Consiglio Nazionale delle Ricerche

ISTITUTO DI ELABORAZIONE DELLA INFORMAZIONE

PISA

LA RICERCA DEL CAMMINO MINIMO NEI GRAFI DI GRANDI DIMENSIONI E 'DEBOLMENTE' CONNESSI

M. Mercatanti   G. Bastianini

Nota Interna B78-12
Aprile 1978

LA RICERCA DEL CAMMINO MINIMO NEI GRAFI DI GRANDI DIMENSIONI E 'DEBOLMENTE' CONNESSI

M. Mercatanti , G.Bastianini

RIASSUNTO

La ricerca ricorrente dei cammini minimi fra due vertici, in un grafo di grandi dimensioni e debolmente connesso, implica tempi lunghissimi di esecuzione o, in alternativa, un esorbitante impegno di memoria, se tutti i possibili cammini sono preventivamente calcolati e utilizzati di volta in volta.

Il procedimento di calcolo, di cui si tratta, rende possibile una sensibile economia di tempo, o di memoria, rispettivamente, nell'uno o nell'altro caso. Esso presuppone il preventivo riconoscimento nel grafo di parti 'debolmente' connesse fra loro (per es. grafi rappresentativi di aeroporti, di reti ferroviarie internazionali, ecc.) e la loro suddivisione in sottografi .

Il procedimento prevede una ridistribuzione dei vertici e degli spigoli in modo tale che i "sottografi" acquisiscano la proprietà che i cammini minimi fra i vertici di ognuno siano minimi in assoluto, cioè coincidano con i cammini minimi calcolati nell'intero grafo.

Il calcolo dei cammini minimi fra due vertici qualsiasi risulta più rapido per le proprietà che conseguono dalla suddivisione del grafo nei "sottografi" sopra specificati.

I.E.I.-C.N.R. - Pisa

R.O.P.E. - Pisa

1. POSIZIONE DEL PROBLEMA

Com'é noto gli algoritmi che risolvono il problema della ricerca del cammino minimo fra due vertici di un grafo, implicano un numero di operazioni che cresce in ragione del quadrato della dimensione della matrice delle distanze .

Se tale dimensione é elevata e la ricerca dei cammini é ricorrente, il procedimento può non essere applicabile a causa degli elevati tempi di elaborazione, né può essere di pratica attuazione calcolare preventivamente l'insieme dei cammini minimi, fra tutte le possibili coppie di vertici del grafo, a causa dell'esorbitante volume dei risultati.

Il metodo che proponiamo consente una notevole economia del tempo di elaborazione, nel primo caso, o dell'area di memoria, nel secondo, purché il grafo, come si é detto, sia di notevoli dimensioni e sia 'debolmente' connesso.

Presupponiamo inoltre, che il grafo G sia preventivamente suddiviso in un certo numero di sottografi , cioé detto $G = (V,U)$ il grafo in argomento , dove $V = \left\{ v_i \right\}_{i=1,2,\dots,n_h}$ é un insieme finito di vertici e $U = \left\{ (v_i , v_j)_{i \neq j} \right\} \subset V \times V$ é l'insieme degli spigoli di G . Supponiamo che G sia suddiviso in un certo numero di sottografi :

$$G_h^+ = (V_h^+ , U_h^+)_{h=1,2,\dots,m}$$

dove $V_h^+ \subset V$ e $U_h^+ \subset U$.

Convertiamo i sottografi G_h^+ in "subgrafi" $G_h = (V_h , U_h)$, dove U_h é l'insieme degli spigoli di G che compongono i cammini minimi fra le coppie dei vertici di V_h^+ , e V_h é l'insieme dei vertici degli spigoli di U_h .

Quindi due subgrafi G_h e G_{h+1} , tali che $V_{h,h+1} = V_h \cap V_{h+1} \neq \phi$, hanno in comune anche l'insieme $U_h \cap U_{h+1}$ degli spigoli che appartengono ai cammini minimi fra due qualsiasi vertici di $V_{h,h+1}$.

Essendo il criterio di suddivisione di G, nei G_h , tale che i G_h ,adiacenti gli uni agli altri ,non formino mai un ciclo (disposizione ad albero), allora un cammino fra due vertici appartenenti a subgrafi diversi, definisce in modo univoco una sequenza di subgrafi . Per ogni G_h , nota la matrice nodi-nodi $C_h = (C_{hij})_{\; i,j=1,2,\ldots,m_h}$ e le grandezze z_{hij} associate agli spigoli, si definisce la matrice $D_h = (d_{hij})$ delle distanze :

$$d_{hij} = \begin{cases} z_{hij} & \text{se } c_{hij} = 1 \\ 0 & \text{per ogni } i = j \\ \infty & \text{se } c_{hij} = 0 \end{cases}$$

Per ogni h=1,2,...,m ,si calcolano in D_h le distanze minime fra le coppie di vertici (v_{hi} , v_{hj}) di G_h (vedere Appendice B) ed i relativi cammini S_{hij} .

2. PROCEDURA DI CALCOLO DEI CAMMINI MINIMI

La procedura di calcolo si suddivide in quattro parti distinte a seconda dell'appartenenza dei vertici di inizio e termine, v_i e v_j ad uno stesso subgrafo, e del numero y di subgrafi intermedi a quelli che contengono v_i e v_j .

1) $v_i, v_j \in V_h$ $\qquad y=0$

Il problema é già risolto ,essendo noti per G_h tutti i cammini minimi fra i vertici ,quindi anche S_{hij} .

2) $v_i \in V_{h_1}$, $v_j \in V_{h_2}$ $\qquad y=0$

Essendo noti i cammini $S_{h_1,i,k}$ e $S_{h_2,j,k}$,$v_k \in V_{h_1,h_2}$ il procedimento di risoluzione consiste nella ricerca di un

$v_{\tilde{k}} \in V_{h_1,h_2}$ tale che la somma delle lunghezze $d_{h_1,i,\tilde{k}}$ e $d_{h_2,j,\tilde{k}}$, dei cammini minimi $S_{h_1,i,\tilde{k}}$ e $S_{h_2,j,\tilde{k}}$ sia minima .

Il numero dei confronti necessari é card(V_{h_1,h_2}) .

3) $v_i \in V_{h_1}$, $v_j \in V_{h_2}$, $y=1$

Sia G_{h_3} il subgrafo intermedio ;per semplicità di scrittura rinominiamo gli indici h_1, h_3, h_2, rispettivamente in $h, h+1, h+2$.

Note le distanze minime $d_{h,i,u(h)}$, $v_{u(h)} \in V_{h,h+1}$ e $d_{h+2,j,u(h+1)}$, $v_{u(h+1)} \in V_{h+1,h+2}$, oltre alla matrice D_{h+1} , il nostro problema si trasforma in quello di trovare i cammini minimi fra i vertici di $V_{h,h+1}$ e $V_{h+1,h+2}$, riportando in D_{h+1} rispettivamente $d_{h,i,u(h)}$ e $d_{h+2,j,u(h+1)}$.

Posto :

$$U^*_h = \{u(h) \mid v_{u(h)} \in V_{h,h+1}\} \qquad \text{e}$$

$$U^*_{h+1} = \{u(h+1) \mid v_{u(h+1)} \in V_{h+1,h+2}\}$$

per ogni $u(h) \in U^*_h$ e $u(h+1) \in U^*_{h+1}$:

$$d^*_{h+1,u(h),u(h+1)} = d_{h+1,u(h),u(h+1)} + d_{h,i,u(h)} + d_{h+2,j,u(h+1)}$$

La lunghezza del cammino minimo S_f , fra il vertice v_i di G_h ed il vertice v_j di G_{h+2} é :

$$d^*_{h+1,\tilde{u}(h),\tilde{u}(h+1)} = \min_{\substack{u(h)\in U^*_h \\ u(h+1)\in U^*_{h+1}}} \left(d^*_{h+1,u(h),u(h+1)} \right) ,$$

e S_f :

$$S_f = S_{h,i,\tilde{u}(h)} , S_{h+1,\tilde{u}(h),\tilde{u}(h+1)} , S_{h+2,j,\tilde{u}(h+1)}$$

4) $v_i \in V_{h_1}$, $v_j \in V_{h_2}$, $y > 1$

Sia $G_{h_{k_1}}$, $G_{h_{k_2}}$,..., $G_{h_{k_y}}$ una sequenza di subgrafi intermedi fra G_{h_1} e G_{h_2} ; analogamente al caso 3) rinominiamo gli indici h_1 , h_{k_1} , h_{k_2} ,..., h_{k_y} , h_2 in $h, h+1, \ldots, h+y+1$.

Il procedimento di risoluzione é riconducibile al caso 3) ove si sostituiscano i subgrafi G_{h+1}, $G_{h+2}, \ldots, G_{h+y}$ con un unico subgrafo $G_{h+1,h+2,\ldots,h+y}$, cioé si calcolino i cammini minimi fra i vertici di $V_{h,h+1}$ e quelli di $V_{h+y,h+y+1}$.

Data la disposizione di G_{h+1}, $G_{h+2}, \ldots, G_{h+y}$, i cammini minimi passano per i vertici di $V_{h+1,h+2}$, $V_{h+2,h+3}, \ldots, V_{h+y-1,h+y}$ per cui, in generale, la distanza minima nel grafo $G_{k,k+1}$, composto da G_k e G_{k+1}, per ogni coppia di vertici $(v_{u(k-1)}, v_{u(k+1)})$ $v_{u(k-1)} \in V_{k-1,k}$, $v_{u(k+1)} \in V_{k+1,k+2}$ é data dalla somma minima delle lunghezze dei cammini minimi $[v_{u(k-1)}, v_{\tilde{u}(k)}]$ e $[v_{\tilde{u}(k)}, v_{u(k+1)}]$ per un certo vertice $v_{\tilde{u}(k)} \in V_{k,k+1}$.

Pertanto, per $k = h+1, h+2, \ldots, h+y$, si calcolano i cammini minimi fra i vertici $V_{h,h+1}$ e $V_{h+y,h+y+1}$ e, conseguentemente, i cammini minimi parziali si compongono in un unico insieme $S_{h+1,u(h),u(h+y)}$ di cammini minimi del grafo $G_{h+1,h+2,\ldots,h+y}$, cioé per ogni coppia di vertici $\left(v_{u(h)}, v_{u(h+y)}\right)$, $v_{u(h)} \in V_{h,h+1}$ $v_{u(h+y)} \in V_{h+y,h+y+1}$:

$$S_{h+1,u(h),u(h+y)} = S_{h+1,u(h),\tilde{u}(h+1)}, S_{h+2,\tilde{u}(h+1),\tilde{u}(h+2)}, \ldots$$
$$\ldots, S_{h+y,\tilde{u}(h+y-1),u(h+y)}$$

Noto l'insieme $S_{h+1,u(h),u(h+y)}$ e le relative grandezze, si esegue la parte 3) .

CONCLUSIONI

Tale procedimento non é generalizzabile dato che nella teoria dei grafi non vi sono metodi di suddivisione di un grafo qualsiasi in sottografi.

Tale suddivisione dovrà essere eseguita caso per caso prima dell'applicazione del procedimento di calcolo.

A titolo di esempio consideriamo il caso di un grafo di 300 vertici ;le dimensioni della matrice di tutti i possibili cammini ,supponendo che il cammino massimo sia al più di 50 spigoli, sono 300x300x50 .

Scomponendo il grafo in cinque sottografi ,si hanno cinque matrici le cui dimensioni sono 60x60x10 .

Supponendo che l'informazione elementare sia di 2 byte , l'impegno di memoria nel primo caso é di 9 milioni di byte e di 360.000 byte , nel secondo ; analoghe sono le considerazioni riguardanti il numero delle operazioni necessarie per ricercare i cammini minimi.

A P P E N D I C E   B

La ricerca del cammino minimo con l'algoritmo di R.W. Floyd.

Consideriamo il grafo $G = (V,U)$ dove $V = \{P_i\}_{i = 1,2,\ldots,n}$ è l'insieme dei vertici e $U = \{[P_i,P_j]\}$, l'insieme degli spigoli. Sia $C = (C_{ij})$ la matrice delle distanze tra i nodi adiacenti P_i e P_j il cui generico elemento è:

$$C_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{se i vertici } P_i \text{ e } P_j \text{ sono connessi} \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove δ_{ij} è la lunghezza dello spigolo $[P_i,P_j]$.
Sia $D = (d_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n dove:

$$d_{ij} = \begin{cases} [P_i, P_j] & \text{se } p_i \text{ e } p_j \text{ sono connessi} \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'algoritmo consiste dei seguenti passi:

PASSO 1 - Per ogni $i = 1,2,\ldots,n$ si esegue il passo 2

PASSO 2 - Per ogni $v,w = 1,2,\ldots,n$ $v \neq w$ e $v,w \neq i$, si sostituisce C_{vw} con $C_{vi} + C_{iw}$ se e solo se $C_{vw} > C_{vi} + C_{iw}$.

Nella matrice D si sostituisce l'elemento di posto (v,w) con il cammino composto dai cammini precedentemente trovati per (v,i) e (i,w).

BIBLIOGRAFIA

1 - L. R. Ford, D. R. Fulkerson - Flows in Network
Princeton 1967

2 - P. Manca - Elementi della Teoria dei Grafi e applicazioni alla Ricerca Operativa
Editrice Tecnico Scientifica 1970

3 - R. S. Garfinkel, G. L. Nemhauser - Integer Programming
J. Wiley 1972

4 - J. C. Picard, H. D. Ratliff - A graph-theoretic equivalence for integer programming
Op. Res. 1973, Vol. 21, n. 1

5 - T. C. Hu - Integer Programming and Network Flows
Addison 1970

6 - R. E. Gomory, T. C. Hu - Multiterminal Network Flows
J.S.I.A.M., Vol. 9, n. 1