

Consiglio Nazionale delle Ricerche

ISTITUTO DI ELABORAZIONE
DELLA INFORMAZIONE

Pisa

collaborazione scientifica
IEI-AERITALIA
Controllo del movimento del
braccio meccanico del robot
IRB 2000

Edoardo Bozzi Massimo Chimenti

Nota Tecnica B4-05-feb.91

Collaborazione scientifica IEI-AERITALIA

**CONTROLLO DEL MOVIMENTO DEL BRACCIO MECCANICO DEL ROBOT
IRB 2000**

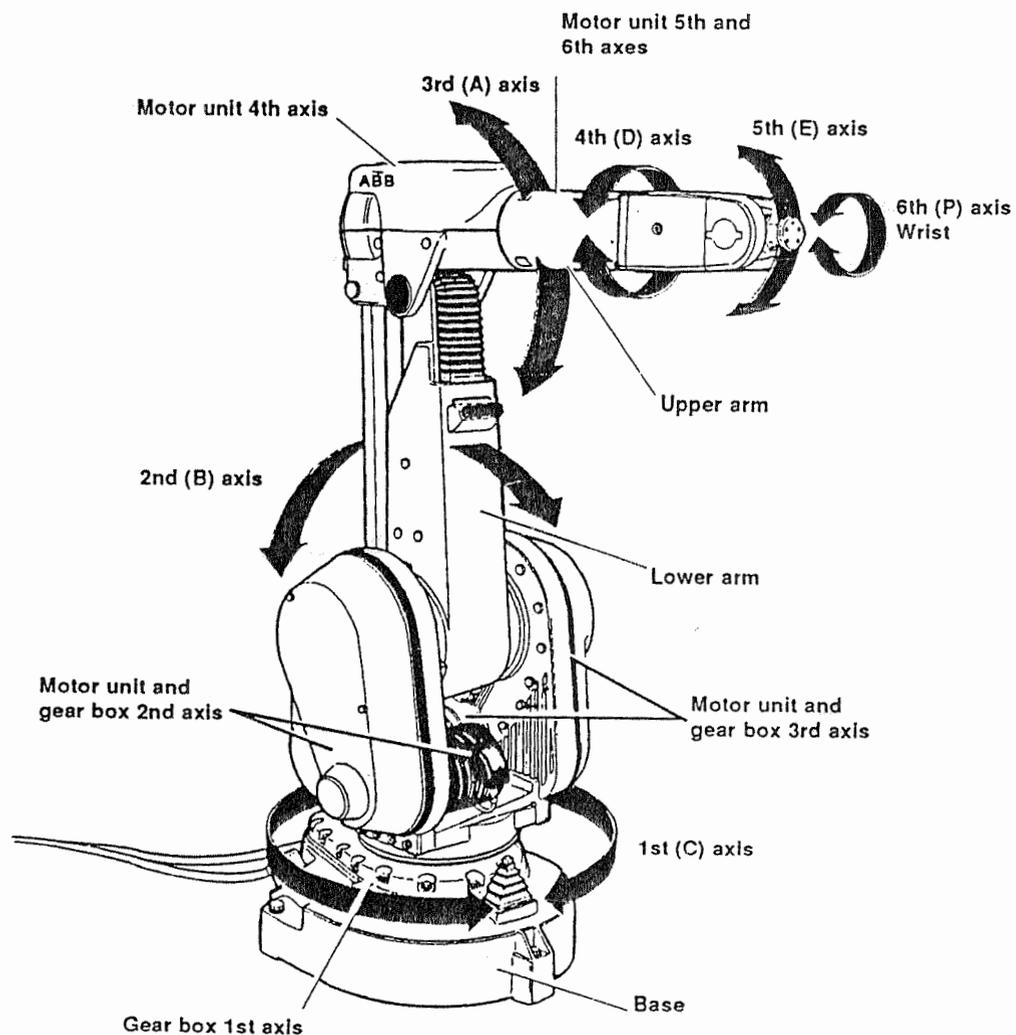
Edoardo Bozzi, Massimo Chimenti,

INDICE

Determinazione dell'orientamento della sonda	pag.2
Definizioni generali relative ai quaternioni	pag.6
Esempi di rotazioni mediante istruzioni con valori di quaternioni	pag.10
Espressione dei quaternioni in funzione dei coseni direttori	pag.16
Definizioni generali relative agli angoli di Eulero	pag.18
Esempi di rotazioni mediante istruzioni con valori di angoli di Eulero	pag.21
Espressione degli angoli di Eulero in funzione dei coseni direttori	pag.24
Trasformazione da angoli di Eulero a quaternioni	pag.26
Uso dell'istruzione TCP	pag.27
Riepilogo delle istruzioni di posizione	pag.29

1 Determinazione dell'orientamento della sonda

I movimenti del braccio meccanico del robot IRB 2000 sono ottenuti mediante rotazioni dei sei assi mostrati in fig.1.

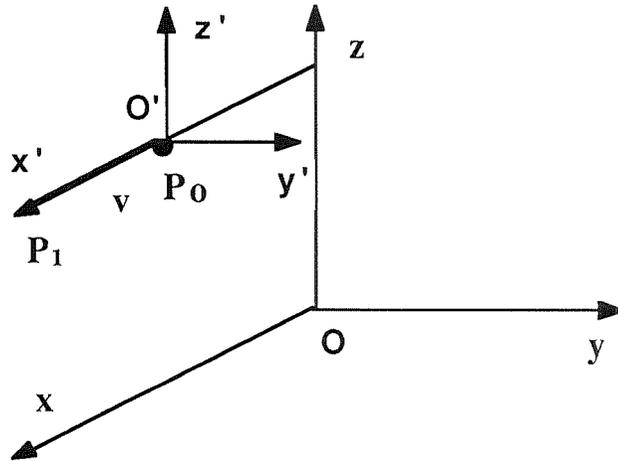


-Figura 1 Movimenti del braccio meccanico

- Asse 1 - rotazione dell'intero braccio da $+179^\circ$ a -179°
- Asse 2 - rotazione del braccio inferiore da $+100^\circ$ a -110°
- Asse 3 - rotazione del braccio superiore da $+60^\circ$ a -60°
- Asse 4 - rotazione del polso da $+200^\circ$ a -200°
- Asse 5 - rotazione del polso da $+120^\circ$ a -120°
- Asse 6 - rotazione della flangia da $+200^\circ$ a -200° .

Tabella I Gradi di libertà del robot IRB 2000

La figura 2 mostra i sistemi di riferimento impiegati per la misura delle coordinate spaziali e degli orientamenti: si ha un sistema fisso $Oxyz$ (Base Coordinate System), e un sistema di mobile $Ox'y'z'$ (Hand Coordinate System); l'asse z di $Oxyz$ coincide con l'asse 1 del robot, l'origine di $Ox'y'z'$ coincide col centro della flangia P_0 mentre la sonda è rappresentabile mediante un vettore v sull'asse x' , di estremi P_0 e P_1 .



- Figura 2 Sistemi di riferimento e notazioni usate nel testo.

Mediante il comando di sincronizzazione l'angolo di rotazione di ciascun asse viene portato a zero. Nella posizione di reset le coordinate di P_0 valgono $x_0=950$, $y_0=0$, $z_0=1585$ e i sistemi $Oxyz$ e $Ox'y'z'$ hanno gli assi paralleli e concordi.

Per compiere la scansione di un campione si deve controllare il movimento del robot orientando in maniera opportuna la sonda e portandola nella posizione corretta: il movimento complessivo consiste in una rotazione di $Ox'y'z'$ intorno a P_0 e in una traslazione di P_0 .

L'orientamento della sonda dev'essere perpendicolare alla superficie del campione. Per trovare la normale relativa al punto di misura P_1 si considerano tre punti sufficientemente vicini P_1, P_2, P_3 e si trova l'equazione del piano passante per essi e tangente, in prima approssimazione, alla superficie del campione.

Risolvendo l'equazione:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

si ottiene l'equazione del piano nella forma $ax + by + cz + d = 0$, e da questa, posto:

$$\rho = (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$$

si ricavano i coseni direttori della retta normale al piano. Si ha:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= a/\rho \\ \cos \beta &= b/\rho \\ \cos \gamma &= c/\rho \end{aligned} \quad (1)$$

La retta passante per P_0 e avente i coseni direttori definiti in (1) interseca la superficie della sfera di raggio unitario e con centro in P_0 nel punto di coordinate:

$$\begin{aligned} x &= \cos \alpha \\ y &= \cos \beta \\ z &= \cos \gamma \end{aligned} \quad (2)$$

L'orientamento della sonda è ottenuto mediante una rotazione di $Ox'y'z'$ che porta l'estremo P_1 del vettore v alle coordinate indicate in (2). Infatti, la trasformazione di coordinate per rotazione intorno all'origine è data da:

$$\begin{aligned} x &= a_1x' + a_2y' + a_3z' \\ y &= b_1x' + b_2y' + b_3z' \\ z &= c_1x' + c_2y' + c_3z' \end{aligned} \quad (3)$$

dove i termini a_i, b_i, c_i , con $i=1,2,3$, sono costituiti dai 9 coseni direttori dei tre assi del sistema ruotato rispetto agli assi del sistema di riferimento fisso. Poiché i sistemi hanno gli assi ortogonali e lo stesso orientamento si ha inoltre:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= 0 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 & a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 &= 0 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 1$$

Nel nostro caso interessa conoscere soltanto la posizione raggiunta in seguito alla trasformazione dal punto $(x', y', z') = (1, 0, 0)$; la (3) diventa così equivalente alla (2); si ha infatti:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \\ y &= b_1 \\ z &= c_1 \end{aligned} \quad (4)$$

L'orientamento della sonda, coincidente con l'orientamento di v , è dunque esprimibile in funzione degli angoli α, β, γ ; la rotazione di $Ox'y'z'$ è determinata mediante istruzioni di posizione che contengono valori di quaternioni o di angoli di Eulero.

2 Definizioni generali relative ai quaternioni

I quaternioni costituiscono un'algebra associativa e non commutativa rispetto al prodotto sul corpo dei numeri reali. Definita una base $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, un generico quaternione è dato da:

$$Q = [a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}] \quad (5)$$

dove a, b, c, d sono numeri reali.

Come caso particolare si può prendere per l'elemento $\mathbf{1}$ l'unità dei numeri reali; un quaternione può allora essere espresso come la combinazione lineare di una parte scalare s e di una componente vettoriale \mathbf{v} :

$$Q = [s + \mathbf{v}] \quad (6)$$

L'operazione di prodotto fra due quaternioni è definita da:

$$Q = Q_1 \cdot Q_2 = [s_1 \cdot s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + s_2 \cdot \mathbf{v}_1 + s_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2] \quad (7)$$

dove \cdot indica il prodotto scalare e \wedge il prodotto vettoriale.

La base dello spazio vettoriale a tre dimensioni cui appartiene \mathbf{v} può essere fatta coincidere coi versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di un sistema di riferimento cartesiano \mathbf{Oxyz} ; in questo modo, i quaternioni possono essere usati per trattare in maniera semplice le rotazioni nello spazio.

Infatti, una rotazione di un angolo θ intorno ad un asse \mathbf{n} può essere associata ad un quaternione definito da:

$$Q = \text{Rot}(\mathbf{n}, \theta) = [\cos(\theta/2) + \mathbf{n} \sin(\theta/2)] \quad (8)$$

θ è misurato secondo la regola della mano destra intorno all'asse orientato, assunto di lunghezza unitaria; si ha:

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k}; \quad |\mathbf{n}| = 1 \quad (9)$$

Una rotazione composta $\text{Rot}(\mathbf{n}_1, \theta_1) \cdot \text{Rot}(\mathbf{n}_2, \theta_2)$ intorno a due assi \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 è allora associata al quaternione Q risultante dal prodotto di due quaternioni Q_1 e Q_2 che specificano le rotazioni semplici intorno ai singoli assi. Posto:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \text{Rot}(\mathbf{n}_1, \theta_1) = [\cos(\theta_1/2) + \mathbf{n}_1 \sin(\theta_1/2)] \\ Q_2 &= \text{Rot}(\mathbf{n}_2, \theta_2) = [\cos(\theta_2/2) + \mathbf{n}_2 \sin(\theta_2/2)] \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= n_{11} \mathbf{i} + n_{12} \mathbf{j} + n_{13} \mathbf{k} \\ \mathbf{n}_2 &= n_{21} \mathbf{i} + n_{22} \mathbf{j} + n_{23} \mathbf{k} \end{aligned}$$

si esegue il prodotto secondo la definizione data dalla (7, usando la seguente matrice per il calcolo del prodotto vettoriale

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\
 n_{11} & n_{12} & n_{13} \\
 n_{21} & n_{22} & n_{23}
 \end{array}$$

Si ottiene così:

$$\begin{aligned}
 Q &= Q_1 \cdot Q_2 = \text{Rot}(\mathbf{n}_1, \theta_1) \cdot \text{Rot}(\mathbf{n}_2, \theta_2) = \\
 &\{ [\cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) - \\
 &\quad (\sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2)) (n_{11}n_{21} + n_{12}n_{22} + n_{13}n_{23})] + \\
 &\mathbf{i} [\cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) n_{21} + \\
 &\quad \cos(\theta_2/2) \sin(\theta_1/2) n_{11} + \\
 &\quad \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) (n_{12}n_{23} - n_{13}n_{22})] + \\
 &\mathbf{j} [\cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) n_{22} + \\
 &\quad \cos(\theta_2/2) \sin(\theta_1/2) n_{12} + \\
 &\quad \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) (n_{13}n_{21} - n_{11}n_{23})] + \\
 &\mathbf{k} [\cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) n_{23} + \\
 &\quad \cos(\theta_2/2) \sin(\theta_1/2) n_{13} + \\
 &\quad \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) (n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})] \} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Il procedimento può essere espanso per considerare ulteriori rotazioni; adoperando le regole suddette si trova il quaternion che specifica le rotazioni di diversi angoli intorno a differenti assi.

Dato un vettore \mathbf{v} si può ottenere lo stesso vettore \mathbf{v}' mediante rotazioni semplici intorno ad un solo asse oppure mediante rotazioni composte intorno a più assi; il modo più agevole per definire la trasformazione necessaria per passare da \mathbf{v} a \mathbf{v}' consiste nel prendere come possibili assi di rotazione gli assi del sistema di riferimento.

Infatti, con questa ipotesi i coefficienti n sono di tipo binario, come indicato nella tabella seguente.

asse	\mathbf{x}	\mathbf{y}	\mathbf{z}
n_1	1	0	0
n_2	0	1	0
n_3	0	0	1

(11)

e l'equazione (10) si semplifica notevolmente.

Il quaternion che specifica una rotazione semplice intorno all' asse \mathbf{x} , \mathbf{y} , o \mathbf{z} ha i seguenti componenti:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \cos(\theta/2) \\
q_2 &= n_1 \sin(\theta/2) \\
q_3 &= n_2 \sin(\theta/2) \\
q_4 &= n_3 \sin(\theta/2)
\end{aligned} \tag{12}$$

dove uno solo dei coefficienti n_i è diverso da 0.

I quaternioni associati alle rotazioni composte intorno ad una coppia ordinata di tali assi hanno invece i seguenti componenti:

	<u>Rot(x,θ₁)•Rot(y,θ₂)</u>	<u>Rot(x,θ₁)•Rot(z,θ₂)</u>	<u>Rot(x,θ₁)•Rot(x,θ₂)</u>
q ₁	cos(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	cos(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	cos(θ ₁ /2)cos(θ ₂ /2)
q ₂	sin(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	sin(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	sin[(θ ₁ /2)+(θ ₂ /2)]
q ₃	cos(θ ₁ /2) sinθ ₂ /2	-sin(θ ₁ /2) sin(θ ₂ /2)	0
q ₄	sin(θ ₁ /2) sin(θ ₂ /2)	cos(θ ₁ /2) sinθ ₂ /2	0

	<u>Rot(y,θ₁)•Rot(z,θ₂)</u>	<u>Rot(y,θ₁)•Rot(x,θ₂)</u>	<u>Rot(y,θ₁)•Rot(y,θ₂)</u>
q ₁	cos(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	cos(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	cos(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)
q ₂	sin(θ ₁ /2) sin(θ ₂ /2)	cos(θ ₁ /2) sinθ ₂ /2	0
q ₃	sin(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	sin(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	sin[(θ ₁ /2)+(θ ₂ /2)]
q ₄	cos(θ ₁ /2) sin(θ ₂ /2)	-sin(θ ₁ /2) sin(θ ₂ /2)	0

	<u>Rot(z,θ₁)•Rot(x,θ₂)</u>	<u>Rot(z,θ₁)•Rot(y,θ₂)</u>	<u>Rot(z,θ₁)•Rot(xθ₂)</u>
q ₁	cos(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	cos(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	cos(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)
q ₂	cos(θ ₁ /2) sinθ ₂ /2	-sin(θ ₁ /2) sin(θ ₂ /2)	0
q ₃	sin(θ ₁ /2) sin(θ ₂ /2)	cos(θ ₁ /2) sinθ ₂ /2	0
q ₄	sin(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	sin(θ ₁ /2) cos(θ ₂ /2)	sin[(θ ₁ /2)+(θ ₂ /2)]

Le rotazioni composte intorno allo stesso asse sono associate ad un quaternione la cui componente vettoriale è funzione della somma degli angoli di rotazione; si riottengono così i quaternioni di rotazione semplice nella forma definita dalla (8). Le rotazioni composte intorno a due assi sono associate ad un quaternione la cui componente vettoriale è funzione del prodotto degli angoli di rotazione.

Per convenzione si esegue la prima rotazione intorno a y e la seconda rotazione intorno a z. Fissato θ_1 , al variare di θ_2 P_1 si muove lungo il parallelo individuato dall'intersezione della superficie della sfera unitaria col piano $z = \sin \theta_1$; per $\theta_1 = 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \cos(\theta_2/2) \\
q_2 &= 0 \\
q_3 &= 0 \\
q_4 &= \sin(\theta_2/2)
\end{aligned} \tag{13}$$

P_1 si muove dunque sulla circonferenza massima del piano equatoriale ($z = 0$) mediante una rotazione di tipo semplice intorno a z .

Fissato θ_2 , al variare di θ_1 P_1 si muove lungo il meridiano individuato dall'intersezione della superficie della sfera col piano appartenente al fascio di piani passanti per l'asse z e intersecante il piano xy con la retta $y = (\tan \theta_2) x$, per $\theta_2 = 0$, si ha:

$$\begin{aligned}q_1 &= \cos(\theta_1/2) \\q_2 &= 0 \\q_3 &= \sin(\theta_1/2) \\q_4 &= 0\end{aligned}\tag{14}$$

P_1 si muove dunque sulla circonferenza corrispondente al meridiano sul piano xz mediante una rotazione di tipo semplice intorno a y .

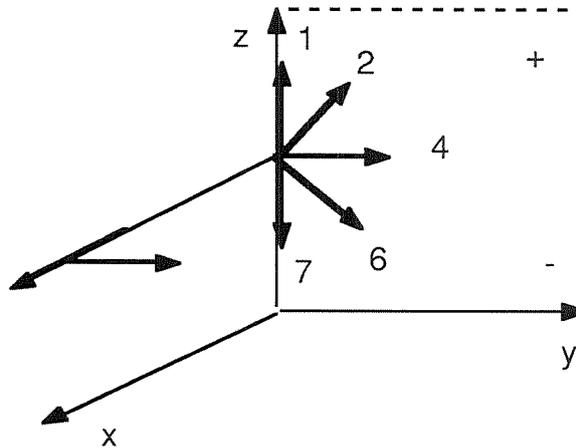
3 Esempi di rotazioni mediante istruzioni con valori di quaternioni

Nel seguito sono riportati esempi di rotazione semplice intorno ad un asse e di rotazione composta intorno a due assi.

Rotazione intorno all'asse x

La rotazione di un angolo θ_0 intorno all'asse x è definita da un quaternionione in cui $q_3 = q_4 = 0$; si ha:

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos(\theta_0/2) \\ q_2 &= \sin(\theta_0/2) \\ q_3 &= 0 \\ q_4 &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$



- Figura 3 Esempi di rotazione intorno all'asse x.

Nella tabella seguente sono riportati i valori di alcuni quaternioni e le rotazioni prodotte da ciascuno di essi; la figura 3 rappresenta le proiezioni sul piano yz di un vettore ortogonale a v in funzione dei quaternioni applicati.

pos.	q_1	q_2	q_3	q_4	θ_0
1	0.70	0.70	0	0	90°
2	0.86	0.55	0	0	60°
3	0.96	0.25	0	0	30°
4	1	0	0	0	0
5	0.96	-0.25	0	0	-30°
6	0.85	-0.50	0	0	-60°
7	0.70	-0.70	0	0	-90°

θ_0 è definito nell'intervallo $(-180^\circ, 180^\circ)$ ed è misurato in verso antiorario secondo la regola della mano destra.

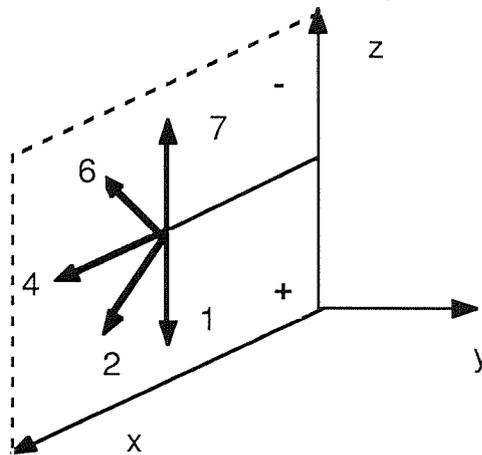
Rotazione intorno all'asse y

La rotazione di un angolo θ_1 intorno all'asse y è definita da :

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos(\theta_1/2) \\ q_2 &= 0 \\ q_3 &= \sin(\theta_1/2) \\ q_4 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Nella tabella seguente sono riportati i valori di alcuni quaternioni e gli effetti prodotti da ciascuno di essi; la figura 4 rappresenta le proiezioni sul piano xz del vettore v in funzione dei quaternioni applicati.

pos.	q_1	q_2	q_3	q_4	θ_1
1	0.70	0	0.70	0	90°
2	0.86	0	0.50	0	60°
3	0.96	0	0.25	0	30°
4	1	0	0	0	0°
5	0.96	0	-0.25	0	-30°
6	0.85	0	-0.50	0	-60°
7	0.70	0	-0.70	0	-90°



- Figura 4 Esempio di rotazione intorno all'asse y

Un osservatore che guarda nella direzione dell'asse y vede la sonda ruotare nel verso antiorario rispetto alla posizione di riferimento quando θ_1 aumenta.

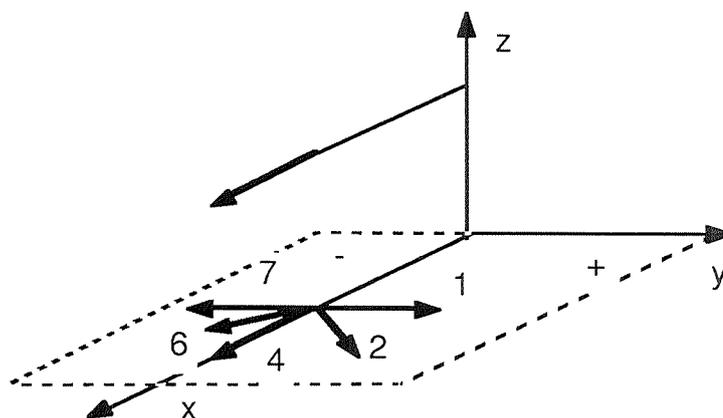
Rotazione intorno all'asse z

La rotazione di un angolo θ_2 intorno all'asse z è definita da:

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos(\theta_2/2) \\ q_2 &= 0 \\ q_3 &= 0 \\ q_4 &= \sin(\theta_2/2) \end{aligned} \quad (17)$$

Nella tabella seguente sono riportati i valori di alcuni quaternioni e gli effetti prodotti da ciascuno di essi; la figura 5 rappresenta le proiezioni sul piano xy del vettore v in funzione dei quaternioni applicati.

pos.	q_1	q_2	q_3	q_4	θ_2
1	0.70	0	0	0.70	90°
2	0.86	0	0	0.50	60°
3	0.96	0	0	0.25	30°
4	1	0	0	0	0
5	0.96	0	0	-0.25	-30°
6	0.85	0	0	-0.50	-60°
7	0.70	0	0	-0.70	-90°



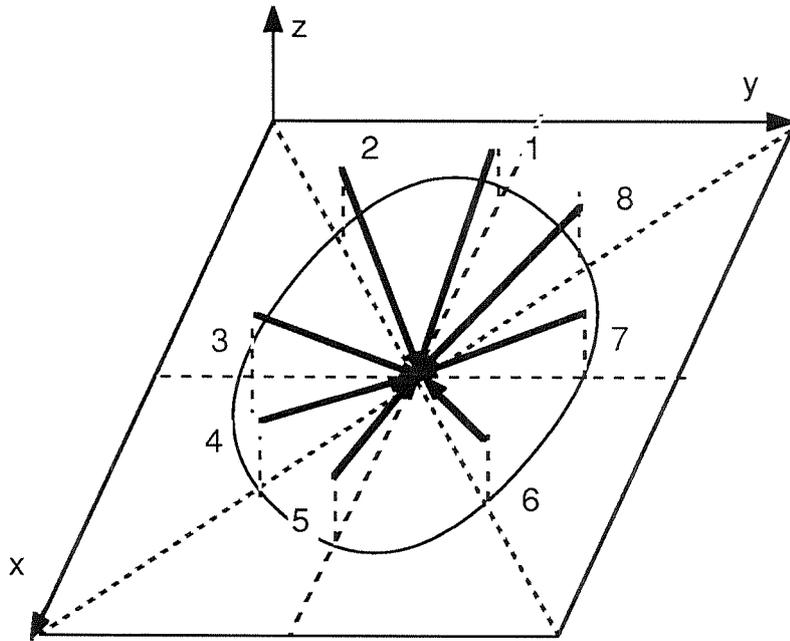
- Figura 5 Esempi di rotazione intorno all'asse z

Un osservatore che guarda nella direzione dell'asse di z vede la sonda ruotare nel verso antiorario rispetto alla posizione di riferimento al crescere di θ_2 .

Rotazione composta

Successive rotazioni intorno a differenti assi possono provocare lo stesso orientamento finale della sonda: ciò può essere formalmente attribuito alla non commutatività del prodotto di quaternioni.

Negli esempi riportati si è scelto l'asse y come primo asse di rotazione semplice e l'asse z come secondo asse di rotazione.



- Figura 6 Esempi di rotazione composta.

La posizione 1 è ottenuta ruotando di 60° intorno all'asse y e di 0° intorno all'asse z . I quaternioni Q_1 , Q_2 e $Q_3 = Q_1 * Q_2$ sono definiti da:

q_1	q_2	q_3	q_4	
0.86	0	0.50	0	$\text{Rot}(y, \theta_1)$
1.00	0	0	0	$\text{Rot}(z, \theta_2)$
0.86	0	0.50	0	$\text{Rot}(n_1, \theta_1) \cdot \text{Rot}(n_2, \theta_2)$

La posizione 2 è ottenuta ruotando di 60° intorno all'asse y e 45° intorno all'asse z . Si ha:

q_1	q_2	q_3	q_4	
0.86	0	0.50	0	$\text{Rot}(y, \theta_1)$
0.92	0	0	0.38	$\text{Rot}(z, \theta_2)$
0.79	0.19	0.46	0.33	$\text{Rot}(n_1, \theta_1) \cdot \text{Rot}(n_2, \theta_2)$

La posizione 3 è ottenuta ruotando di 90° intorno all'asse y e di 30° intorno all'asse z. Si ha:

q_1	q_2	q_3	q_4	
0.71	0	0.71	0	Rot(y, θ_1)
0.96	0	0	0.25	Rot(z, θ_2)
0.68	0.18	0.60	0.18	Rot(n_1 , θ_1)•Rot(n_2 , θ_2)

La posizione 4 è ottenuta facendo una rotazione di 120° intorno all'asse y e di 45° intorno all'asse z. Si ha:

q_1	q_2	q_3	q_4	
0.50	0	0.86	0	Rot(y, θ_1)
0.92	0	0	0.38	Rot(z, θ_2)
0.46	0.33	0.79	0.19	Rot(n_1 , θ_1)•Rot(n_2 , θ_2)

La posizione 5 è ottenuta facendo una rotazione di 120° intorno all'asse y e di 0° intorno all'asse z. Si ha:

q_1	q_2	q_3	q_4	
0.50	0	0.86	0	Rot(y, θ_1)
1.00	0	0	0	Rot(z, θ_2)
0.50	0	0.86	0	Rot(n_1 , θ_1)•Rot(n_2 , θ_2)

La posizione 6 è ottenuta facendo una rotazione di 120° intorno all'asse y e di 45° intorno all'asse z. Si ha:

q_1	q_2	q_3	q_4	
0.50	0	0.86	0	Rot(y, θ_1)
0.92	0	0	-0.38	Rot(z, θ_2)
0.46	-0.33	0.79	-0.19	Rot(n_1 , θ_1)•Rot(n_2 , θ_2)

La posizione 7 è ottenuta ruotando di 90° intorno all'asse y e di 30° intorno all'asse z. Q_3 è definito da:

q_1	q_2	q_3	q_4	
0.68	-0.18	0.68	-0.18	Rot(n_1 , θ_1)•Rot(n_2 , θ_2)

La posizione 8 è ottenuta ruotando di 60° intorno all'asse y e di 45° intorno all'asse z. Q_3 è definito da:

$$\begin{array}{cccc} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 & \underline{q}_3 & \underline{q}_4 \\ 0.79 & -0.19 & 0.46 & -0.33 & \text{Rot}(\mathbf{n}_1, \theta_1) \cdot \text{Rot}(\mathbf{n}_2, \theta_2) \end{array}$$

Se si vogliono specificare anche rotazioni della sonda rispetto al polso si deve eseguire un'ulteriore moltiplicazione di Q_3 col quaternione relativo alla terza rotazione; ad esempio, una rotazione di 60° intorno all'asse y, 45° intorno all'asse z e 45° intorno all'asse x è ottenuta con:

$$\begin{array}{cccc} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 & \underline{q}_3 & \underline{q}_4 \\ 0.86 & 0 & 0.50 & 0 & \text{Rot}(\mathbf{y}, \theta_1) \\ 0.92 & 0 & 0 & 0.38 & \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_2) \\ 0.92 & 0.38 & 0 & 0 & \text{Rot}(\mathbf{x}, \theta_0) \\ 0.66 & 0.48 & 0.55 & 0.12 & \text{Rot}(\mathbf{n}_1, \theta_1) \cdot \text{Rot}(\mathbf{n}_2, \theta_2) \cdot \text{Rot}(\mathbf{n}_3, \theta_0) \end{array}$$

4 Espressione dei quaternioni in funzione dei coseni direttori

Per determinare l'espressione dei quaternioni in funzione dei coseni direttori associati all'orientamento voluto si considerano le coordinate assunte in $Oxyz$ dal punto $P_1 = (1,0,0)$ in seguito a due rotazioni.

Una rotazione intorno a y fa muovere P_1 sulla circonferenza di raggio unitario nel piano xz ; in funzione dell'angolo di latitudine θ_1 si ha:

$$\begin{aligned}x &= \cos \theta_1 \\y &= 0 \\z &= \sin \theta_1\end{aligned}\tag{18}$$

Una successiva rotazione intorno a z fa muovere P_1 sulla circonferenza di raggio $\cos\theta_1$ sul piano $z = \sin\theta_1$; in funzione dell'angolo di longitudine θ_2 si ha:

$$\begin{aligned}x &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\y &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\z &= \sin \theta_1\end{aligned}\tag{19}$$

Le coordinate così ottenute devono coincidere con quelle determinate dai coseni direttori; si ha dunque:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \cos \beta &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \gamma &= \sin \theta_1\end{aligned}\tag{20}$$

Si ricava allora:

$$\begin{aligned}\sin \theta_1 &= \cos \gamma \\ \sin \theta_2 &= \cos \beta / \cos \theta_1 \\ \cos \theta_2 &= \cos \alpha / \cos \theta_1\end{aligned}\tag{21}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \sin^{-1} (\cos \gamma) = (\pi/2 - \gamma) \\ \theta_2 &= \sin^{-1} [\cos \beta / \cos \theta_1] \\ &= \sin^{-1} [\cos \beta / \cos (\pi/2 - \gamma)] \\ &= \sin^{-1} [\cos \beta / \sin \gamma]\end{aligned}\tag{22}$$

L'orientamento ottenuto partendo dalla posizione di reset ed eseguendo una prima rotazione intorno all'asse y e una successiva rotazione intorno a z è definito dal quaternione:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \cos(\theta_1/2) \cdot \cos(\theta_2/2) \\
q_2 &= \sin(\theta_1/2) \cdot \sin(\theta_2/2) \\
q_3 &= \sin(\theta_1/2) \cdot \cos(\theta_2/2) \\
q_4 &= \cos(\theta_1/2) \cdot \sin(\theta_2/2)
\end{aligned}
\tag{23}$$

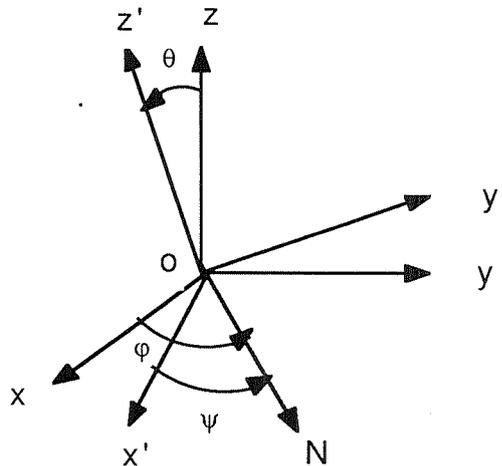
Sostituendo nella (23) i valori dati dalla (22) si ha:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \cos((\pi/2 - \gamma)/2) \cdot \cos(\sin^{-1}[\cos \beta / \sin \gamma]/2) \\
q_2 &= \sin((\pi/2 - \gamma)/2) \cdot \sin(\sin^{-1}[\cos \beta / \sin \gamma]/2) \\
q_3 &= \sin((\pi/2 - \gamma)/2) \cdot \cos(\sin^{-1}[\cos \beta / \sin \gamma]/2) \\
q_4 &= \cos((\pi/2 - \gamma)/2) \cdot \sin(\sin^{-1}[\cos \beta / \sin \gamma]/2)
\end{aligned}
\tag{24}$$

5 Definizioni generali relative agli angoli di Eulero

La trasformazione di coordinate per rotazione intorno all'origine può essere semplificata introducendo le tre rotazioni successive specificate dagli angoli di Eulero φ, θ, ψ

Con riferimento alla fig.7 i piani x, y e x', y' si intersecano lungo l'asse o linea dei nodi \mathbf{n} ; \mathbf{n} è normale al piano $z z'$ ed è orientato in modo che una rotazione intorno ad esso in verso antiorario porta l'asse z su z' .



-Figura 7 Sistemi di riferimento fisso e mobile per la definizione di angoli di Eulero.

L'angolo φ tra \mathbf{x} e \mathbf{n} è detto angolo di rotazione propria; φ è misurato in verso antiorario intorno a \mathbf{z} ; si ha: $0 \leq \varphi < 2\pi$,

L'angolo θ tra \mathbf{z} e \mathbf{z}' è detto angolo di nutazione; θ è misurato in verso antiorario intorno a \mathbf{n} ; si ha: $0 < \theta < \pi$

L'angolo ψ tra \mathbf{n} e \mathbf{x}' è detto angolo di precessione; ψ è misurato in verso antiorario intorno a \mathbf{z}' ; si ha: $0 \leq \psi < 2\pi$

Gli angoli θ, φ, ψ sono tra loro indipendenti e determinano in modo univoco la trasformazione di coordinate.

In generale, in funzione di θ, φ, ψ i coseni direttori degli assi del sistema ruotato sono dati da:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta \\
 b_1 &= \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta \\
 c_1 &= \sin\varphi \sin\theta \\
 a_2 &= -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta \\
 b_2 &= -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\theta \\
 c_2 &= \cos\varphi \sin\theta \\
 a_3 &= \sin\varphi \sin\theta \\
 b_3 &= -\cos\varphi \sin\theta \\
 c_3 &= \cos\theta
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Considerando soltanto le posizioni assunte dal punto P_1 e sostituendo nella (3) le relazioni date nella (25) si ottiene:

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta \\ y &= \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\theta \\ z &= \sin\psi \sin\theta \end{aligned} \quad (26)$$

Al variare di φ , θ , ψ il punto P_1 si sposta sulla superficie di una sfera di raggio unitario con centro sull'origine del sistema di riferimento fisso.

Si possono considerare come ulteriore semplificazione le traiettorie percorse da P_1 fissando i valori di due angoli e facendo variare il terzo. Si hanno le tre possibilità indicate nella seguente tabella.

φ	θ	ψ
~	θ_0	ψ_0
φ_0	~	ψ_0
φ_0	θ_0	~

1) Al variare di φ , con $\theta = \text{cost}$, $\psi = \text{cost}$, P_1 si muove su una delle circonferenze determinate dall'intersezione della sfera unitaria con piani paralleli al piano xy . La distanza fra il piano d'intersezione, individuato da una coppia di valori ψ_0 e θ_0 , e l'origine del sistema di riferimento vale:

$$z = \sin\psi_0 \sin\theta_0$$

L'equazione della circonferenza e' data da:

$$x^2 + y^2 = \cos^2\psi_0 + \cos^2\theta_0 - (\cos^2\psi_0 \cos^2\theta_0)$$

Si ha la circonferenza massima $x^2+y^2=1$ quando:

φ	θ	ψ
~	0	0

(27)

Si ha invece la circonferenza minima, ridotta a $z = \pm 1$ quando:

φ	θ	ψ
~	± 90	± 90

(28)

2) Al variare di θ , con $\varphi = \text{cost}$, $\psi = \text{cost}$, P_1 si muove su una delle circonferenze determinate dall'intersezione della sfera unitaria con piani perpendicolari al piano xy e formanti con esso la retta:

$$y = [(\cos \psi_0 / \sin \varphi_0) - (\cos \varphi_0 / \sin \varphi_0) x]$$

Nelle ipotesi fatte la (4) diventa:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\varphi}{0} & \frac{\theta}{\sim} & \frac{\psi}{\psi_0} \\ x = \cos \psi_0 & & x = \sin \psi_0 \cos \theta \\ y = \sin \psi_0 \cos \theta & & y = \cos \psi_0 \\ z = \sin \psi_0 \sin \theta & & z = \sin \psi_0 \sin \theta \end{array} \quad (29)$$

La circonferenza si riduce ad un punto quando:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\varphi}{0} & \frac{\theta}{\sim} & \frac{\psi}{0} \\ x = 1 & & x = 0 \\ y = 0 & & y = 1 \\ z = 0 & & z = 0 \end{array} \quad (30)$$

3) Al variare di ψ con $\varphi = \text{cost}$, $\theta = \text{cost}$, si hanno i seguenti casi d'interesse

$$\frac{\varphi}{0} \quad \frac{\theta}{\theta} \quad \frac{\psi}{\sim}$$

P_1 si muove lungo la circonferenza individuata dall'intersezione della sfera col piano appartenente al fascio generato dall'asse y e intersecante il piano xz con la retta:

$$z = - (\sin \theta_0 / \cos \theta_0) x \quad (31)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} \quad \frac{\theta}{90} \quad \frac{\psi}{\sim}$$

P_1 si muove lungo circonferenze individuate dall'intersezione della sfera col piano appartenente al fascio generato dall'asse z e intersecante il piano xy con la retta:

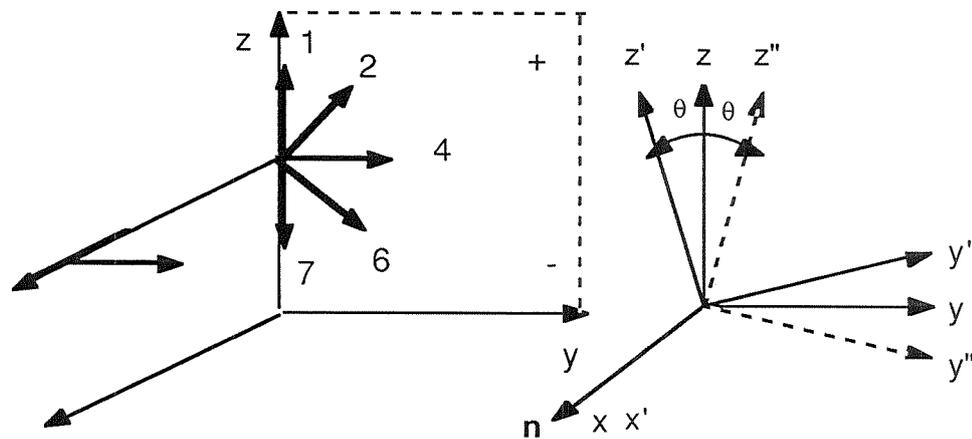
$$y = (\sin \varphi_0 / \cos \varphi_0) x$$

6 Esempi di rotazioni mediante istruzioni con valori di angoli di Eulero

Nelle istruzioni usate dall'unità di controllo gli angoli di Eulero sono indicati con (α, β, γ) ; si riportano esempi di rotazioni semplici e composte.

Rotazioni intorno all'asse x

La figura 8 1a mostra un esempio di rotazione del sistema di riferimento mobile $Ox'y'z'$ (Hand Coordinate System) intorno all'asse x del sistema di riferimento fisso $Oxyz$ (Base Coordinate System). Nella tabella seguente sono riportati valori di alcune terne di angoli; nella figura 8 è rappresentata anche la proiezione sul piano yz di un vettore ortogonale all'asse della sonda



- Figura 8 Esempi di rotazione intorno all'asse x

pos	α	β	γ
1	0	90°	0
2	0	60°	0
3	0	30°	0
4	0	0°	0
5	0	-30°	0
6	0	-60°	0
7	0	-90°	0

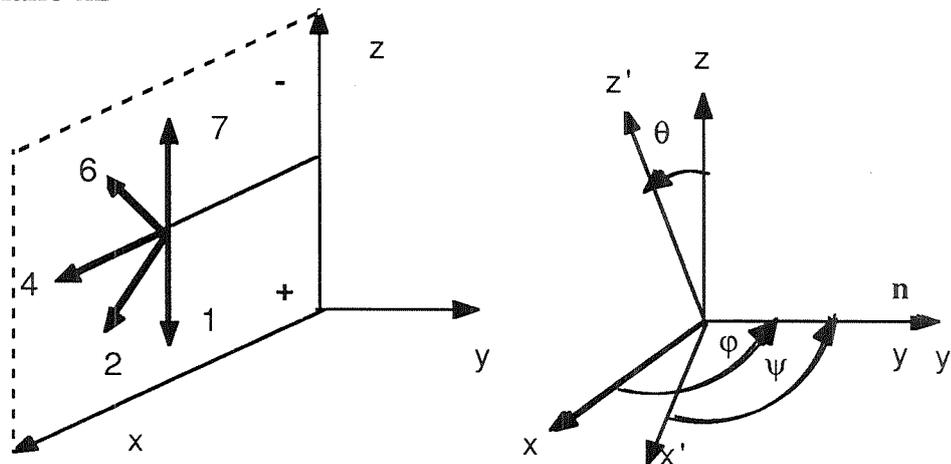
In questo caso la linea dei nodi coincide con gli assi x e x' ; al variare di β con $\alpha = 0^\circ$ e $\gamma = 0^\circ$ P_1 ruota su se stesso rimanendo nella posizione $x = 1, y = 0, z = 0$; confrontando questo risultato con l'equazione (30) si ottengono le condizioni per percorrere la stessa traiettoria:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \varphi & \theta & \psi \\ 0^\circ & \sim & 0^\circ & 0^\circ & \sim & 0^\circ \end{array}$$

da cui: $\beta = \theta$.

Rotazioni intorno all'asse y

La figura 9 mostra un esempio di rotazione del sistema di riferimento mobile intorno all'asse y del sistema di riferimento fisso. Nella tabella seguente sono riportati i valori di alcune terne di angoli; nella figura 9 è rappresentata anche la proiezione dell'asse della sonda sul piano xz



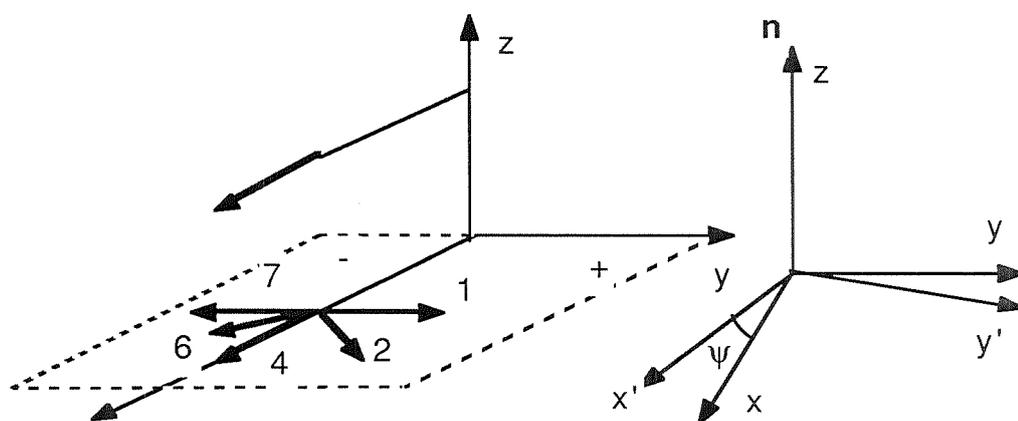
- Figura 9 Esempi di rotazione intorno all'asse y

pos	α	β	γ
1	90°	90°	-90°
2	90°	60°	-90°
3	90°	30°	-90°
4	0°	0°	0°
5	-90°	30°	90°
6	-90°	60°	90°
7	-90°	90°	90°

In questo caso la linea dei nodi coincide con gli assi y e y' ; la rotazione sulla circonferenza $x^2 + z^2 = 1$ è ottenuta al variare β di con $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = -90^\circ$ nel semipiano $z < 0$ e $\alpha = -90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ nel semipiano $z > 0$. Questo risultato coincide con l'effetto indicato dall'eq.(29 con $\varphi = +90^\circ$ e $\psi = +90^\circ$.

Rotazioni intorno all'asse z

La figura 10 mostra un esempio di rotazione del sistema di riferimento mobile intorno all'asse z del sistema di riferimento fisso. Nella tabella seguente sono riportati i valori di alcune terne di angoli; nella figura 10 è rappresentata anche la proiezione dell'asse della sonda sul piano xy.



- Figura 10 Esempi di rotazione intorno all'asse z

pos	α	β	γ
1	90°	0°	0°
2	60°	0°	0°
3	30°	0°	0°
4	0°	0°	0°
5	-30°	0°	0°
6	-60°	0°	0°
7	-90°	0°	0°

In questo caso i piani xy e x'y' coincidono e quindi la linea dei nodi n può essere una qualsiasi retta del piano xy con l'origine O: si assume n coincidente con l'asse x'. La rotazione sulla circonferenza $x^2+y^2=1$ è ottenuta al variare α di con $\beta = 0, \gamma = 0$; confrontando questo risultato con l'eq.(27) si ricava $\alpha = \varphi$.

In base agli esempi riportati si determina così la corrispondenza:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi; & 0 &\leq \alpha < 2\pi \\ \beta &= \theta; & 0 &\leq \beta < \pi \\ \gamma &= \psi; & 0 &\leq \gamma < 2\pi \end{aligned}$$

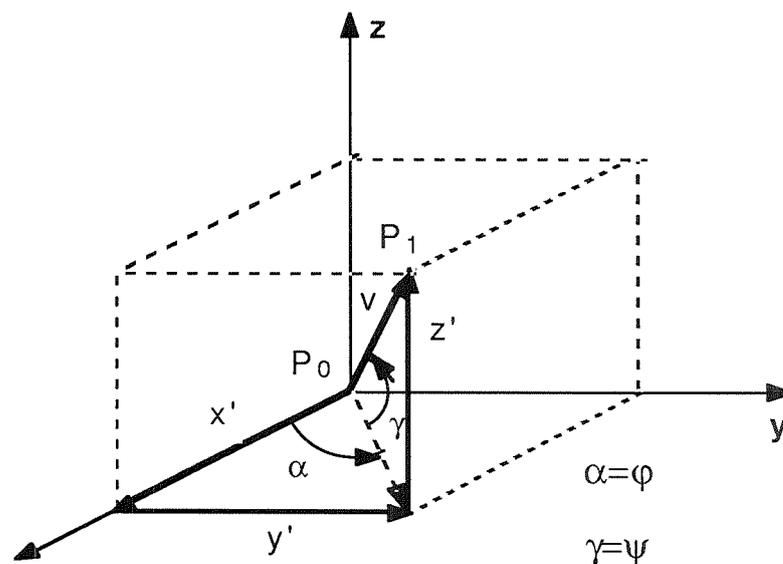
7 Espressione degli angoli di Eulero in funzione dei coseni direttori

Per determinare la corrispondenza tra gli angoli di Eulero e i coseni direttori che specificano l'orientamento desiderato si considerano le coordinate assunte in $Oxyz$ dal punto P_1 per effetto delle tre successive rotazioni.

La prima rotazione intorno a z fa muovere P_1 sulla circonferenza di raggio 1 nel piano xy ; in funzione di φ si ha:

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \\ y &= \sin \varphi \\ z &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

La seconda rotazione intorno a \mathbf{n} , coincidente con x' dopo la prima rotazione, fa muovere z lasciando invariate le coordinate di P_1 , che appartiene a \mathbf{n} . Per $\theta = 90^\circ$ l'asse z' giace nel piano xy .



- Figura 11 Orientamento della sonda v per effetto di due rotazioni.

La terza rotazione intorno a z' fa muovere P_1 sulla circonferenza di raggio 1 nel piano passante per z e \mathbf{n} ; in funzione di ψ le coordinate di P_1 diventano (vedi fig 11):

$$\begin{aligned} x &= \cos \psi \cos \varphi \\ y &= \cos \psi \sin \varphi \\ z &= \sin \psi \end{aligned} \tag{33}$$

Imponendo l'uguaglianza di queste coordinate con quelle espresse in funzione dei coseni direttori si ottiene:

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \cos \psi \cos \varphi \\
\cos \beta &= \cos \psi \sin \varphi \\
\cos \gamma &= \sin \psi
\end{aligned}
\tag{34}$$

Si ricava quindi:

$$\begin{aligned}
\sin \psi &= \cos \gamma \\
\sin \varphi &= \cos \beta / \cos \psi = \cos \beta / \cos [\sin^{-1}(\cos \gamma)] \\
&= \cos \beta / \cos (\pi/2 - \gamma) \\
&= \cos \beta / \sin \gamma
\end{aligned}
\tag{35}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\psi &= \sin^{-1} [\cos \gamma] = (\pi/2 - \gamma) \\
\varphi &= \sin^{-1} [\cos \beta / \sin \gamma]
\end{aligned}$$

Secondo la convenzione fatta l'orientamento voluto è ottenuto mediante un'istruzione definita da:

$$(\sin^{-1}[\cos \beta / \sin \gamma], 90^\circ, 90^\circ - \gamma)$$

8 Trasformazione da angoli di Eulero a quaternioni

La rotazione composta per mezzo della quale si passa da $Oxyz$ a $Ox'y'z'$ può essere ottenuta mediante il prodotto di più rotazioni semplici. Presi come assi di rotazione gli assi y e z , con riferimento alla figura 7 si definiscono i seguenti angoli:

$$\begin{aligned}\alpha' &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{y} \\ \beta' &= \mathbf{z} \wedge \mathbf{z}' \\ \gamma' &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{y}'\end{aligned}$$

Rispetto alla notazione usata in precedenza per gli angoli di Eulero si ha:

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha - \pi/2 = \varphi - \pi/2 ; \\ \beta' &= \beta = \theta ; \\ \gamma' &= \gamma - \pi/2 = \psi - \pi/2 ;\end{aligned}\tag{36}$$

La rotazione composta può allora essere messa nella forma:

$$\text{Rot}(\mathbf{n}, \omega) = \text{Rot}(\mathbf{z}, \alpha') \cdot \text{Rot}(\mathbf{y}, \beta') \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma')\tag{37}$$

Calcolando la rotazione (37 secondo le equazioni (6, (7 e (10 si ottiene il quaternioni avente i seguenti componenti:

$$\begin{aligned}q_1 &= \cos(\beta'/2) \cos((\alpha' + \gamma')/2) \\ q_2 &= \sin(\beta'/2) \sin((\alpha' - \gamma')/2) \\ q_3 &= \sin(\beta'/2) \cos((\alpha' - \gamma')/2) \\ q_4 &= \cos(\beta'/2) \sin((\alpha' + \gamma')/2)\end{aligned}\tag{38}$$

Nelle ipotesi fatte si ha $\beta' = 90^\circ$; inoltre, usando la corrispondenza data dalla (36) la (38) diventa:

$$\begin{aligned}q_1 &= 0.70 \cos((\alpha + \gamma - 180^\circ)/2) \\ q_2 &= 0.70 \sin((\alpha - \gamma)/2) \\ q_3 &= 0.70 \cos((\alpha - \gamma - 180^\circ)/2) \\ q_4 &= 0.70 \sin((\alpha + \gamma)/2)\end{aligned}\tag{39}$$

Si hanno seguenti casi particolari:

$(0^\circ, 90^\circ, -90^\circ)$	$(90^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$
sonda verticale	sonda ruotata di 90° intorno a z .
$q_1 = 0.5$	$q_1 = 0.5$
$q_2 = 0.5$	$q_2 = 0.5$
$q_3 = 0.5$	$q_3 = 0.5$
$q_4 = -0.5$	$q_4 = 0.5$

9 Uso dell'istruzione TCP

Il software di controllo dei movimenti del robot provvede a modificare automaticamente la locazione di P_0 in modo che la traiettoria percorsa P_1 in base ad un insieme di istruzioni di posizione rimanga invariata quando si usano utensili diversi. Nell'istruzione TCP si indicano le variazioni $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ del nuovo P_1 rispetto a quello specificato in precedenza.

Nel nostro caso l'istruzione TCP viene usata quando si modifica la lunghezza complessiva della sonda; si ha dunque $(\Delta x = \Delta v, \Delta y = 0, \Delta z = 0)$.

Affinche' la traiettoria rimanga costante, in ogni punto la locazione effettiva di P_0 viene modificata in funzione di Δx rispetto ai valori (x_t, y_t, z_t) indicati nella istruzione di locazione: si ha:

$$\begin{aligned}x'_t &= x_t - (\Delta x \cos \gamma \cos \alpha) \\y'_t &= y_t - (\Delta x \cos \gamma \sin \alpha) \\z'_t &= z_t + (\Delta x \sin \gamma)\end{aligned}\tag{40}$$

Sono state definite differenti istruzioni TCP e si sono verificate le coordinate di P_0 con la sonda orientata verso il basso lungo la verticale

TCP1

$$\Delta x = -50$$

$$\Delta y = 0$$

$$\Delta z = 0$$

La variazione Δx simula l'utilizzo di una sonda di lunghezza $v' = v - 50\text{mm}$; la posizione raggiunta da P_1 non varia mentre le coordinate di P_0 diventano:

$$x'_t = x_t$$

$$y'_t = y_t$$

$$z'_t = z_t + (-\Delta x)$$

In particolare la coordinata z risulta diminuita di 50 mm. in accordo con l'eq. (1).

TCP2

$$\Delta x = 50$$

$$\Delta y = 0$$

$$\Delta z = 0$$

La variazione Δx simula l'utilizzo di una sonda di lunghezza $v' = v + 50\text{mm}$; la posizione raggiunta da P_1 non varia mentre le coordinate di P_0 diventano:

$$\begin{aligned}x'_t &= x_t \\y'_t &= y_t \\z'_t &= z_t + (\Delta x)\end{aligned}$$

In particolare la coordinata z risulta aumentata di 50 mm. in accordo con l'eq. (1).

Si hanno inoltre i seguenti casi.

TCP3

$$\begin{aligned}\Delta x &= 0 & x'_t &= x_t \\ \Delta y &= -50 & y'_t &= y_t - (-\Delta y) \\ \Delta z &= 0 & z'_t &= z_t\end{aligned}$$

TCP4

$$\begin{aligned}\Delta x &= 0 & x'_t &= x_t \\ \Delta y &= 50 & y'_t &= y_t - (-\Delta y) \\ \Delta z &= 0 & z'_t &= z_t\end{aligned}$$

TCP5

$$\begin{aligned}\Delta x &= 0 & x'_t &= x_t - (-\Delta y) \\ \Delta y &= 0 & y'_t &= y_t \\ \Delta z &= -50 & z'_t &= z_t\end{aligned}$$

TCP6

$$\begin{aligned}\Delta x &= 0 & x'_t &= x_t - (\Delta y) \\ \Delta y &= 0 & y'_t &= y_t \\ \Delta z &= 50 & z'_t &= z_t\end{aligned}$$

TCP7

$$\begin{aligned}\Delta x &= 50 & x'_t &= x_t - (\Delta x) \\ \Delta y &= 50 & y'_t &= y_t - (\Delta y) \\ \Delta z &= 50 & z'_t &= z_t + (\Delta y)\end{aligned}$$

10 Riepilogo delle istruzioni di posizione

Si riassumono le operazioni necessarie per portare la sonda nella corretta posizione di misura relativa al punto P'_1 sulla superficie del campione.

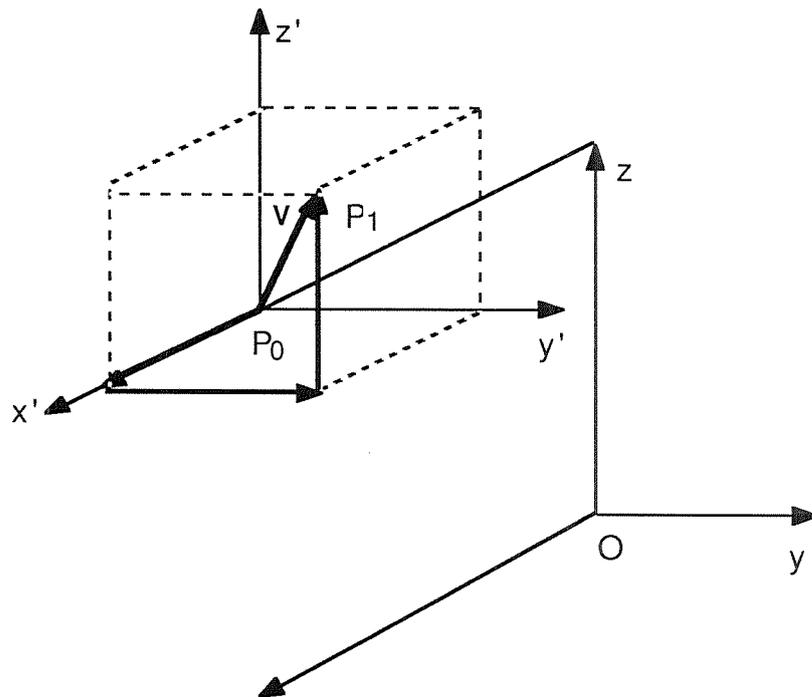
Si determinano inizialmente le coordinate x_t, y_t, z_t di P'_1 nel sistema $Oxyz$ e, presi due punti vicini a P'_1 , si calcolano i coseni direttori della normale alla superficie del campione passante per P'_1 , secondo l'equazione (1).

$$\cos \alpha = a/\rho$$

$$\cos \beta = b/\rho$$

$$\cos \gamma = c/\rho$$

Si ricava così l'istruzione di posizione da passare al controllo del robot. per ottenere il movimento di rotazione della sonda rispetto all'origine del sistema di riferimento mobile in condizioni di reset e la successiva traslazione della sonda orientata (vedi fig. 12).



- Figura 12 Posizione della sonda dopo la rotazione.

Usando i quaternioni nella forma di rotazione composta del tipo $\text{Rot}(y,\gamma) \cdot \text{Rot}(z,\alpha)$ l'istruzione che definisce la posizione di P_0 e l'orientamento di v è espressa nella forma:

$$(x_t, y_t, z_t, q_1, q_2, q_3, q_4)$$

dove la locazione di P_0 è data da (x_t, y_t, z_t) e l'orientamento di v è dato da:

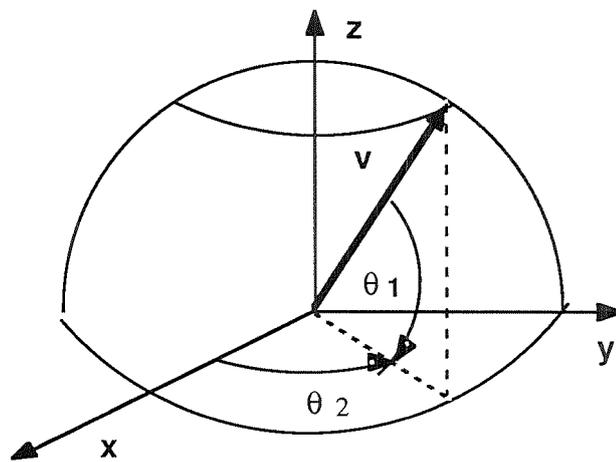
$$\begin{aligned} q_1 &= \cos((\pi/2 - \gamma)/2) \cdot \cos(\sin^{-1}[\cos \beta / \sin \gamma])/2 \\ q_2 &= \sin((\pi/2 - \gamma)/2) \cdot \sin(\sin^{-1}[\cos \beta / \sin \gamma])/2 \\ q_3 &= \sin((\pi/2 - \gamma)/2) \cdot \cos(\sin^{-1}[\cos \beta / \sin \gamma])/2 \\ q_4 &= \cos((\pi/2 - \gamma)/2) \cdot \sin(\sin^{-1}[\cos \beta / \sin \gamma])/2 \end{aligned}$$

Usando la notazione degli angoli di Eulero l'istruzione che definisce la posizione di P_0 e l'orientamento di v è espressa nella forma:

$$(x_t, y_t, z_t, \sin^{-1}[\cos \beta / \sin \gamma], 90^\circ, 90^\circ - \gamma)$$

Si definisce poi un TCP tale da portare la sonda alla distanza d rispetto alla superficie del campione; posto $v = |v|$ si ha:

$$\begin{aligned} \Delta x &= v + d \\ \Delta y &= 0 \\ \Delta z &= 0 \end{aligned}$$



-Figura 13 Orientamento mediante latitudine e longitudine

L'orientamento della sonda può essere desunto anche mediante la definizione di un angolo di latitudine θ_1 e un angolo di longitudine θ_2 . (vedi fig 13). In questo caso si ha il quaternione:

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) \\ q_2 &= \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) \\ q_3 &= \sin(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) \\ q_4 &= \cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) \end{aligned}$$

Bibliografia

B.Klaus, P.Horn : "Robot Vision" , MIT Press, Cambridge, 1986

R.H. Taylor: Planning and execution of straight line manipulator trajectories, IBM J RES. DEVELOP, vol 23, 4, 1979, p 424.436

G.Giorgi: "Metodo di calcolo vettoriale e spaziale"

D. Gigli: "Aritmetica generale"

R.Faure, A.Kaufmann, M Denis-Papin:: "Manuale di Matematica", Istituto Editoriale Internazionale, Milano, 1971

Programming Manual Robot Control System S3 , ABB, 1990.

oppure l'istruzione definita dagli angoli di Eulero:

$$(\theta_2, 90^\circ, \theta_1)$$

Nell'applicazione in esame la sonda deve essere orientata verso il basso e quindi si prendono in considerazione solo le rotazioni che portano P_1 sulla superficie della semisfera i cui punti hanno $z < z_0$; si ha:

$$\begin{aligned} 0 < \theta_1 < 180^\circ \\ -180^\circ < \theta_2 < 180^\circ \end{aligned}$$

Si hanno seguenti casi particolari:

sonda verticale

$$\begin{aligned} q_1 &= 0.70 & (0, 90^\circ, 90^\circ) \\ q_2 &= 0 \\ q_3 &= 0.70 \\ q_4 &= 0 \end{aligned}$$

rotazione lungo il meridiano sul piano xz

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos(\theta_1/2) & (0, 90^\circ, \theta_1) \\ q_2 &= 0 \\ q_3 &= \sin(\theta_1/2) \\ q_4 &= 0 \end{aligned}$$

rotazione lungo il meridiano sul piano yz

$$\begin{aligned} q_1 &= 0.70 \cos(\theta_1/2) & (90^\circ, 90^\circ, \theta_1) \\ q_2 &= 0.70 \sin(\theta_1/2) \\ q_3 &= 0.70 \sin(\theta_1/2) \\ q_4 &= 0.70 \cos(\theta_1/2) \end{aligned}$$