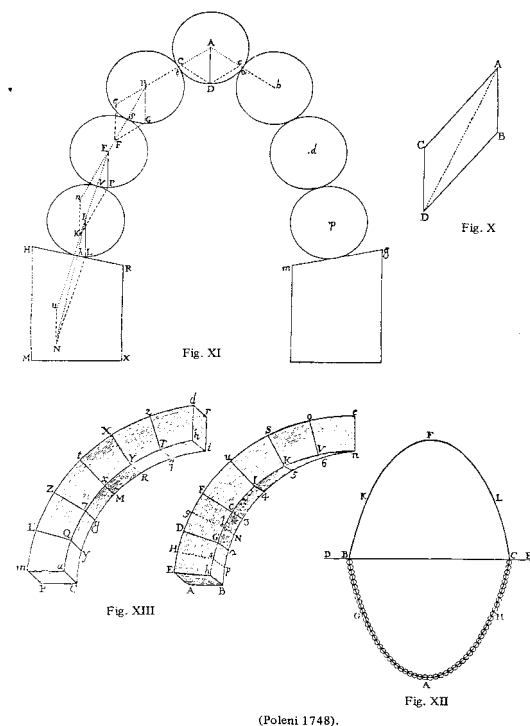
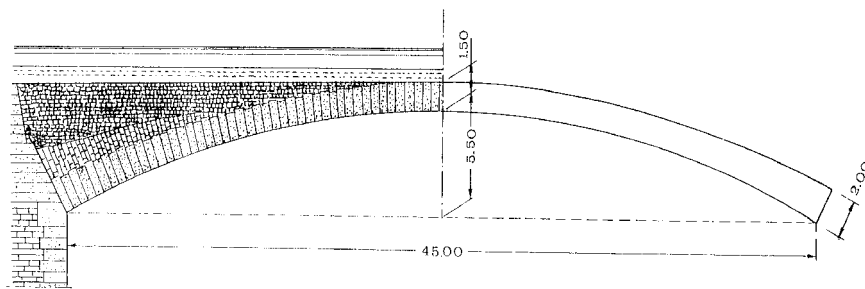


Figura 1. Lo studio di Giovanni Poleni (1748): “*Ut pendet continuum flexibile sic stabit contiguum rigidum inversum*” (R. Hooke, 1675).

Successivamente il successo ottenuto applicando la teoria dell'elasticità lineare allo studio di strutture in ferro e in cemento armato ha suscitato un entusiasmo tale da far sì che il calcolo lineare elastico venisse talvolta impiegato in modo alquanto arbitrario allo studio di costruzioni in muratura.

Ciò, da una parte non ha favorito l'impegno degli studiosi a portare avanti il lavoro intrapreso nel XIX secolo da Castigliano per lo sviluppo di tecniche di calcolo adatte alle strutture murarie (Figure 2 e 3), dall'altro ha contribuito a rafforzare lo scetticismo circa la possibilità stessa di modellare il comportamento statico degli edifici in muratura. Importanti studi sui materiali non resistenti a trazione non hanno trovato per molti anni nessuna applicazione, fino agli anni sessanta quando sono stati ripresi con l'obiettivo di determinare il carico di collasso di alcune semplici strutture murarie [23, 20].



Ponte Mosca, Torino. Costruito nel 1827 è costituito da 93 conci di granito di Malanaggio.

Figura 2. Il ponte Mosca.

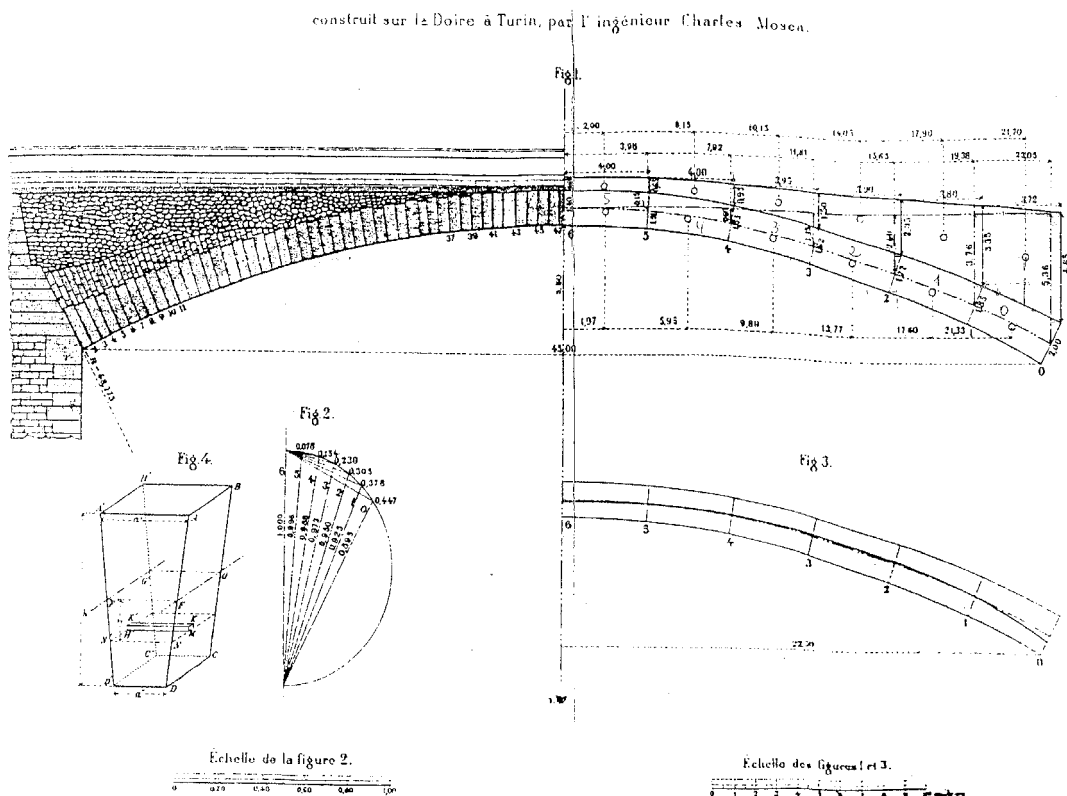


Figura 3. Studio del ponte Mosca condotto da C. A. Castigliano.

Recentemente, la disponibilità di calcolatori sempre più potenti e di raffinate tecniche numeriche per la soluzione di problemi non lineari ha riaperto il dibattito circa la possibilità e l'opportunità di modellare gli interventi sul costruito storico prima della loro realizzazione, al fine di valutarne gli effetti sulla statica dell'edificio.

Molti autori hanno proposto di determinare il carico di collasso di strutture in muratura ricorrendo a modelli a blocchi rigidi con diversi tipi di interfacce [24, 25], e hanno applicato questi modelli anche allo studio delle volte [42]. I modelli costitutivi elastoplastici sono largamente adottati sia per modellare i mattoni e la malta sia per tenere conto dell'anisotropia del materiale muratura [26, 27]. In [18] sono stati confrontati modelli costitutivi elastoplastici che adottano differenti criteri di snervamento (Galileo-Rankine, Drucker-Prager, etc.), mentre in [52] è descritto uno studio sulle volte in muratura condotto adottando queste equazioni costitutive. Infine sono stati proposti numerosi modelli che usano tecniche di omogeneizzazione e consentono quindi di tenere conto della tessitura della muratura, anche se la loro applicazione è in genere limitata allo studio di pannelli [39, 40, 53].

Un'equazione costitutiva largamente impiegata per modellare il comportamento dei materiali murari considera la muratura come un materiale elastico non lineare non resistente a trazione e infinitamente resistente a compressione [15, 16, 14], noto come *masonry-like* o *no-tension*.

Molti autori hanno contribuito ad una migliore comprensione di questo legame costitutivo, mettendone in luce le potenzialità [49, 50, 20, 21, 43, 12, 11, 45, 46 e 47]. Questa equazione è in grado di modellare realisticamente gli aspetti essenziali del comportamento meccanico delle murature [7, 9, 35].

Nonostante la relativa semplicità dell'equazione costitutiva dei materiali *masonry-like*, il problema di equilibrio per strutture costituite da questo materiale è in genere molto complesso e la determinazione della soluzione esplicita è possibile solo in casi molto semplici [2, 3, 38]. Perciò nelle applicazioni è necessario ricorrere a metodi numerici e a questo scopo sono state sviluppate opportune tecniche numeriche [29, 48, 1]. Il modello costitutivo è stato successivamente generalizzato per tenere conto della limitata resistenza a compressione della muratura e della sua debole resistenza a trazione [30, 35]. I modelli ed i relativi metodi numerici sono stati quindi implementati nel codice agli elementi finiti NOSA sviluppato dal Laboratorio di "Meccanica dei Materiali e delle Strutture" dell'ISTI [13]. Il NOSA è stato applicato allo studio di archi e volte in muratura e all'analisi di alcune costruzioni e monumenti di interesse storico e architettonico, tra cui il battistero del duomo di Volterra, l'arsenale Mediceo di Pisa [37], il teatro Goldoni di Livorno [28], la chiesa madre di San Nicolò a Noto [36], il campanile di Buti [8] e la Chiesa di San Pietro in Vinculis a Pisa [6, 7]. In questo lavoro descriveremo lo studio della cupola della chiesa di Santa Maria Maddalena a Morano Calabro e della basilica di Santa Maria della Roccella.

Questi studi hanno messo in evidenza l'importanza di disporre strumenti di calcolo che coadiuvino il progettista nella pianificazione degli interventi di consolidamento su costruzioni murarie storiche. Il codice NOSA consente non solo di valutare il comportamento statico delle costruzioni in muratura, ma anche di individuare le cause di dissesti presenti su una struttura e di determinare l'influenza di eventuali interventi di restauro e consolidamento (quali ad esempio l'applicazione di catene, cerchiature metalliche, strutture di ritegno, etc.) sullo stato di sforzo e sul quadro fessurativo.

Con l'obiettivo di valutare l'influenza di variazioni termiche stagionali e giornaliere sullo stato di sforzo di strutture murarie [31], è stata implementata nel codice NOSA l'equazione costitutiva dei materiali *masonry-like* in condizioni non isoterme applicati anche allo studio di siviere e convertitori utilizzati nell'industria siderurgica per la produzione dell'acciaio.

Volte e cupole in muratura sono presenti in numerose costruzioni di particolare valore storico e artistico appartenenti al patrimonio architettonico nazionale. Le loro caratteristiche geometriche e meccaniche richiedono una modellazione particolare e la messa a punto di metodi e di strumenti di calcolo che consentano di studiare questi elementi strutturali, valutarne la sicurezza e guidare la scelta di eventuali interventi di restauro [32, 33, 34]. Parallelamente allo studio di

modelli e metodi numerici che consentono di risolvere il problema dell'equilibrio delle volte in muratura, è stato formulato il concetto di superficie delle eccentricità di massimo modulo. Precisamente, fissato un punto della superficie media della volta, si considera per ciascuna direzione, l'eccentricità definita come il rapporto tra il momento flettente e la forza normale in quella direzione e si determina quella che ha modulo massimo. Si individua quindi il punto della volta la cui distanza dalla superficie media è pari all'eccentricità di modulo massimo. Ripetendo l'operazione per un numero sufficiente di punti si costruisce una superficie, detta appunto "superficie delle eccentricità di massimo modulo" che gioca per le volte in muratura un ruolo analogo a quello svolto dalla curva delle pressioni nel caso degli archi (Figura 4); in particolare, in condizioni di equilibrio essa è interamente contenuta nello spessore della volta (Figura 15) e pertanto può essere utilizzata per definire un fattore geometrico di sicurezza simile a quello usato da Heyman per gli archi [21] e può dare utili informazioni nello studio del collasso di volte in muratura.

Questa superficie oltre a consentire una visualizzazione sintetica ed efficace dei risultati delle analisi agli elementi finiti, è utile per valutare il carico di collasso, facilitando l'individuazione dei relativi meccanismi.

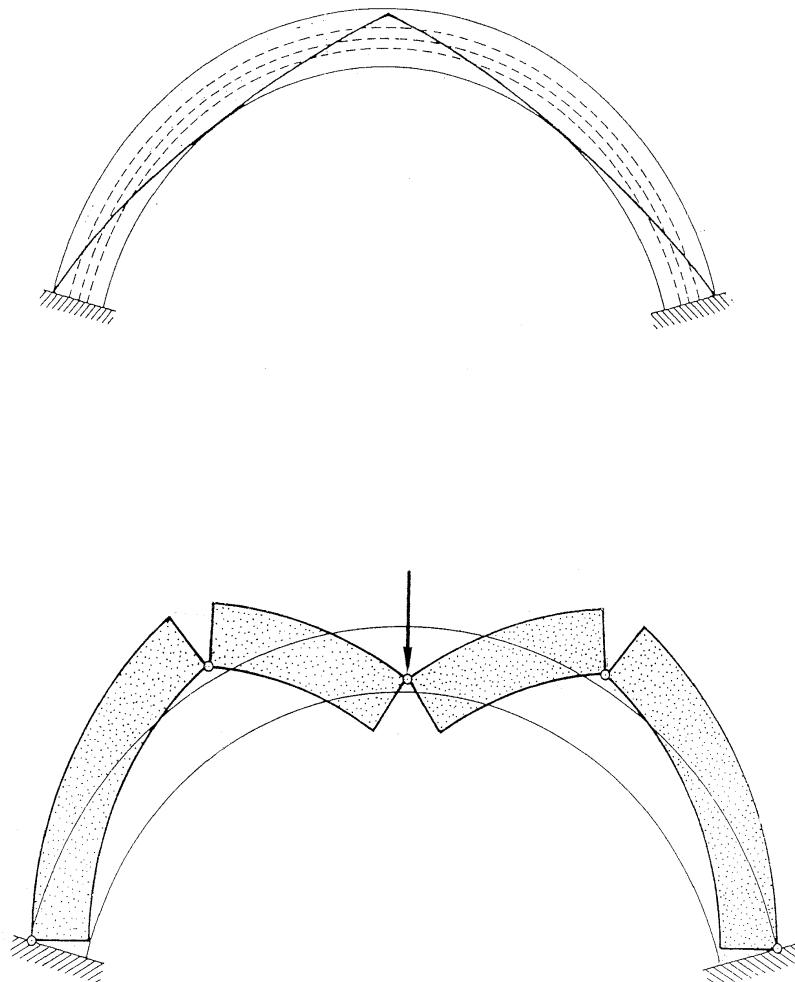


Figura 4. Curva delle pressioni in un arco in corrispondenza del collasso e relativo meccanismo di collasso.

2. LA VERIFICA NUMERICA DELLA CUPOLA DELLA “MADDALENA” DI MORANO CALABRO

2.1 Cenni storici

Le notizie storiche che riguardano la costruzione e i successivi interventi che la chiesa ha subito nel corso dei secoli sono piuttosto scarse. La chiesa fu costruita probabilmente in epoca medievale su una preesistente cappella sub-urbana. A partire dal XVI secolo questo edificio assunse il ruolo di punto di aggregazione per tutti gli abitanti di Morano, attorno al quale si svilupparono le abitazioni. Questa ipotesi è avvalorata dal fatto che la grande cupola ed il campanile sono visibili da qualsiasi punto del centro storico. La chiesa fu ampliata e restaurata nel XVI e nel XVIII secolo. Al XIX secolo, invece, risalgono il campanile (costruito tra il 1804 e il 1817), la facciata neoclassica (1841-44) e la copertura con piastrelle di maiolica gialle e blu della cupola e del campanile (1862).

Lo studio presentato in questo lavoro è stato condotto nel 2004 su incarico della Soprintendenza per i Beni Architettonici e per il Paesaggio della Calabria [9, 34].

2.2 La geometria della struttura e rilievo del quadro fessurativo

La geometria del complesso monumentale e le dimensioni utilizzate nell'analisi agli elementi finiti della cupola e del tamburo sono state ricavate da un vecchio rilievo cartaceo conservato presso la Soprintendenza per i Beni Architettonici e per il Paesaggio della Calabria (Figure 5, 6 e 7).

La tipologia strutturale della chiesa è quella di un edificio in muratura portante con pianta a croce latina divisa in tre navate. La chiesa è lunga circa 50 m e larga 24 m. L'altezza massima alla quota del lanternino della cupola è di circa 33 m.

La zona centrale del presbiterio si eleva di 16 m al di sopra della navata centrale ed è costituita da un tamburo a pianta ottagonale su cui si imposta una cupola rifinita da un lanternino (Figure 8 e 9). La navata centrale termina con l'abside costituita da una cupola emisferica.

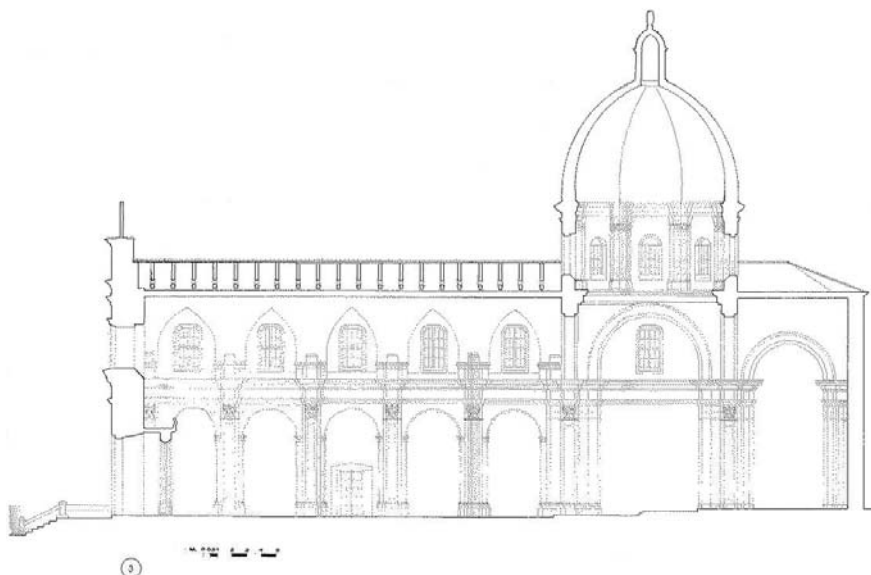


Figura 5. Sezione longitudinale della chiesa in corrispondenza della navata centrale.

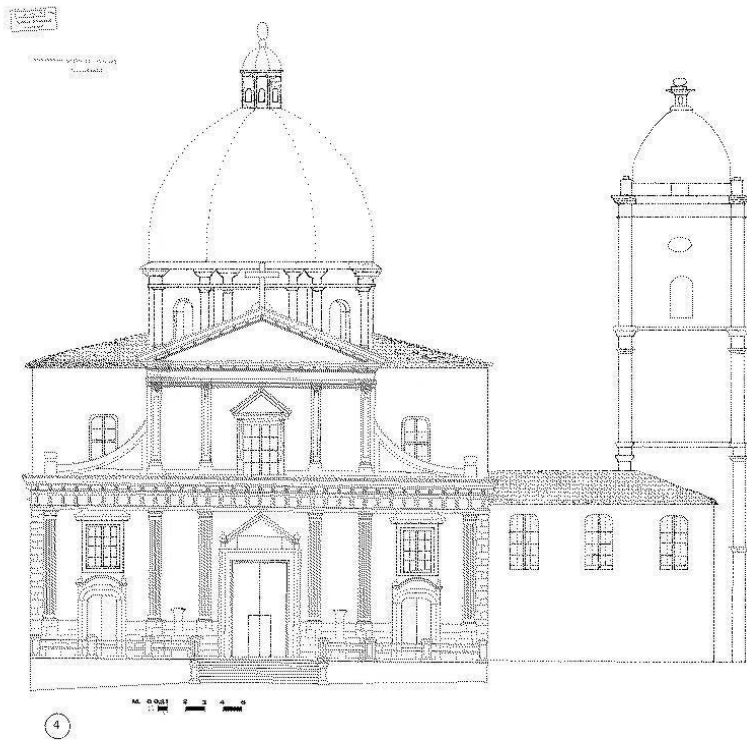


Figura 6. Facciata della chiesa di S. Maria Maddalena.

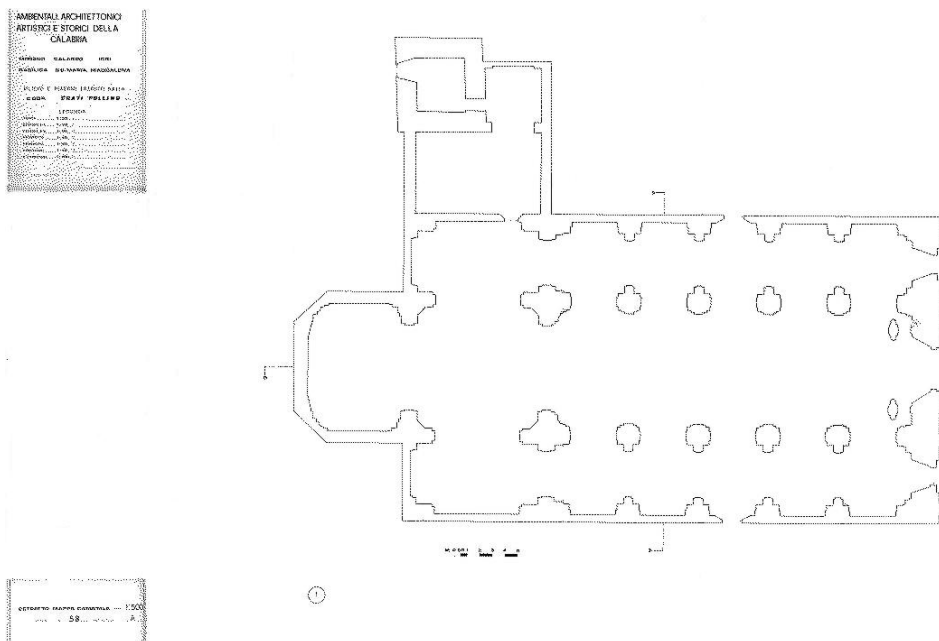


Figura 7. Pianta della chiesa di S. Maria Maddalena.



Figura 8. Vista esterna della cupola e del tamburo.



Figura 9. Vista dell'intradosso della cupola e del tamburo.

Il rilievo del quadro fessurativo presente nel tamburo e nella cupola, fornito dalla Soprintendenza, è stato eseguito nell'ottobre del 2004.

La mancanza di impalcature non ha consentito di eseguire osservazioni ravvicinate e misurazioni delle fessure; il quadro fessurativo riportato in questo lavoro è quindi il risultato di osservazioni solo da terra, da una distanza di circa 25 metri.

Tuttavia, nonostante le approssimazioni sull'entità dell'apertura delle fessure, il rilievo costituisce, dal punto di vista qualitativo, un valido strumento per la conoscenza degli stati di tensione e di deformazione della cupola nello stato attuale. Infatti, l'accordo tra i risultati delle indagini numeriche e il quadro fessurativo delle zone accessibili, consente di ritenere realistici ed attendibili anche i risultati numerici relativi alle zone non accessibili, di cui non è stato effettuato alcun rilievo.

Le superfici ispezionate sono l'intradosso della cupola e del tamburo e l'estradosso del tamburo. Niente si può dire sulle condizioni dell'estradosso della cupola non solo perché non raggiungibile, ma anche perché ricoperto da uno strato di piastrelle in maiolica.

Non è noto neanche il quadro fessurativo del lanternino ottagonale che sormonta la cupola, in quanto esso non è esplorabile dalla quota di calpestio.

Da un primo esame emerge che lo stato di conservazione del tamburo è discreto, mentre la cupola presenta un quadro fessurativo piuttosto esteso, oltre ai segni evidenti di infiltrazioni d'acqua.

L'osservazione dell'intradosso ha messo in evidenza la presenza di due ordini di fessure diversi per andamento e dimensioni (Figure 10, 11, 12 e 13). Un primo ordine di lesioni, che comprende le più ampie tra le fessure presenti, interessa i costoloni di unione delle varie vele. Questo tipo di lesioni si estende dalla sommità del tamburo fino ad oltre metà altezza della cupola. La larghezza delle fessure è massima in corrispondenza della base della cupola e diminuisce andando verso la sommità, le fessure quindi si chiudono lasciando intatta la parte finale dei costoloni.

Un secondo ordine di fessure interessa orizzontalmente le vele nella zona situata al di sopra della metà della cupola. Queste fessure si estendono da un costolone all'altro creando una curva circolare chiusa che interessa pressoché tutta la cupola. L'apertura di tali fessure è molto più modesta rispetto alle precedenti.

Il tamburo si presenta complessivamente in buono stato; il rilievo evidenzia la presenza di poche fessure e di modesta estensione. In particolare le lesioni si trovano alla sommità del tamburo e costituiscono il prolungamento di quelle presenti nella cupola, proseguono per un breve tratto e si arrestano al di sopra delle finestre; da una sommaria osservazione dell'esterno del tamburo, sembra che non siano passanti, cioè che non interessino tutto lo spessore della muratura

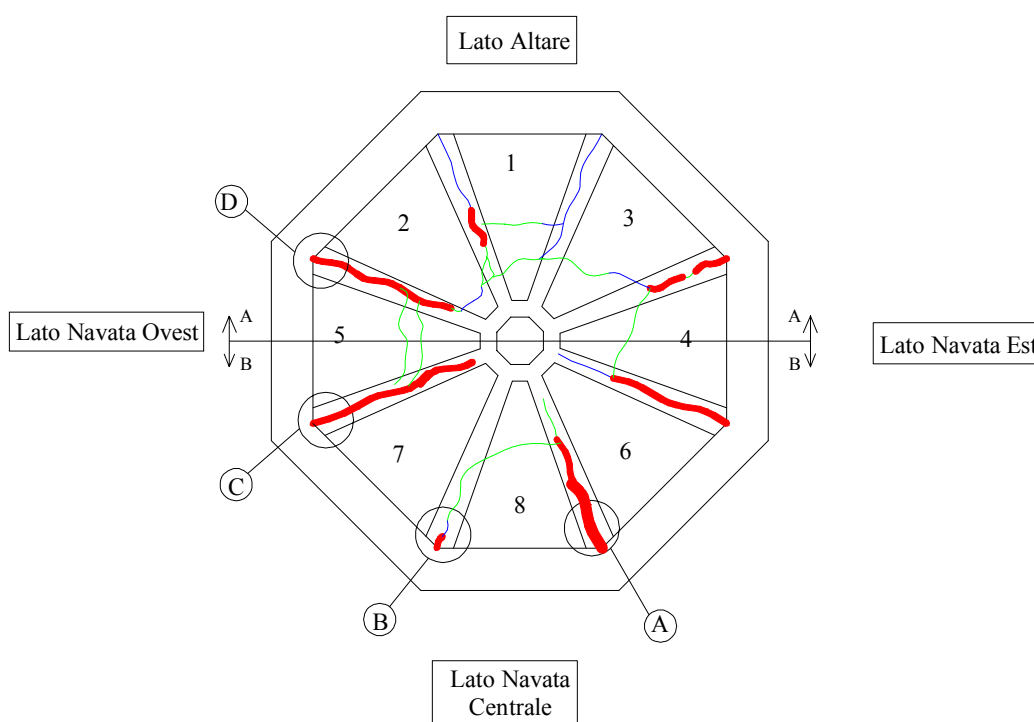


Figura 10. Quadro fessurativo dell'intradosso della cupola.

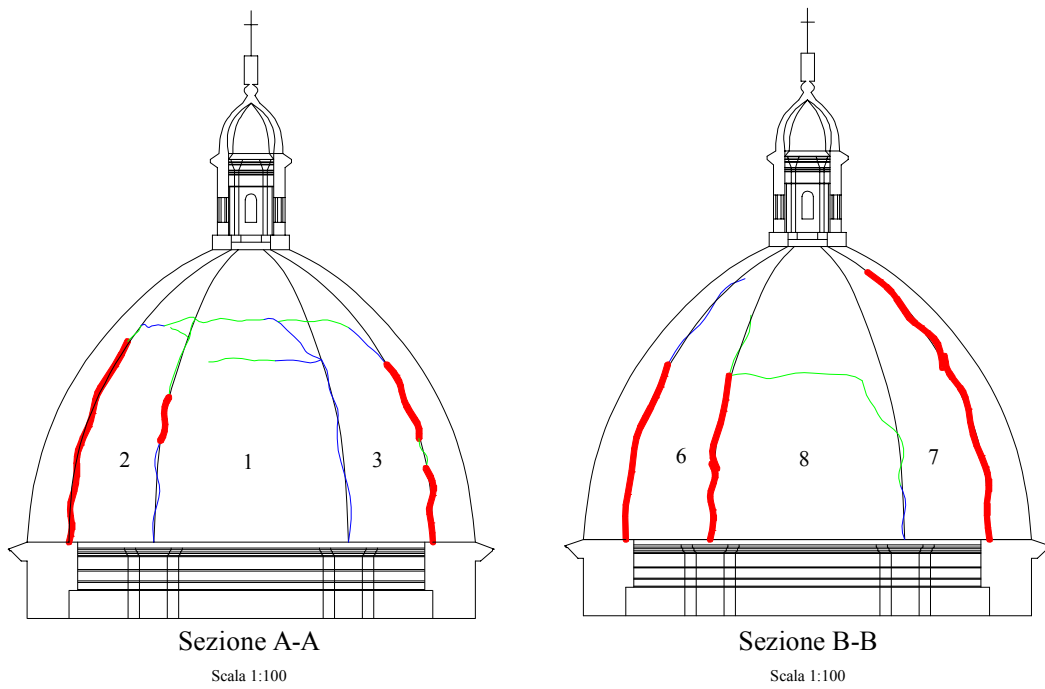


Figura 11. Sezioni A-A e B-B della cupola, quadro fessurativo dell'intradosso.



Figura 12. Vista delle vele 1, 2 e 3.



Figura 13. Vista delle vele 6, 7 e 8.

2.3 Analisi della cupola soggetta al peso proprio

E' stata condotta un'analisi statica della cupola e del tamburo soggetti al solo peso proprio utilizzando il codice agli elementi finiti NOSA. Il tamburo è a pianta ottagonale con diametro di 11 m, altezza di 6.1 m e spessore costante di 1.1 m. Su ogni lato del tamburo è presente una finestra ad arco; alcune di queste risultano attualmente tamponate, ma nel modello sono state considerate tutte aperte, in modo da analizzare la struttura nelle condizioni più sfavorevoli. La cupola ha un diametro di 11 m e un'altezza di 8 m. Lo spessore varia da un massimo di 1.1 m alla base fino ad un minimo di 0.7 m in sommità. La cupola è completata da un lanternino di altezza 3.4 m, diametro di circa 2 m e spessore costante di 0.4 m: l'altezza totale della cupola risulta quindi di 11.4 m. Complessivamente la parte di struttura su cui sono state condotte le analisi ha un'altezza di 17.5 m.

La struttura è stata discretizzata con 5496 elementi "guscio" a otto nodi [41] (Figura 14). In una prima analisi si è considerata la struttura incastrata lungo tutto il contorno inferiore del tamburo, trascurando gli effetti della restante parte della chiesa. Ulteriori analisi sono state condotte per valutare l'effetto di cedimenti sia orizzontali che verticali del tamburo.

Il peso specifico γ della muratura è 20000 N/m^3 , mentre il modulo di Young e il rapporto di Poisson valgono rispettivamente $E = 5000 \text{ MPa}$ e $\nu = 0.1$.

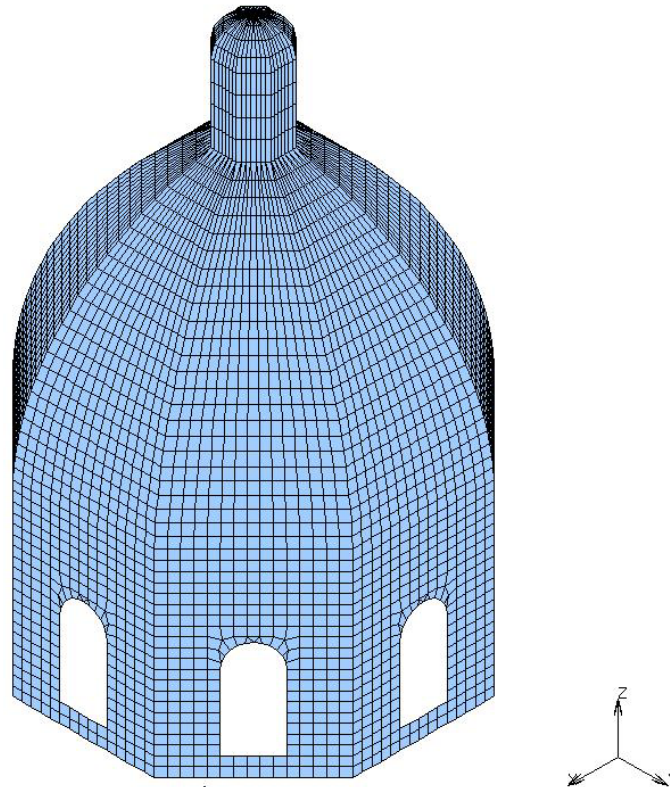


Figura 14. Discretizzazione con elementi finiti della cupola e del tamburo.

I valori massimi degli spostamenti orizzontali sono raggiunti alla base della cupola e valgono circa 1.9 mm. Gli spostamenti in direzione z sono massimi per il lanternino e la sommità della cupola e valgono circa 1.6 mm.

All'intradosso e sulla superficie media si nota che i valori delle tensioni sono piuttosto bassi: le compressioni massime sono di circa 5 daN/cm^2 . Da un semplice calcolo si può quindi ricavare che in tutto l'intradosso la struttura presenta valori di sforzo normale ben al di sotto del limite di resistenza a compressione per una muratura.

Anche all'estradosso i valori ottenuti rimangono modesti: gli sforzi mantengono circa gli stessi valori che hanno negli altri strati. Unica eccezione lo sforzo normale in direzione dei meridiani che presenta picchi di circa -10 daN/cm^2 in corrispondenza degli angoli della base del tamburo. Anche in queste zone tuttavia si rimane ben al di sotto del limite di resistenza a compressione per una muratura.

La superficie delle eccentricità di massimo modulo relativa ad una vela (Figura 15) si discosta dalla superficie media in accordo con il quadro fessurativo osservato sulle vele: sono presenti fessure lungo i paralleli all'intradosso nella parte alta della cupola. Invece nella parte bassa della cupola fa intuire la presenza di fessure lungo i paralleli all'estradosso. Come vedremo in seguito, queste indicazioni sono in accordo con il quadro fessurativo dedotto dall'analisi della deformazione di frattura.

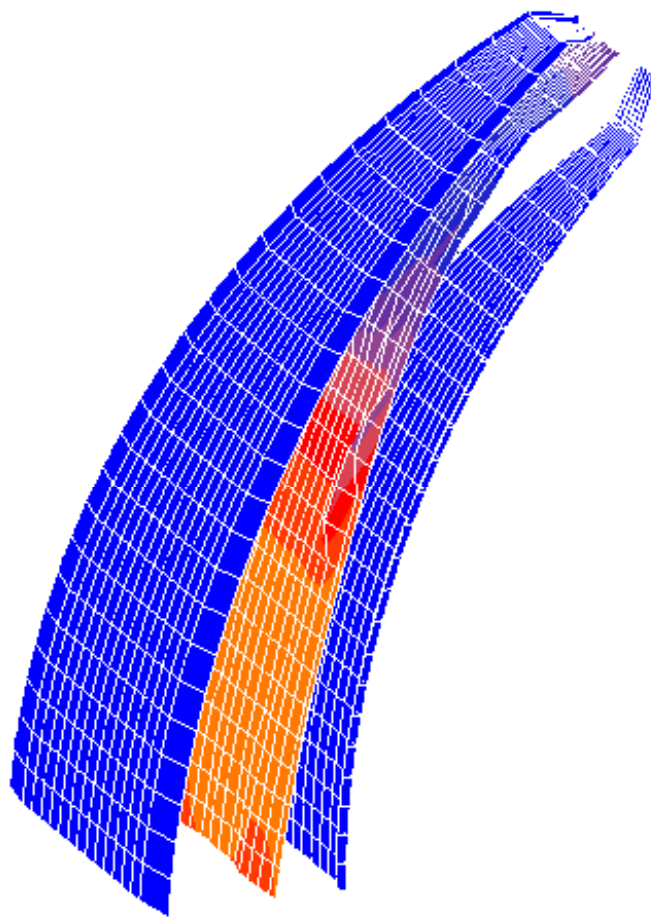


Figura 15. Superficie delle eccentricità di massimo modulo in una vela

Nelle Figure 16 e 17 sono riportate le componenti della deformazione di frattura lungo i paralleli ed i meridiani in corrispondenza dell'intradosso. I valori più alti della deformazione di frattura lungo i paralleli sono raggiunti nei costoloni a partire dalla sommità del tamburo fino ad una certa altezza della cupola. Sono quindi presenti fratture nella direzione dei meridiani, concentrate lungo i costoloni. Queste partono dalla base della cupola, raggiungono una certa quota oltre la quale si richiudono e proseguono al di sotto della cupola, fino alla sommità del tamburo. La deformazione di frattura lungo i meridiani raggiunge i valori massimi nella parte alta della cupola. Nella parte centrale delle vele le fratture, localizzate ad un'altezza di circa 6.90 m dal piano di imposta, hanno un andamento che segue i paralleli e si raccordano ai costoloni distribuendosi in modo da formare approssimativamente una "U" rovesciata, con la concavità rivolta verso la base della cupola. Inoltre i valori numerici delle componenti della deformazione di frattura inducono a ritenere che nella parte superiore della cupola l'ampiezza delle fessure sia minore di quella riscontrata nella zona dei costoloni. Si può concludere che i risultati numerici ottenuti per il peso proprio all'intradosso della cupola sono in buon accordo con l'andamento delle fessure esistenti sulla cupola.

Per quanto riguarda l'estradosso, i risultati numerici suggeriscono la presenza di fratture lungo i costoloni ad una quota più alta rispetto a quelle dell'intradosso. Poco al di sopra della base della cupola, a circa 2 m dal piano di imposta c'è un'altra serie di fratture con un andamento simile a quelle riscontrate nella parte alta dell'intradosso: le fessure seguono i paralleli nella zona centrale di ogni vela, si raccordano quindi in corrispondenza dei costoloni, assumendo un andamento approssimativamente ad "U", ancora con la concavità rivolta verso la base della cupola.

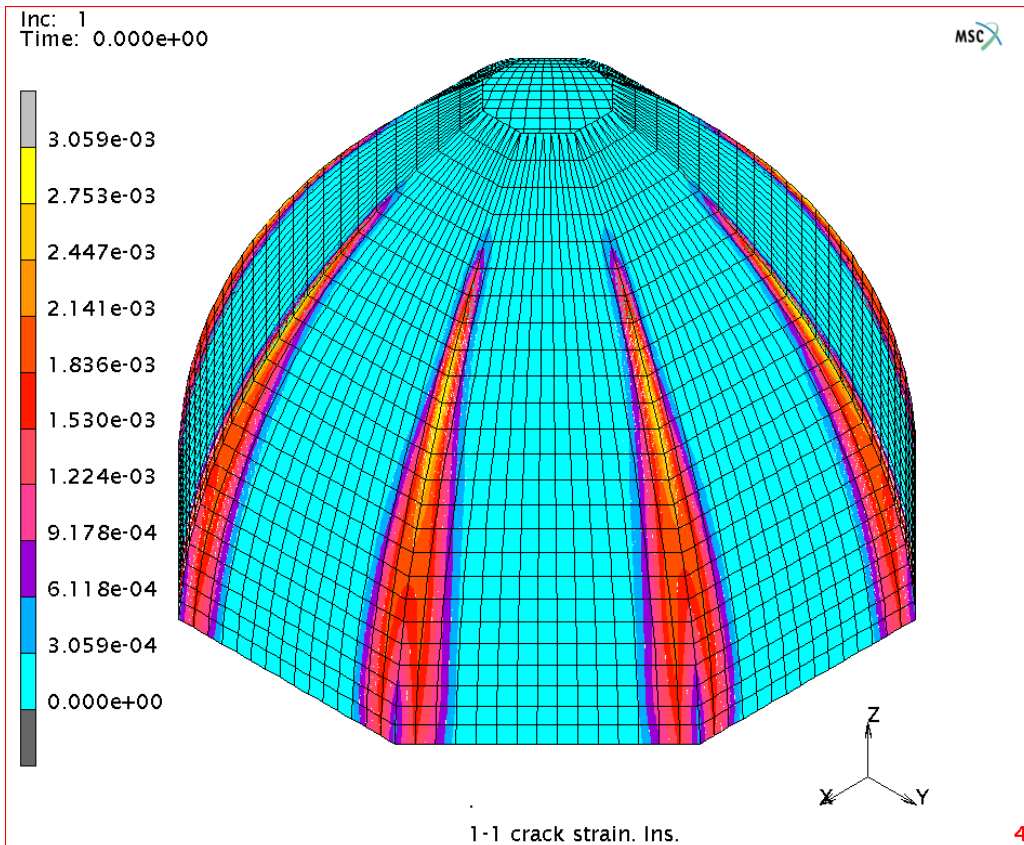


Figura 16. Deformazione di frattura lungo i paralleli (in presenza del peso proprio).

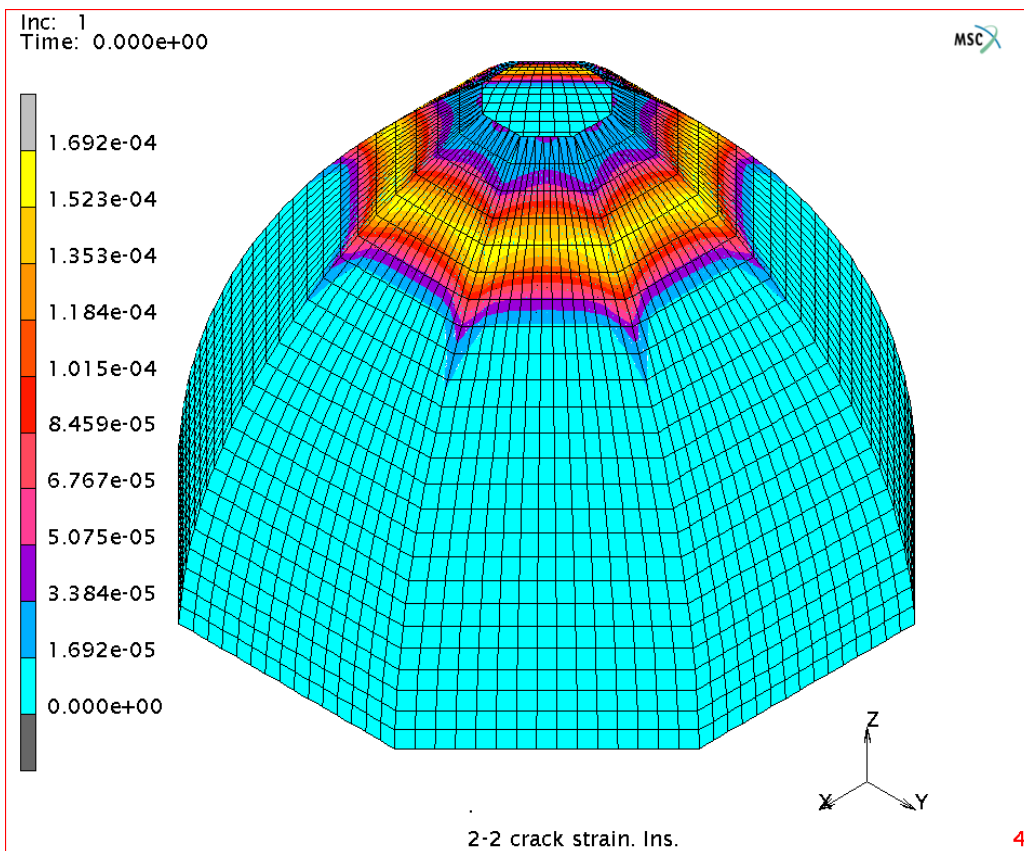


Figura 17. Deformazione di frattura lungo i meridiani (in presenza del peso proprio).

3. PRIMI RISULTATI DELLA VERIFICA NUMERICA DELLA CHIESA ABBAZIALE DI SANTA MARIA DELLA ROCCELLA

3.1 Cenni storici

La chiesa di Santa Maria della Roccella [17 , 51], comunemente denominata “Roccelletta”, è stata costruita nella prima metà del XII secolo, nel periodo di dominazione normanna della Calabria. La chiesa, inizialmente appartenente ad un complesso monastico, è stata utilizzata come luogo di sepoltura in età angioina, come fortezza nel XVI secolo, come ricovero per animali nella seconda metà del XIX secolo e infine come cava di materiali da costruzione nei primi decenni del XX secolo, periodo nel quale l’edificio ha subito operazioni di restauro che lo hanno gravemente alterato pur salvandolo dalla rovina.

Originariamente l’edificio era costituito da un’ampia navata, probabilmente con una copertura piana a capriate lignee, collegata da alcuni gradini al transetto sopraelevato, coperto da volte in muratura. Il presbiterio terminava con un’abside affiancata da due absidi più piccole, parti terminali di due ambienti a pianta quadrata coperti con volte a crociera (Figura 18). Della struttura originaria rimangono oggi una parte dei muri perimetrali della navata e una parte dell’abside (Figure 19 e 20), oggetto del presente studio.

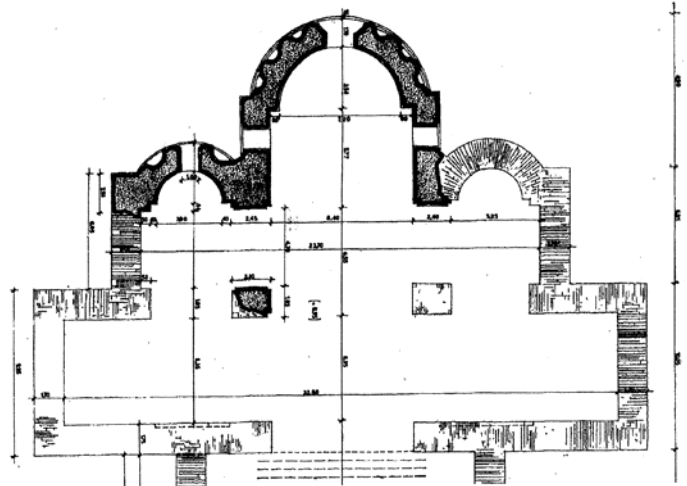


Figura 18. Pianta degli absidi (1:100).



Figura 19. Resti della chiesa di Santa Maria della Roccella (interno).



Figura 20. Resti della chiesa di Santa Maria della Roccella (esterno).

3.2 Analisi della struttura soggetta al peso proprio

E' stata condotta un'analisi statica dei resti dell'abside della chiesa di Santa Maria della Roccella soggetti al solo peso proprio utilizzando il codice agli elementi finiti NOSA. La struttura, incastrata alla base, è stata discretizzata con 16374 elementi "brick" a otto nodi [13] per un totale di 58611 gradi di libertà (Figure 21 e 22).

Il peso specifico γ della muratura è 18000 N/m^3 , mentre il modulo di Young e il rapporto di Poisson valgono rispettivamente $E = 2500 \text{ MPa}$ e $\nu = 0.1$.

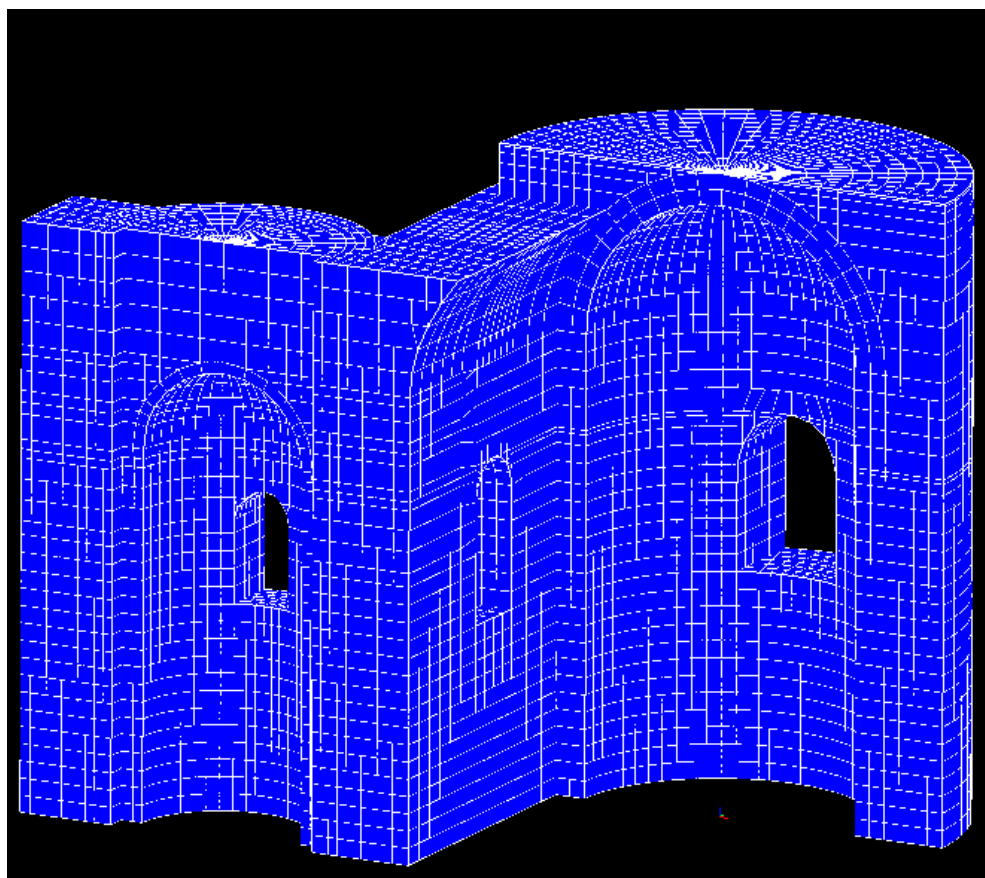


Figura 21. Discretizzazione con elementi finiti della struttura (interno).

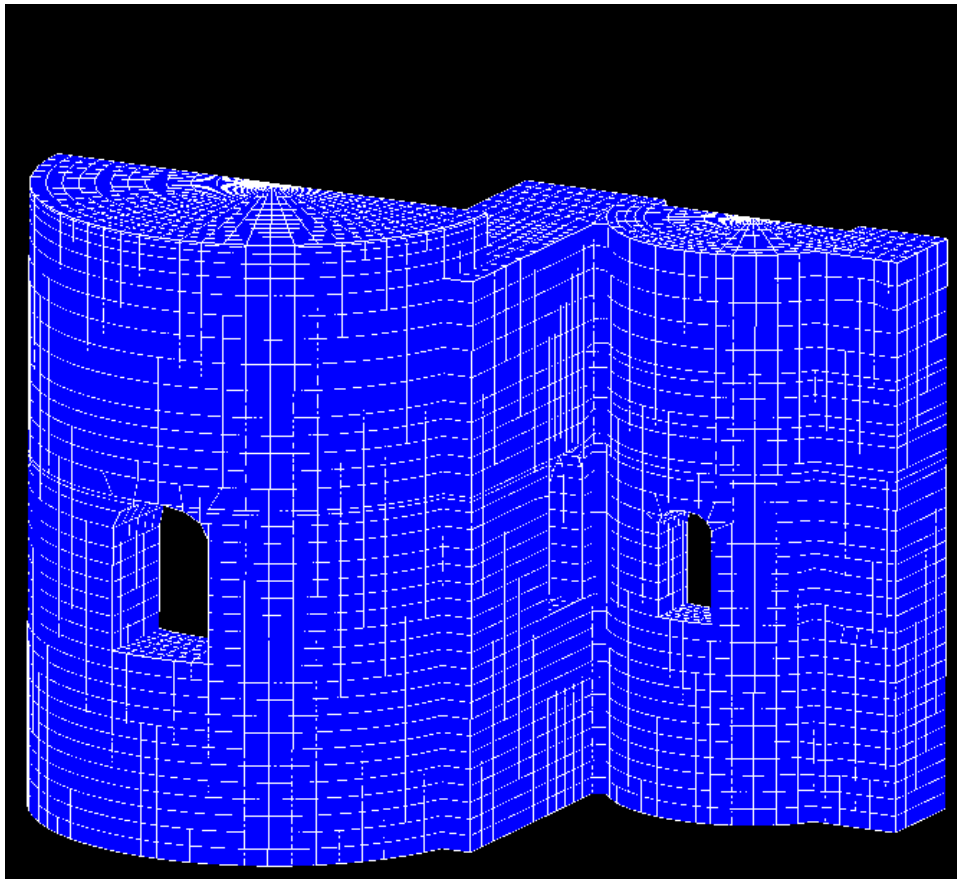


Figura 22. Discretizzazione con elementi finiti della struttura (esterno).

Le componenti del campo di spostamento risultano di modesta entità; il massimo spostamento, inferiore a 3 mm, è raggiunto in prossimità della chiave della cupola maggiore, in direzione verticale. Le componenti normali dello sforzo, il cui andamento è riportato nelle Figure 23, 24 e 25 sono circa 5 daN/cm².

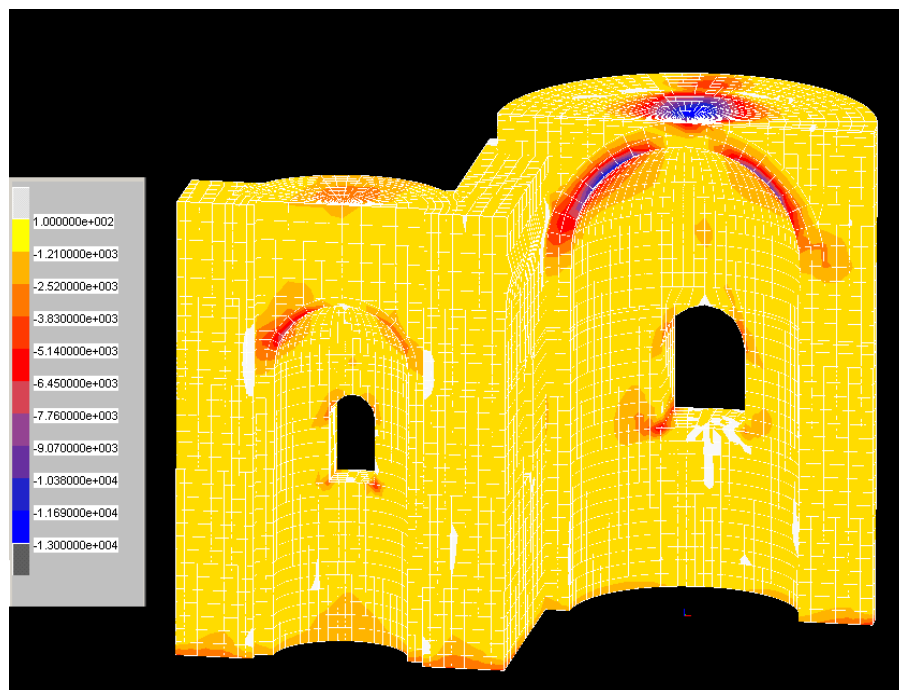


Figura 23. Componente di sforzo σ_x (daN/m²).

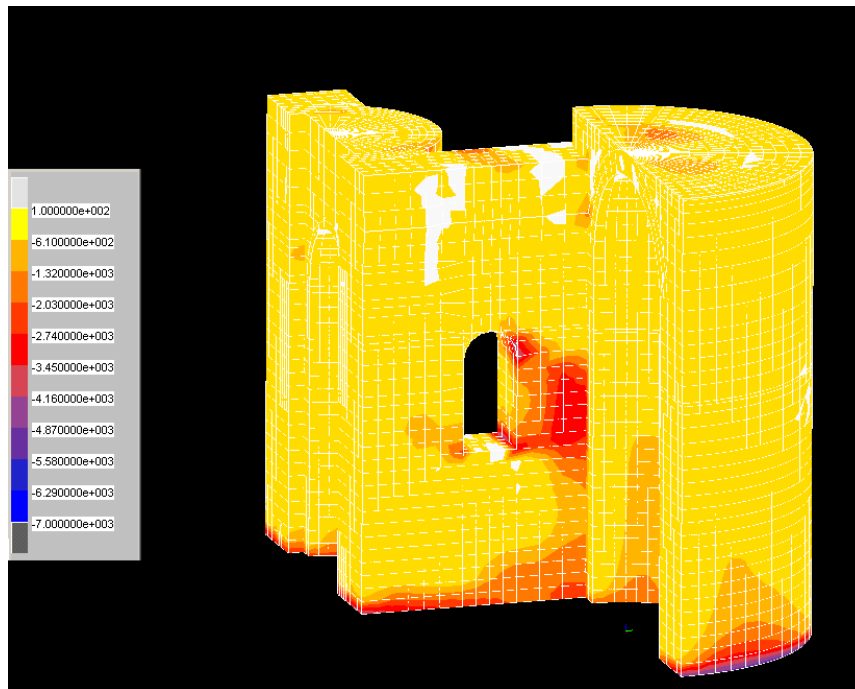


Figura 24. Componente di sforzo σ_y (daN/m²).

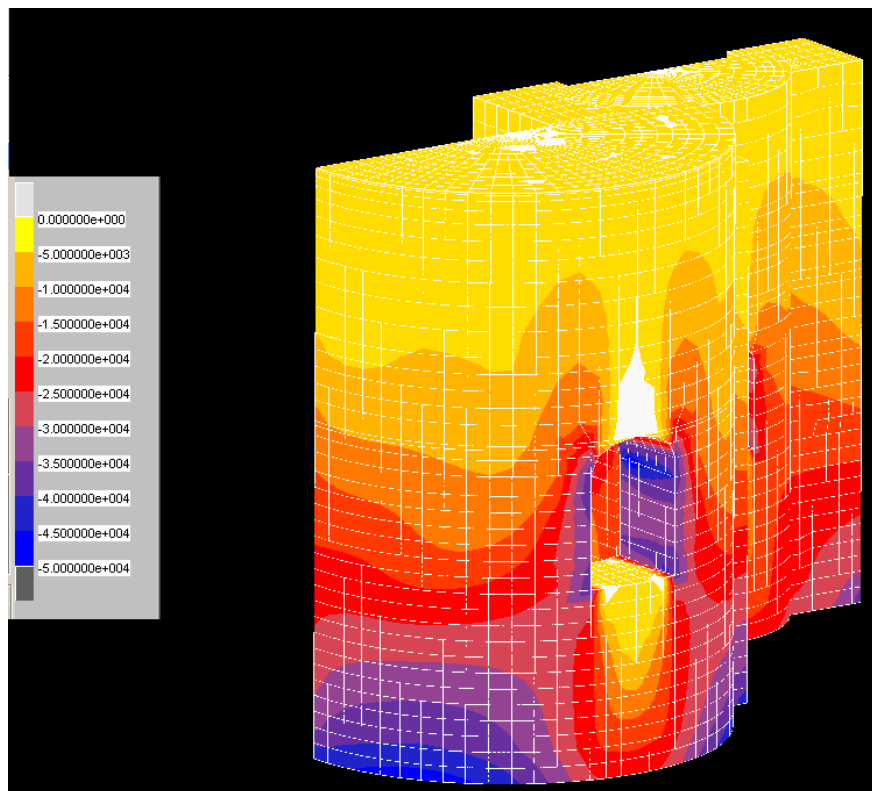


Figura 25. Componente di sforzo σ_z (daN/m²).

Per una migliore valutazione delle condizioni statiche della cupola principale e della sua sicurezza, lo stato di sforzo ottenuto con l'analisi agli elementi finiti è stato utilizzato per determinare le curve delle pressioni per le due sezioni indicate in rosso nelle figure 26 e 27. Esse risultano interamente contenute nello spessore della volta.

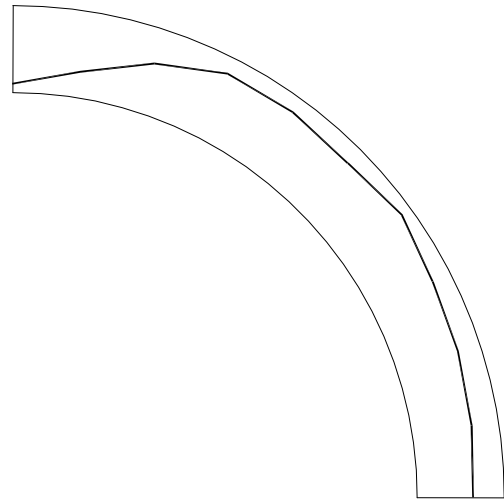
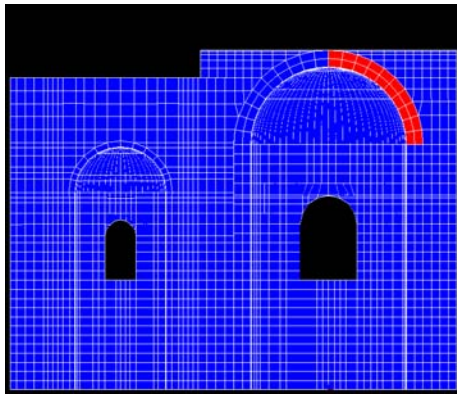


Figura 26. Curva delle pressioni corrispondente alla sezione di cupola evidenziata in rosso.

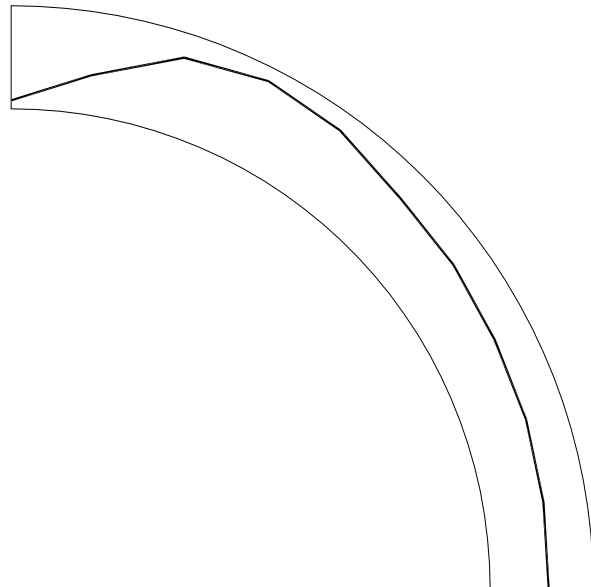
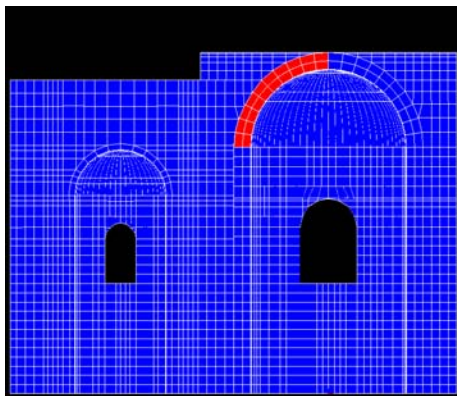


Figura 27. Curva delle pressioni corrispondente alla sezione di cupola evidenziata in rosso.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Alfano G., Rosati L., Valoroso N., A numerical strategy for finite element analysis of no-tension materials. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 48, pp. 317-350, 2000.
2. Bennati S., Lucchesi M., Elementary solutions for equilibrium problems of masonry-like materials. *Unilateral problems in Structural Analysis IV*, (G. Del Piero and F. Maceri Eds), Birkhauser Verlag, Basel pp. 1-16, 1991.
3. Bennati S., Padovani C., Some nonlinear elastic solutions for masonry solids. *Mech. Struct. & Mach.*, vol. 25, pp. 243-266, 1997.
4. Benvenuto E., *An introduction to the history of structural mechanics*, Vol. 1. Springer Verlag 1990.
5. Benvenuto E., *An introduction to the history of structural mechanics*, Vol. 2. Springer Verlag 1991.

6. Bernardeschi K., Martignago F., Padovani C., Pasquinelli G., Secchi S., A new tool for the structural analysis of age-old masonry constructions. Convegno Italian Society for Computer Simulation, Cefalù, 28-29 novembre 2003.
7. Bernardeschi K., Padovani C., Pasquinelli G., Studio del comportamento statico del muro della navata destra della chiesa di San Pietro in Vinculis a Pisa. Bollettino Ingegneri, vol. 8/9, pp. 9-17, 2003.
8. Bernardeschi K., Padovani C., Pasquinelli G., Numerical modelling of the structural behaviour of Buti's bell tower. *Int. J. Cultural Heritage*, vol. 5, pp. 371-378, 2004.
9. Bernardeschi K., Cecati F., Padovani C., Pasquinelli G., Un metodo numerico per l'analisi strutturale di cupole in muratura: la chiesa di S. Maria Maddalena a Morano Calabro. *Atti del Congresso AIMETA*, Firenze, settembre 2005.
10. Castigliano C. A., *Théory sur l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Augusto Federico del Negro, Torino 1879.
11. Como M., Equilibrium and collapse analysis of masonry bodies. *Meccanica* 27, pp. 185-194, 1992.
12. Como M., Grimaldi A., A unilateral model for the limit analysis of masonry walls. In *Unilateral Problems in Structural Analysis*, G. Del Piero and F. Maceri Eds, Springer, 1985.
13. Degl'Innocenti S., Lucchesi M., Padovani C., Pagni A., Pasquinelli G., Zani N., The finite element code NOSA. User's Manual. Internal Report ISTI 06-2007, 2007.
14. Del Piero G., Constitutive equation and compatibility of the external loads for linear elastic masonry-like materials. *Meccanica*, vol. 24, pp. 150-162, 1989.
15. Di Pasquale S., *Statica dei solidi murari: teoria e applicazioni*. Internal Report Dipartimento di Costruzioni, Università di Firenze, 1984.
16. Di Pasquale S., New trends in the analysis of masonry structures. *Meccanica* 27, pp. 173-184, 1992.
17. Fiz A. (a cura di), *Intersezioni Cragg Fabre Paladino al oarco archeologico di Scolacium*. Electa 2005.
18. Genna F., Di Pasqua M., Veroli M. and Ronca P., Numerical analysis of old masonry buildings: a comparison among constitutive models. *Engineering Structures* 20, pp. 37-53, 1998.
19. Giuffrè A., *La meccanica nell'architettura: la statica*. 1982.
20. Heyman J., The stone skeleton. *Int. J. Solids and Structures*, vol. 2, pp. 249-279, 1966.
21. Heyman J., *The Masonry Arch*. J. Wiley & Sons, 1982.
22. Hooke R., *A description of helioscopes, and some other instruments*. London 1676.
23. Kooharian A., Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches. *J. Am. Concrete Inst.*, 49, pp. 317-328, 1952.
24. Livesley R. K., Limit analysis of structures formed from rigid blocks. *International Journal Numerical Methods in Engineering*, 12, pp. 1853-1871, 1978.
25. Livesley R. K., A computational model for the limit analysis of three-dimensional masonry structures. *Meccanica* 27, pp. 161-172, 1992.
26. Lourenço P. B., Rots J. G., Multisurface interface model for analysis of masonry structures. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 123(7), pp. 660-668, July 1997.
27. Lourenço P. B., Rots J. G., Blaauwendraad J., Continuum model for masonry: parameter estimation and validation. *Journal of Structural Engineering*, ASCE 124(6), pp. 642-652, 1998.
28. Lucchesi M., De Falco A., Zani N., Studio del comportamento statico dell'arco scenico del Teatro Goldoni di Livorno. *Relazione Tecnica Consorzio Pisa Ricerche*, 20/05/1998.
29. Lucchesi M., Padovani C., Pagni A., A numerical method for solving equilibrium problems of masonry-like solids. *Meccanica*, vol. 29, pp. 175-193, 1994.

30. Lucchesi M., Padovani C., Pasquinelli G., On the numerical solution of equilibrium problems for elastic solids with bounded tensile strength. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 127, pp. 37-56, 1995.
31. Lucchesi M., Padovani C., Pasquinelli G., Thermodynamics of no-tension materials. *Int. J. Solids and Structures*, 37, pp. 6581-6604, 2000.
32. Lucchesi M., Padovani C., Pasquinelli G., Zani N., On the collapse of masonry arches. *Meccanica*, 32, pp. 327-346, 1997.
33. Lucchesi M., Padovani C., Pasquinelli G., Zani N., The maximum modulus eccentricity surface for masonry vaults and limit analysis. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 4, pp. 71-87, 1999.
34. Lucchesi M., Padovani C., Pasquinelli G., Zani N., Static analysis of masonry vaults, constitutive model and numerical analysis. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2(2), pp. 211-244, 2007.
35. Lucchesi M., Padovani C., Zani N., Masonry-like solids with bounded compressive strength. *Int. J. Solids and Structures*, vol. 33, pp. 1961-1994, 1996.
36. Lucchesi M., Padovani C., Zani N., Studio del comportamento statico di alcuni elementi strutturali della Chiesa Madre di S. Nicolò di Noto. *Relazione Tecnica Consorzio Pisa Ricerche*, 09/03/1998.
37. Lucchesi M., Zani N., Analisi sismica di tipo statico dell'arsenale mediceo situato in Pisa, lungarno Simonelli. *Relazione Tecnica Consorzio Pisa Ricerche*, 12/11/1996.
38. Lucchesi M., Zani N., Some explicit solution to plane equilibrium problem for no-tension bodies. *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 16, pp. 295-316, 2003.
39. Luciano R., Sacco E. Homogenization techniques and damage model for old masonry material. *Int. J. Solids and Structures* 33, pp. 3191-3208, 1997.
40. Maier G., Nappi A., Papa E., Damage models for masonry as a composite material: a numerical and experimental analysis. *Constitutive Laws for Engineering Materials*, Desai CS (ed.) ASME Press, New York, pp. 427-432, 1992.
41. Nagtegaal J. C., Slater I. G., A simple nonconforming thin shell based on discrete Kirchhoff theory. *Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells*, AMD, vol. 48 ASME, 1981.
42. Orduna A., Lourenço P. B., Cap model for limit analysis and strengthening of masonry structures. *Journal of Structural Engineering*, ASCE pp. 1367-1375, October 2003.
43. Panzeca T., Polizzotto C., Constitutive equations for no-tension materials. *Meccanica*, vol. 23, pp. , 1988.
44. Poleni G., Memorie storiche della gran cupola del Tempio Vaticano. Padua 1748.
45. Romano G., Romano M., Sulla soluzione di problemi strutturali in presenza di legami costitutivi unilaterali. *Rend. Accad. Naz. Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie VII*, vol. LXVII, pp. , 1979.
46. Romano G., Sacco E., Sul calcolo di strutture non reagenti a trazione. *Atti VII Congr. Naz. AIMETA, Trieste*, 1984.
47. Romano G., Sacco E., Sulla proprietà di coassialità del tensore di fessurazione. *Atti Ist. Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Napoli*, n. 351, 1984.
48. Sacco E., Modellazione e calcolo di strutture in materiale non resistente a trazione. *Rend. Mat. Acc. Lincei*, s. 9, vol. 1, pp. 235-258, 1990.
49. Signorini A., Un teorema di esistenza e unicità nello studio dei materiali poco resistenti a trazione. *Rend. Accad. Naz. Lincei*, vol. 2, pp. 401-406, 1925.
50. Signorini A., Sulla pressoflessione delle murature. *Rend. Accad. Naz. Lincei*, vol. 2, pp. 484-489, 1925.
51. Spadea R. (a cura di), *Scolacium una città romana in Calabria – il museo e il parco archeologico*. Edizioni ET, Milano 2005.
52. Theodossopoulos D., Sinha B. P., Usmani A. S., Macdonald AS. J., Assessment of the structural response of masonry cross vaults. *Strain* 38, pp. 119-127, 2002.

53. Trovalusci P., Masiani R., A multifield model for blocky materials based on multiscale description. *Int. J. Solids and Structures* 42, pp. 5778-5794, 2005.

MASSIMILIANO LUCCHESI: massimiliano.lucchesi@unifi.it

Dipartimento di Costruzioni, Università di Firenze, Piazza Brunelleschi 6, 50121 Firenze

CRISTINAPADOVANI: cristina.padovani@isti.cnr.it

Istituto di Scienza e Tecnologie dell'Informazione "Alessandro Faedo", ISTI-CNR, Via G. Moruzzi 1. 56124 Pisa

NICOLA ZANI: Nicola.zani@unifi.it

Dipartimento di Costruzioni, Università di Firenze, Piazza Brunelleschi 6, 50121 Firenze