SOGLIA DI UN DISPOSITIVO A IMPULSI

G. Fiorio
Posta elettronica: fiorio@icnucevm

Riassunto

Viene studiato il problema di trovare delle stime relative ad una variabile casuale che rimane "nascosta", in quanto e' possibile solo sapere se e' risultata minore o no di un valore arbitrario, scelto volta per volta dallo sperimentatore. Viene proposta qualche "ricetta" su basi empiriche.

1. Il problema statistico della soglia.

Definiamo il dispositivo in esame come una soglia che riceve impulsi di altezza arbitraria t (input) e restituisce un impulso (output) $y=0$ se $t<S$, $y=1$ se $t \geqslant S$. Si puo' dire che il dispositivo realizza una funzione a gradino (Abramowitz[1], formula 29.3.61) $y=u(t-S)$ dell'input t.

Qualunque dispositivo reale da' risultati non perfettamente costanti quando t e' vicino a S, a causa di disturbi di varia natura. Nel dispositivo reale la soglia dovra' essere descritta come una variabile casuale, e si pone il problema di determinarne la distribuzione, o per lo meno di stimarne i parametri piu' importanti (media, varianza, ...).

Il problema si pone in modo diverso da quello standard, poiche' nei dispositivi a impulsi non e' possible estrarre un campione della variabile casuale S: e' possibile solo ottenere una successione di valori y_j corrispondenti ad una successione arbitraria di impulsi t_j.

Supporremo comunque, analogamente a quanto viene fatto per i campioni, che i risultati delle prove eseguite sul dispositivo a impulsi siano indipendenti tra loro.

Se, per esempio, si ripetesse n volte lo stesso impulso di altezza t, ottenendo k volte l'uscita $y=1$ (e n-k volte l'uscita $y=0$), allora il rapporto $Y=k/n$ darebbe una stima di $F(t) = Pr(S \leq t)$, la probabilita' che la soglia assuma un valore qualsiasi minore di o uguale a t, cioe' il valore assunto in t dalla distribuzione di probabilita' cumulata F(x) della variabile casuale S. Tale stima puo' essere resa attendibile a piacere, aumentando il numero n delle prove, poiche' k ha distribuzione binominiale con parametri n e F(t). Dunque e' sempre possibile, facendo assumere all'altezza t degli impulsi un insieme sufficiente di valori diversi e ripetendo un numero sufficiente di volte la prova per ciascun valore, ottenere l'intera distribuzione di probabilita' di S ma tale processo puo' risultare molto costoso. E' probabile invece che, con una opportuna strategia nella scelta dei valori di t, si possano ottenere piu' economicamente la media e la varianza di S con sufficiente attendibilita'.

Il vero problema, che chiameremo "problema statistico della soglia", e' determinare, in base ai risultati gia' ottenuti, quale valore convenga dare agli impulsi successivi per migliorare le stime disponibili.

Occorre innanzitutto ricavare le stime dai dati disponibili, che abbiamo visto essere in relazione con la distribuzione cumulata di probabilita', e quindi ci servono le relative formule.

2. Calcolo di media e varianza dalla distribuzione cumulata.

In letteratura (Golberg[2], formula 10.33) si trova la seguente formula

$$E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{\infty} (1-F(x))dx$$

che si ottiene integrando per parti la usuale definizione di media; puo' essere utile la seguente variante

$$E(X) = c - \int_{-\infty}^{c} F(x)dx + \int_{c}^{\infty} (1-F(x))dx$$

per dare l'interpretazione "geometrica" della formula stessa

$$\int_{-\infty}^{E(X)} F(x)dx = \int_{E(X)}^{\infty} (1-F(x))dx$$

e per calcolare E(X) con un solo integrale

$$E(X) = a + \int_{a}^{\infty} (1-F(x))\, dx \qquad \text{se } F(a)=0,$$

$$E(X) = b - \int_{-\infty}^{b} F(x)\, dx \qquad \text{se } F(b)=1.$$

E' opportuno definire le seguenti funzioni

$$I(x) = \int_{-\infty}^{x} F(x')\, dx',$$

$$N(x) = \int_{x}^{\infty} (1-F(x'))\, dx',$$

con cui il valore di aspettazione di X si scrive

$$E(X) = c - I(c) + N(c)$$

e il valore di aspettazione di X^2, integrando per parti, risulta

$$E(X^2) = c^2 - 2\int_{-\infty}^{c} x\, F(x)\, dx + 2\int_{c}^{\infty} x\,(1-F(x))dx =$$

$$= c^2 - 2c\, I(c) + 2c\, N(c) + 2\int_{-\infty}^{c} I(x)\, dx + 2\int_{c}^{\infty} N(x)dx.$$

Da queste formule si ottiene la varianza

$$Var(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2 =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{c} I(x)\, dx + 2\int_{c}^{\infty} N(x)\, dx - (I(c)-N(c))^2.$$

3. Stima di media e varianza dai dati sperimentali.

Per applicare le formule trovate bisogna disporre di una stima di F(x), mentre i dati sperimentali sono costituiti da un insieme di valori di t e dai corrispondenti output y (0 o 1). Questi output sono essi stessi una stima della F nel punto t, tuttavia e' opportuno ammettere che lo stesso valore di t possa essere replicato n volte; in questo caso la migliore stima disponibile per F e' il rapporto Y=k/n con k uguale alla somma degli output corrispondenti allo stesso t.

Sara' opportuno allora raccogliere i dati sperimentali in una lista di m elementi con indice i, contenente i valori t(i) dell'impulso di input, il numero n(i) di replicazioni dello stesso impulso e il numero k(i) di volte in cui l'output e' risultato 1. Da questi valori si potra' definire, come stima di F(t(i)),

$$Y(i) = k(i)/n(i)$$

e risultera' $0 \leq Y(i) \leq 1$ per ogni i.

L'insieme dei punti t(i),Y(i) (i=1,2,... m) costituira' la stima di F(x) disponibile per il calcolo di media e varianza. Supporremo che i valori di t siano ordinati in modo crescente

$$t(1) < t(2) < \ldots < t(m)$$

e quindi sara' $F(t(1)) \leq F(t(2)) \leq \ldots \leq F(t(m))$, tuttavia potra' non essere lo stesso per le corrispondenti stime Y(i). Cio' non preclude la possibilita' di calcolare una stima degli integrali del paragrafo 2, purche' siano verificate le condizioni

$$Y(1) = 0 \quad \text{e} \quad Y(m) = 1.$$

Se queste condizioni non fossero entrambe realizzabili, il dispositivo dovrebbe essere definito guasto.

3.1 Stima a gradini della F(x).

Definiamo la funzione

$$G(x) = \sum_{i=2}^{m} (Y(i)-Y(i-1))\ u\left(x - \frac{t(i)+t(i-1)}{2}\right)$$

che e' costante a intervalli e tale che G(t(i)) = Y(i) (i=1,2,... m). Definiamo inoltre

$$J(x) = \int_{-\infty}^{x} G(x')\,dx' =$$

$$= \sum_{i=2}^{m} (Y(i) - Y(i-1)) \left(x - \frac{t(i)+t(i-1)}{2}\right)\ u\left(x - \frac{t(i)+t(i-1)}{2}\right).$$

Chiamiamo EG(.) le stime dei valori di aspettazione calcolate ponendo G(x) e J(x) al posto di F(x) e I(x) nelle formule del paragrafo 2. Risulta

$$EG(X) = \sum_{i=2}^{m} (Y(i)-Y(i-1))(t(i)+t(i-1))/2,$$

$$EG(X^2) = \sum_{i=2}^{m} (Y(i)-Y(i-1))(t(i)+t(i-1))^2/4.$$

3.2 Stima a spezzata della F(x).

Definiamo la funzione

$$H(x) = \sum_{i=2}^{m} \frac{Y(i)-Y(i-1)}{t(i)-t(i-1)} \Big((x-t(i-1))\, u(x-t(i-1)) - (x-t(i))\, u(x-t(i)) \Big)$$

che vale 0 per $x<t(1)$ e 1 per $x>t(m)$, e il cui grafico e' la spezzata che congiunge i punti $t(i),Y(i)$. Definiamo inoltre

$$K(x) = \int_{-\infty}^{x} H(x')\, dx' =$$

$$= \sum_{i=2}^{m} \frac{Y(i)-Y(i-1)}{t(i)-t(i-1)} \Big((x-t(i-1))^2\, u(x-t(i-1)) - (x-t(i))^2\, u(x-t(i)) \Big) .$$

Chiamiamo EH(.) le stime dei valori di aspettazione calcolate ponendo H(x) e K(x) al posto di F(x) e I(x) nelle formule del paragrafo 2. Risulta

$$EH(X) = \sum_{i=2}^{m} (Y(i)-Y(i-1))(t(i)+t(i-1))/2,$$

(i punti di discontinuita' in G(x) sono stati scelti in modo che risultasse EG(X)=EH(X))

$$EH(X^2) = \sum_{i=2}^{m} (Y(i)-Y(i-1))(t^2(i)+t(i)t(i-1)+t^2(i-1))/3.$$

3.3 Difficolta'

Sono state eseguite diverse simulazioni con valori t(i) spaziati uniformemente in un intervallo comprendente la regione in cui la distribuzione F passa da 0 a 1. I risultati sono soddisfacenti per le stime di E(X) fatte con EG(X)=EH(X); non lo sono affatto per le stime di $E(X^2)$ fatte con $EG(X^2)$ o con $EH(X^2)$, che tra loro differiscono ben poco: la varianza risulta quasi sempre sottostimata, e la sua stima diventa acettabile solo se si eseguono centinaia di prove, con qualche decina di punti nella regione in cui F e' abbastanza diversa sia da 0 che da 1.

Sarebbe opportuno calçolare la distribuzione di probabilita' di EG(X) e di $EG(X^2)$, data la distribuzione di X, in funzione dei valori assegnati a t(i) e n(i). Tuttavia e' ragionevole ammettere che, col metodo proposto in questo paragrafo, la varianza risulti sottostimata a causa della difficolta' di osservare le "code" della distribuzione. Sia per esempio, t tale che $0 < F(t) \ll 1$: l'evento $S \leq t$ ha probabilita' F(t) di realizzarsi e per osservarlo occorre ripetere, in media, 1/F(t) volte la prova con lo stesso impulso t; se invece fosse possibile estrarre un campione della variabile casuale S, si avrebbe, in media, un valore minore di t con 1/F(t) prove complessivamente, insieme alle informazioni sulla distribuzione contenute in tutti gli altri valori del campione.

4. Modelli a due parametri

Il problema qui sopra evidenziato non si presenta se si puo' supporre che la distribuzione di probabilita' della S non abbia code (come, per esempio, una distribuzione uniforme in un intervallo), oppure abbia code di forma conosciuta (come, per esempio, una distribuzione normale). Se in particolare si suppone che essa dipenda da due soli parametri x1 e x2 (per esempio media e varianza nella distribuzione normale, o gli estremi dell'intervallo nella distribuzione uniforme), allora si puo' indicare con F(x;x1,x2) la distribuzione cumulata di probabilita' di S e, disponendo delle stime Y'=K'/n' e Y"=K"/n" della F nei punti t' e t", si puo' risolvere il sistema (in generale non lineare)

$$\begin{cases} F(t';x1,x2) = Y' \\ F(t'';x1,x2) = Y'' \end{cases} \qquad (1)$$

rispetto alle incognite x1 e x2.

Il sistema (1) e' ben condizionato se le stime Y' e Y" sono abbastanza diverse tra loro ed entrambe abbastanza diverse sia da 0 che da 1; in caso contrario si trovano infinite soluzioni appartenenti a regioni piu' o meno ampie del piano x1, x2.

Il problema si sposta alla determinazione dei due punti t' e t" in cui stimare la F con prove ripetute: avere trovato tali valori significa avere gia' una stima dei parametri. Vedremo nel paragrafo 5 una tecnica adatta a cercare la coppia di valori t' e t". In ogni caso, oltre ai risultati ottenuti ripetendo le prove in t' e t", si disporra' anche dei risultati relativi ad altri valori di t, ed e' opportuno utilizzarli tutti.

4.1 Metodo dei minimi quadrati

Se si raccolgono i risultati in una lista, come descritto nel paragrafo 3, si ottiene un sistema (in generale non lineare) sovradeterminato

$$F(t(i);x1,x2) = Y(i) \qquad i=1,2...m$$

di m>2 equazioni nelle due incognite x1 e x2. Questo sistema puo' essere "risolto" nel senso dei minimi quadrati.

In tal senso pero' un'equazione relativa ad un valore di t replicato molte volte pesa quanto qualla relativa ad un impulso inviato una volta sola, percio' e' preferibile risolvere il sistema

$$F(t_j;x1,x2) = y_j \qquad j = 1,2,..M \qquad (2)$$

dove M e' il numero totale di prove effettuate (uguale alla somma degli n(i), i=1,2,...,m), gli impulsi t_j non sono necessariamente diversi tra loro e neppure ordinati, ed i valori y_j possono valere solo 0 o 1. Osserviamo comunque che, nel caso di n impulsi tutti uguali e k uguale al numero di volte in cui l'output e' risultato 1, la quantita' da minimizzare rispetto a F vale

$$k(1-F)^2 + (n-k)F^2 = nF^2 - 2kF + k$$

e questa quantita' e' minima per F=k/n. Pertanto la soluzione ai minimi quadrati del sistema (2) con M=n'+n" equazioni relative a n' prove con impulso t' e n" prove con impulso t", coincide con quella del corrispondente sistema (1).

4.2 Metodo della massima probabilita'

La ricerca di x1 e x2 a partire da M prove puo' essere fatta imponendo che sia massimo il prodotto

$$\prod_{j=1}^{M} p_j \qquad (3)$$

dove $p_j=F(t_j;x1,x2)$ se $y_j=1$,

$p_j=1-F(t_j;x1,x2)$ se $y_j=0$.

Poiche', nel caso di n impulsi tutti uguali, il prodotto vale

$$F^k(1-F)^{n-k}$$

(ed e' massimo per F=k/n), si vede che la funzione obbiettivo cambia solo per un fattore indipendente da x1 e x2 se viene scritta come

$$\prod_{i=1}^{m} b\big(k(i);n(i),F(t(i);x1,x2)\big)$$

dove b(k;n,F) rappresenta la probabilita' che una variabile casuale con distribuzione binomiale di parametri n e F assuma il valore K (il coefficiente binomiale (n su K) non dipende da F e quindi da x1 e x2).

4.3 Difficolta'

Sono stati applicati sia il metodo dei minimi quadrati che quello della massima probabilita' in una simulazione con distribuzione normale della soglia. Data la disponibilita' della funzione erf nelle librerie matematiche di programmi, e poiche' le derivate della funzione obbiettivo sono facilmente calcolabili, il probelma di ottimizzazione sembra agevolmente trattabile dal punto di vista algoritmico, ma risulta intrinsecamente difficile per le pessime caratteristiche della funzione obbiettivo: essa infatti risulta "piatta" su vaste regioni del piano x1,x2 e il successo nella ricerca del minimo risulta dipendere criticamente dal punto di partenza.

Anche per "risolvere" i problemi (2) e (3) occorre dunque partire da una stima adeguata di x1 e x2; a questo scopo puo' servire la tecnica seguente.

5. <u>Tecnica della bisezione bilaterale</u>

La ricerca di due valori dell'impulso, che soddisfino le condizioni viste all'inizio del paragrafo 4, puo' essere fatta agevolmente se si sonoscono due valori iniziali t1 e t2 per i quali si abbia, praticamente, F(t1)=0 e F(t2)=1; allora, detta output(x) la funzione che rappresenta il risultato casuale di una prova con impulso di altezza x, l'algoritmo seguente

```
t3:=t2; t2:=t1; t1:=t2-(t3-t2); t4:=t3+(t3-t2);
loop
   t5:=(t2+t3)/2; y5:=output(t5);
   if y5=0 then
      t6:=(t3+t4)/2; y6:=output(t6);
      if y6=1 then
         t1:=t2; t2:=t5; t4:=t6;
      else
         t1:=t5; t2:=t3; t3:=t6;
      end if;
   else
      t6:=(t1+t2)/2; y6:=output(t6);
      if y6=0 then
         t1:=t6; t4:=t3; t3:=t5;
      else
         t3:=t2; t2:=t6; t4:=t5;
      end if;
   end if;
   exit when y5=y6;
end loop;
```

fornisce quattro valori $t1<t2<t3<t4$ (salvo errori di troncamento numerico, vedi piu' avanti) equidistanti in cui l'output e' risultato rispettivamente 0, 1, 0, 1 alla prima prova, mentre l'output e' risultato 0 per tutti i valori minori di t1 e 1 per tutti quelli maggiori di t4; questa situazione garantisce che $F(t2) > 0$ e che $F(t3) < 1$. L'algoritmo e' basato sulla tecnica della bisezione; rispetto alla semplice bisezione si raddoppia il numero di prove, ma si realizza anche il criterio di arresto.

L'algoritmo non garantisce pero' che F(t2) sia abbastanza diversa da F(t3); le prove sperimentali indicano al contrario che l'intervallo tra t2 e t3 risulta in media piccolo rispetto alla deviazione standard. Questo e' un grave inconveniente poiche', per risolvere il sistema (1) con t'=t2 e t"=t3, puo' risultare necessario un grande numero di prove affinche' le distribuzioni delle stime di F(t') e di F(t") non si sovrappongano troppo.

E' necessario pertanto garantirsi che l'intervallo tra t2 e t3 non sia troppo piccolo. Innanzitutto, la limitata precisione dei numeri di macchina potrebbe portare a t2=t3 in seguito ad una sfortunata (ma non impossibile) successione di output: il problema pratico ci suggerisce pero' un intervallo eps>0 sicuramente minore della deviazione standard; lo useremo pertanto nell'algoritmo seguente

```
d:=max(eps,t3-t2);
loop
   for n in 1..nmax loop
      y1:=output(t1);
      exit when y1=1;
   end loop;
   exit when y1=0;
   t2:=t1; t1:=t1-d; d:=d+d;
end loop;
d:=d/2;
loop
   for n in 1..nmax loop
      y4:=output(t4);
      exit when y4=0;
   end loop;
   exit when y4=1;
   t3:=t4; t4:=t4+d; d:=d+d;
end loop;
```

poiche' la probabilita' che questo algoritmo fallisca il suo scopo e' minore di $(1/2)^{nmax}$, sembra ragionevole prendere nmax intorno a 10. Va osservato comunque che il numero di prove necessario per completare questo algoritmo cresce con nmax non piu' che linearmente: infatti i loop interni vengono eseguiti nmax volte solo l'ultima volta, se nmax e' abbastanza grande.

A questo punto i valori t1<t2<t3<t4 possono non essere equidistanti, ma e' risultato ancora output(t2)=1 e output(t3)=0 in una su al piu' nmax prove, mentre in altrattante prove e' risultato sempre output(t1)=0 e output(t4)=1.

6. Conclusioni

La tecnica del paragrafo 5 dovrebbe fornire due valori t2 e t3 che indicano sia la localizzazione che lo sparpagliamento della variabile casuale S. Inoltre puo' venire memorizzata la lista indicata nel paragrafo 3, e da questa si possono ricavare le stime di media e varianza suggerite nello stesso paragrafo.

Se la distribuzione di S puo' essere supposta normale, allora conviene sfruttare i dati della lista per risolvere il problema di minimi quadrati (2) o quello della massima probabilita' (3) descritti nel paragrafo 4.

Se il calcolo numerico nei problemi (2) e (3) risulta piu' costoso che non qualche centinaio di prove sul dispositivo, allora puo' essere opportuno replicare le prove con impulsi t'=t2 e t"=t3 e risolvere il sistema (1). Tra l'altro questo consente di verificare che t3-t2 non sia molto minore della deviazione standard: se dopo n'=n"=n prove, con n dell'ordine di qualche decina, risulta K"-K' < SQRT(n), allora bisogna porre t':=t'-d, se K'+K" > n altrimenti porre t":=t"+d, e riprovare.

Il problema piu' importante che rimane da affrontare e' quello di valutare la probabilita' che la varianza della variabile casuale sia maggiore della stima ottenuta con uno dei metodi indicati.

Bibliografia

(1) M. Abramowitz and I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions with ...", National Bureau of Standards, Washington 1964.

(2) M. A. Golberg, "An Introduction to Probability Theory with Statistical Applications", Plenum Press, New York, 1984.