

Consiglio Nazionale delle Ricerche

**Gli elementi guscio nel codice agli elementi finiti  
NOSA.**

*Cristina Padovani, Andrea Pagni, Giuseppe Pasquinelli*

Rapporto CNUCE-B4-1998-012

**CNUCE**

**Pisa**

Gli elementi guscio nel codice agli elementi finiti  
NOSA

Cristina Padovani, Andrea Pagni, Giuseppe Pasquinelli  
CNUCE/C.N.R.,  
via S. Maria, 36 - 56126 PISA (Italy)  
Nota interna  
CNUCE-B4-1998-012

Luglio 1998  
Email: [g.pasquinelli@cnuce.cnr.it](mailto:g.pasquinelli@cnuce.cnr.it)

## 1 Abstract

In this report a complete description is done of the shell elements used inside the FEM code NOSA. After a brief introductory section dealing with the hypotheses, which qualify a solid as a shell, and with the representation of the displacement field, the thin and thick shell elements implemented in the code are fully described. The last section of the report describes a shell element appropriate for heat transfer problems, which will be available in a brief time.

## 2 Introduzione

Nei problemi di meccanica strutturale si incontrano spesso elementi strutturali, come volte, pareti, pannelli, *etc.*, il cui spessore è molto piccolo rispetto alle altre due dimensioni spaziali; tali elementi strutturali sono di solito denominati gusci o piastre.

Nei codici di calcolo agli elementi finiti esistono speciali elementi, detti elementi guscio o shells, adatti a modellare tale tipo di strutture.

Nel presente lavoro, dopo un capitolo iniziale in cui sono brevemente descritte alcune proprietà geometriche delle strutture a guscio e del loro campo di spostamento, saranno descritti i due tipi di elemento guscio presenti nel codice NOSA impiegati nella soluzione di problemi strutturali statici e dinamici.

Nel capitolo finale verrà descritto un elemento guscio, non ancora introdotto in NOSA, adatto a casi di conduzione del calore in problemi termomeccanici.

Il presente lavoro costituisce una semplificazione e, per alcuni versi, un ampliamento di una precedente pubblicazione [1] a cui rimandiamo per una più ampia descrizione delle proprietà generali dei gusci e per una più estesa bibliografia.

## 3 Geometria e spostamenti del guscio

Si suppone che la superficie media del guscio sia abbastanza regolare per cui quasi ovunque possa essere definito un sistema di riferimento ortonormale destro di versori  $e_1, e_2, e_3$ , e coordinate  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , dove  $e_3$  è la normale alla superficie media e vale  $-\frac{h}{2} \leq \eta_3 \leq \frac{h}{2}$  dove  $h$  è lo spessore del guscio (vd. fig. 1).

Se  $r$  è la posizione di un generico punto sulla superficie media, allora i punti del guscio allineati lungo la normale passante per  $r$  avranno posizione  $p$  data da:

$$p = r + \eta_3 e_3(r). \quad (1)$$

Quando il guscio subisce una deformazione  $F$ , si fanno le seguenti ipotesi:

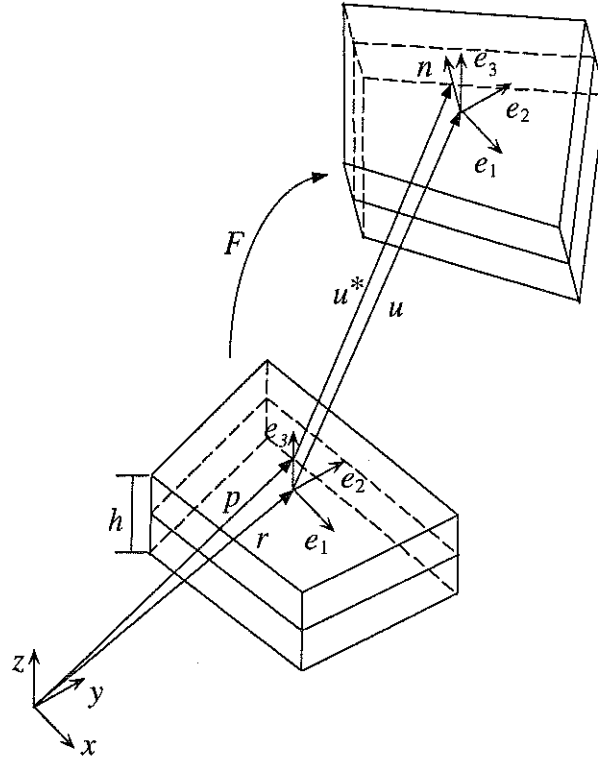


Figure 1: Spostamenti del guscio

1. gli spostamenti sono piccoli rispetto alle dimensioni della struttura e, quindi, le deformazioni sono infinitesime;
2. ogni segmento retto allineato secondo la normale  $e_3(r)$  si trasforma in un altro segmento retto della stessa lunghezza e, quindi, lo spessore del guscio resta invariato e la normale  $e_3(r)$  si trasforma in un altro versore  $n(r)$ .

Allora, detti  $r^*$  e  $p^*$  i deformati di  $r$  e  $p$  si ha:

$$r^* = r + u(r), \quad (2)$$

$$p^* = p + u^*(r) = r^* + \eta_3 n(r), \quad (3)$$

dove  $u(r)$  e  $u^*(r)$  sono gli spostamenti subiti dal punto  $r$  sulla superficie media e dal punto  $p$ , rispettivamente.

Inoltre, se facciamo l'ulteriore ipotesi che il versore  $n(r)$  sia normale in  $r^*$  alla superficie media del guscio deformato (ipotesi di Love-Kirchhoff), diremo che il guscio è sottile, mentre, nel caso generale, diremo che il guscio è spesso.

Da (1), (2) e (3) si ha:

$$p^* - p = u^*(r) = u(r) + \eta_3(n(r) - e_3(r)). \quad (4)$$

Poiché  $e_3(r)$  ed  $n(r)$  sono versori, si ha che  $n(r)$  può essere ottenuto da  $e_3(r)$  con una rotazione. Detto  $\theta$  il vettore rotazione (vd. fig. 2), che è infinitesimo per l'ipotesi

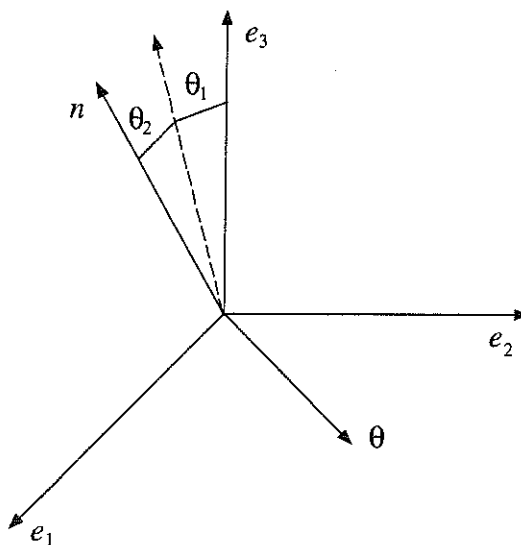


Figure 2: Rotazione del versore normale.

2 e supponendo inoltre che i raggi di curvatura della superficie media del guscio siano quasi costanti e molto maggiori dello spessore e degli spostamenti (ipotesi di guscio quasi piatto), allora, posto

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta \cdot e_1, \\ \theta_2 &= \theta \cdot e_2, \\ \theta_3 &= \theta \cdot e_3 = 0, \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$n(r) - e_3(r) = \theta_2 e_1 - \theta_1 e_2, \quad (5)$$

e quindi la (4) diviene:

$$u^*(r) = u(r) + \eta_3(\theta_2 e_1 - \theta_1 e_2) = u(r) + \eta_3(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \theta. \quad (6)$$

## 4 Il guscio sottile

Nel codice NOSA esiste un elemento guscio sottile (elemento n. 5) del tipo nonconforme [1], in quanto alcune componenti di rotazione sono variabili indipendenti e non calcolate per differenziazione dal campo di spostamento della superficie media.

Tale elemento, sviluppato da J.C. Nagtegaal [2] e basato sull'ipotesi discreta di Kirchhoff [1], è un quadrilatero a lati retti con 8 nodi: i primi 4 nodi sono posti ai vertici del quadrilatero e i restanti sono a metà dei lati (vd fig.3).

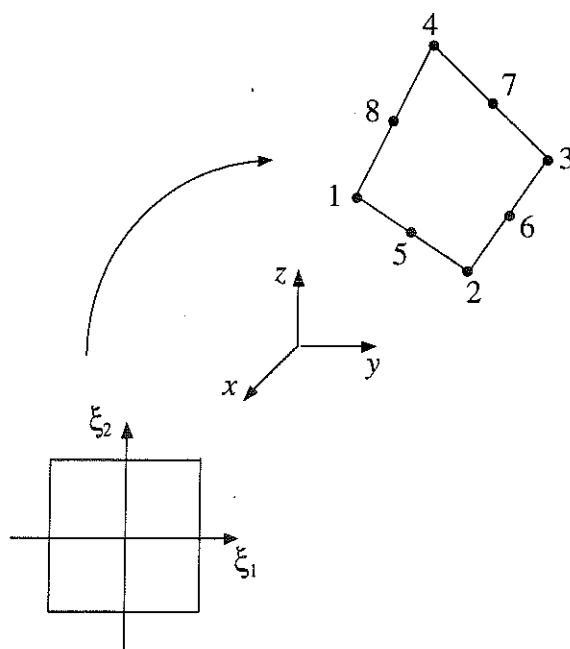


Figure 3: Nodi e coordinate gaussiane.

Riguardo al campo di spostamento, si ha che i quattro nodi d'angolo hanno 3 gradi di libertà ciascuno che sono le componenti, nel riferimento cartesiano globale, dello spostamento  $u$  della superficie media, mentre i quattro nodi di metà lato hanno come unico grado di libertà l'angolo di rotazione attorno alla direzione del lato, preso positivo se in senso antiorario visto dal nodo estremo del lato che ha numero d'ordine globale maggiore.

- Tale elemento ha buone caratteristiche: è semplice da usare, anche nella modellazione di strutture scatolate e/o di nervature di rinforzo;
- ha una buona convergenza;

- non mostra modi di deformazione a energia nulla (meccanismi);
- è stratificato e, usando l'opzione COMPOSITE, è possibile specificare lo spessore e le proprietà del materiale per ogni singolo strato (fino ad un massimo di 99 strati);
- può essere facilmente degenerato ad elemento triangolare.

#### 4.1 Geometria dell'elemento e basi locali

Riferendoci alla fig. (3), l'elemento guscio può ottenersi per mappatura nello spazio di un quadrato standard di lato 2 e centrato nell'origine del piano delle coordinate gaussiane  $\xi_1$  e  $\xi_2$ .

La posizione  $r$  di un punto della superficie media è ottenuta a partire dalle posizioni dei quattro nodi d'angolo,

$$r = \sum_{i=1}^4 \phi_i(\xi_1, \xi_2) r_i, \quad (7)$$

dove  $r_i$  sono le posizioni dei nodi d'angolo e  $\phi_i(\xi_1, \xi_2)$  sono le funzioni di forma bilineari

$$\phi_i(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1^i \xi_1)(1 + \xi_2^i \xi_2) \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

con  $\xi_1^i$  e  $\xi_2^i$  coordinate gaussiane dell' $i$ -esimo nodo d'angolo.

Derivando la posizione  $r$  rispetto alle coordinate curvilinee otteniamo i vettori tangenti alle linee coordinate:

$$\begin{aligned} r_{,1} &= \frac{\partial r}{\partial \xi_1} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_1} r_i = g \xi_2 + h, \\ r_{,2} &= \frac{\partial r}{\partial \xi_2} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_2} r_i = g \xi_1 + k, \end{aligned} \quad (9)$$

(la virgola che precede un indice sta a indicare derivazione rispetto alla coordinata con tale indice) con

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_3}{2} - \frac{r_2 + r_4}{2} \right), \\ h &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_2 + r_3}{2} - \frac{r_1 + r_4}{2} \right) = \frac{1}{2} (r_6 - r_8), \\ k &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_3 + r_4}{2} - \frac{r_1 + r_2}{2} \right) = \frac{1}{2} (r_7 - r_5). \end{aligned} \quad (10)$$

Dall'espressione di  $h$  e  $k$  deduciamo che i nodi di metà lato stanno su uno stesso piano e che  $h$  e  $k$  sono tangenti alla superficie media nel punto di coordinate  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , detto il centroide dell'elemento.

Da  $r_{,1}$  e  $r_{,2}$  il versore  $e_3$  normale alla superficie media dell'elemento è:

$$e_3(r) = \frac{r_{,1} \times r_{,2}}{\|r_{,1} \times r_{,2}\|}. \quad (11)$$

Da osservare che il verso di  $e_3$  è quello da cui i nodi d'angolo sono visti succedersi in senso antiorario.

I vettori  $r_{,1}, r_{,2}, e_3$  costituiscono una base che non è ortogonale, nè unitaria, mentre abbiamo visto nel capitolo precedente che è molto conveniente disporre di una base ortonormale in ogni punto della superficie media dell'elemento. Costruiremo, allora, una base ortonormale nel centroide che poi proietteremo opportunamente negli altri punti della superficie media dell'elemento.

Consideriamo quindi i due vettori tangenti  $r_{,1}$  e  $r_{,2}$ , calcolati nel centroide, e costruiamo i due vettori ortogonali

$$a = \frac{r_{,1}}{\|r_{,1}\|} + \frac{r_{,2}}{\|r_{,2}\|}, \quad b = \frac{r_{,1}}{\|r_{,1}\|} - \frac{r_{,2}}{\|r_{,2}\|}, \quad (12)$$

poniamo

$$e_1 = \frac{a}{\sqrt{2}\|a\|} + \frac{b}{\sqrt{2}\|b\|}, \quad e_2 = \frac{a}{\sqrt{2}\|a\|} - \frac{b}{\sqrt{2}\|b\|}. \quad (13)$$

La terna  $e_1, e_2, e_3$  costituisce una base ortonormale nel centroide dell'elemento. Se l'elemento è piatto, la terna centroidale è usata anche negli altri punti della superficie media, altrimenti si procede nel modo seguente. Siano  $e_3$  ed  $e'_3$  le normali calcolate nel centroide e in un punto generico  $r'$ , rispettivamente; definito il versore  $s_1$  mediante la relazione:

$$s_1 = \frac{e_3 \times e'_3}{\|e_3 \times e'_3\|}, \quad (14)$$

si ponga

$$s_2 = e_3 \times s_1 \quad \text{e} \quad s'_2 = e'_3 \times s_1.$$

Il tensore  $H = s_1 \otimes s_1 + s'_2 \otimes s_2 + e'_3 \otimes e_3$ , applicato alla base centroidale, permette di ottenere la base ortonormale  $e'_1, e'_2, e'_3$  nel punto  $r'$ ,



$$\begin{aligned} e'_1 &= He_1 = (s_1 \cdot e_1)s_1 + (s_2 \cdot e_1)s'_2, \\ e'_2 &= He_2 = (s_1 \cdot e_2)s_1 + (s_2 \cdot e_2)s'_2. \end{aligned} \quad (15)$$

L'adozione della base ortonormale locale  $e_1, e_2, e_3$  (omettiamo gli apici per brevità) equivale ad una nuova parametrizzazione della superficie media dell'elemento. Indicate con  $\eta_1, \eta_2$  le nuove coordinate, la posizione di un punto  $r$  sulla superficie media sarà

$$\tilde{r}(\eta_1, \eta_2) = r(\xi_1(\eta_1, \eta_2), \xi_2(\eta_1, \eta_2)). \quad (16)$$

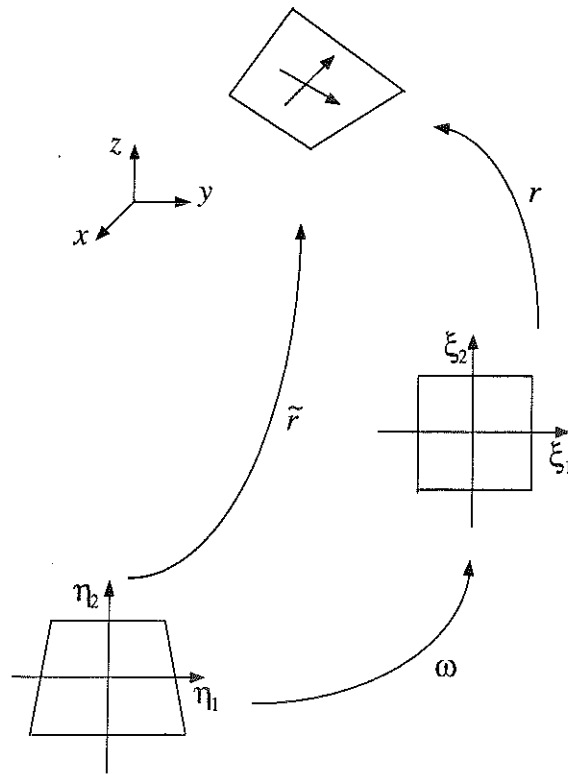


Figure 4: Parametrazioni dell'elemento.

Riferendoci alla fig. 4 si ha che

$$\tilde{r} = r \circ \omega,$$

ed i nuovi vettori tangenti saranno ora

$$\tilde{r}_{,1} = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \eta_1} = e_1, \quad \tilde{r}_{,2} = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \eta_2} = e_2. \quad (17)$$

Differenziando la relazione

$$r = \tilde{r} \circ \omega^{-1},$$

si ottiene

$$\nabla r = \nabla \tilde{r} \nabla \omega^{-1}, \quad (18)$$

o, più esplicitamente,

$$\left[ \frac{\partial r}{\partial \xi_1}, \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right] = \left[ \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \eta_1}, \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \eta_2} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Da (17) e (18), premoltiplicando per  $(\nabla \tilde{r})^T$  e tenendo conto che  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$  si ha:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \cdot r_{,1} & e_1 \cdot r_{,2} \\ e_2 \cdot r_{,1} & e_2 \cdot r_{,2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

e quindi per le derivate delle funzioni di forma  $\phi_i$  avremo:

$$\left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1}, \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} \right) = \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_2} \right) J. \quad (21)$$

## 4.2 Spostamenti e rotazioni

Gli spostamenti  $u(r)$  della superficie media sono interpolati a partire dagli spostamenti  $u_i$  dei nodi d'angolo usando le stesse funzioni di forma  $\phi_i$  usate per interpolare la geometria dell'elemento,

$$u = \sum_{i=1}^4 \phi_i(\eta_1, \eta_2) u_i, \quad (22)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_1} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} u_i, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta_2} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} u_i. \quad (23)$$

Per quanto riguarda le rotazioni nei nodi di metà lato, si ha che, dato il basso ordine delle funzioni di forma  $\phi_i$ , non è possibile calcolare correttamente tutte componenti di rotazione per differenziazione del campo di spostamento. Le ipotesi da introdurre e le scelte da compiere per un corretto funzionamento dell'elemento sono riportate in [1],[2]. Si osservi che tra le componenti del gradiente di spostamento è continua soltanto quella lungo il lato comune a due elementi adiacenti; quindi le componenti di rotazione che non possono essere scritte solo in funzione di questa componente del gradiente di spostamento devono essere assunte variabili indipendenti.

Per mostrare ciò, dobbiamo innanzitutto scegliere basi ortonormali nei punti di metà lato appropriate per la rappresentazione delle rotazioni in tali punti.

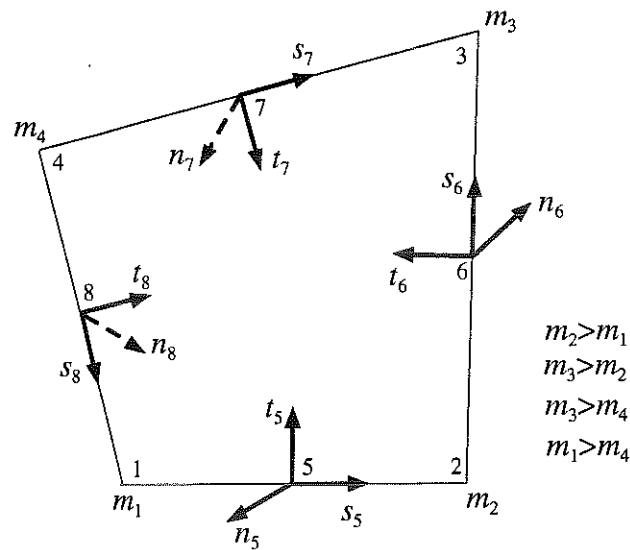


Figure 5: Sistemi di riferimento per le rotazioni.

Riferendoci alla fig. 5, scegliamo su ogni nodo  $j$  ( $j = 5, 6, 7, 8$ ) una base ortonormale composta da:

1. il versore  $s_j$  parallelo al lato e orientato verso il nodo d'angolo con maggior numero d'ordine globale;

2. il versore  $t_j$  che giace nel piano individuato dai quattro nodi di metà lato, perpendicolare al lato e orientato verso l'interno dell'elemento;
3. il versore normale  $n_j$  definito da  $n_j = s_j \times t_j$ .

Il vettore rotazione nodale  $\theta_j$  ( $j = 5, 6, 7, 8$ ) sarà quindi scritto come:

$$\theta_j = \theta_j^s s_j + \theta_j^t t_j + \theta_j^n n_j; \quad (24)$$

dove:

$$\begin{aligned} \theta_j^s & \text{ è variabile indipendente;} \\ \theta_j^t & = -\frac{\partial}{\partial s_j}(u \cdot n_j) = -\sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j}(n_j \cdot u_i); \\ \theta_j^n & = \frac{\partial}{\partial s_j}(u \cdot t_j) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j}(t_j \cdot u_i). \end{aligned} \quad (25)$$

In (25) le derivate sono fatte nella direzione del lato e precisamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} & = \pm \frac{2}{l_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2 = \mp 1} \quad \text{sui lati 1-2 e 3-4, rispettivamente,} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} & = \pm \frac{2}{l_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_1 = \pm 1} \quad \text{sui lati 2-3 e 1-4, rispettivamente,} \end{aligned} \quad (26)$$

nelle quali  $l_j$  è la lunghezza del lato comprendente il nodo  $j$  ed il segno è positivo o negativo se  $s_j$  è concorde o discorde, rispettivamente, con il verso crescente della coordinata curvilinea gaussiana.

Tenendo conto di (25), la (24) diviene:

$$\begin{aligned} \theta_j & = \theta_j^s s_j + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} [(t_j \cdot u_i) n_j - (n_j \cdot u_i) t_j] = \\ & = \theta_j^s s_j + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} (n_j \otimes t_j - t_j \otimes n_j) u_i = \\ & = \theta_j^s s_j + C_j \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} u_i; \end{aligned} \quad (27)$$

avendo posto  $\mathbf{C}_j = n_j \otimes t_j - t_j \otimes n_j$ .

Per l'interpolazione delle rotazioni in ogni punto della superficie media dell'elemento, è opportuno considerare anche il vettore rotazione  $\theta_9$  nel centroide, considerato come nono nodo dell'elemento; il valore di tale rotazione è posto uguale alla media dei valori delle rotazioni nei nodi di metà lato, per cui avremo:

$$\theta_9 = \frac{1}{4} \sum_{j=5}^8 \theta_j. \quad (28)$$

Assumiamo che il vettore rotazione  $\theta$  in un punto qualsiasi  $r$  della superficie media dell'elemento sia ottenuto per interpolazione delle rotazioni nodali  $\theta_j$  ( $j = 5, 6, 7, 8, 9$ ) mediante apposite funzioni di forma  $\psi_j(\xi_1, \xi_2)$ , cioè poniamo:

$$\theta = \sum_{j=5}^9 \psi_j \theta_j, \quad (29)$$

dove

$$\begin{aligned} \psi_5(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{2}\xi_2 - \frac{3}{16}\xi_1^2 + \frac{9}{16}\xi_2^2 + e_5\xi_1\xi_2, \\ \psi_6(\xi_1, \xi_2) &= +\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{9}{16}\xi_1^2 - \frac{3}{16}\xi_2^2 + e_6\xi_1\xi_2, \\ \psi_7(\xi_1, \xi_2) &= +\frac{1}{2}\xi_2 - \frac{3}{16}\xi_1^2 + \frac{9}{16}\xi_2^2 - e_5\xi_1\xi_2, \\ \psi_8(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{9}{16}\xi_1^2 - \frac{3}{16}\xi_2^2 - e_6\xi_1\xi_2, \\ \psi_9(\xi_1, \xi_2) &= +1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Il calcolo delle funzioni di forma  $\psi_j$  e dei fattori di forma  $e_5$  ed  $e_6$  viene riportato in Appendice.

Allora, tenendo conto di 27) e di 28), la 29) diviene:

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{j=5}^8 \psi_j \theta_j + \psi_9 \theta_9 = \sum_{j=5}^8 \left( \psi_j + \frac{1}{4} \psi_9 \right) \theta_j = \\ &= \sum_{j=5}^8 \left( \psi_j + \frac{1}{4} \psi_9 \right) (\theta_j^s s_j + \theta_j^t t_j + \theta_j^n n_j) = \\ &= \sum_{j=5}^8 \left( \psi_j + \frac{1}{4} \psi_9 \right) \left( \theta_j^s s_j + \mathbf{C}_j \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} u_i \right). \end{aligned} \quad (31)$$

### 4.3 Deformazioni

Le deformazioni del guscio sono calcolate nella base ortonormale locale  $e_1, e_2, e_3$ . In un generico  $p$  di coordinate locali  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , si ha (cfr. Cap. 1):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial \eta_1} (e_1 \cdot u^*); \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial}{\partial \eta_2} (e_2 \cdot u^*); \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{\partial}{\partial \eta_1} (e_2 \cdot u^*) + \frac{\partial}{\partial \eta_2} (e_1 \cdot u^*); \\
 \varepsilon_{33} &= 0, \quad \text{per l'invarianza dello spessore;} \\
 \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{13} = 0, \quad \text{per l'ipotesi di guscio sottile.}
 \end{aligned} \tag{32}$$

Da (6) è facile dimostrare che

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \epsilon_{11} + \eta_3 k_{11}, \\
 \varepsilon_{22} &= \epsilon_{22} + \eta_3 k_{22}, \\
 \varepsilon_{12} &= \epsilon_{12} + \eta_3 k_{12}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Le quantità  $\epsilon_{ij}$  sono note come deformazioni membranali, mentre  $k_{ij}$  sono i cambiamenti di curvatura. Come vedremo in seguito, è opportuno che le deformazioni membranali e i cambiamenti di curvatura siano calcolati separatamente. Da notare inoltre che i termini contenenti le derivate dei vettori della base sono trascurabili per l'ipotesi di guscio quasi piatto.

#### 4.3.1 Deformazioni membranali

Si ha:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial}{\partial \eta_1} (e_1 \cdot u) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} (e_1 \cdot u_i); \tag{34}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial}{\partial \eta_2} (e_2 \cdot u) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} (e_2 \cdot u_i). \tag{35}$$

Si assume che la componente  $\epsilon_{12}$  sia costante su tutto l'elemento ed uguale al suo valore nel centroide: si tratta di un accorgimento numerico per ridurre l'eccessiva rigidità alla deformazione di taglio nel piano tangente alla superficie media; si ha quindi

$$\epsilon_{12} = \frac{\partial}{\partial \eta_2} (e_1^c \cdot u) + \frac{\partial}{\partial \eta_1} (e_2^c \cdot u) = \sum_{i=1}^4 \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} e_1^c + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} e_2^c \right] \cdot u_i, \quad (36)$$

dove i termini in parentesi quadra sono calcolati nel centroide dell'elemento. Tenendo conto di (34), (35) e (36), possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^m u_i, \quad (37)$$

con

$$\mathbf{B}_i^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} (e_1)^T \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} (e_2)^T \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} (e_1^c)^T + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} (e_2^c)^T \end{bmatrix}. \quad (38)$$

### 4.3.2 Cambiamenti di curvatura

Da (6), (32) e (33), si ha

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\partial}{\partial \eta_1} (e_2 \cdot \theta), \\ k_{22} &= -\frac{\partial}{\partial \eta_2} (e_1 \cdot \theta), \\ k_{12} &= \frac{\partial}{\partial \eta_2} (e_2 \cdot \theta) - \frac{\partial}{\partial \eta_1} (e_1 \cdot \theta). \end{aligned} \quad (39)$$

Tenendo conto di (31), possiamo scrivere per  $k_{11}$

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum_{j=5}^8 e_2 \cdot \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta_1} + \frac{1}{4} \frac{\partial \psi_9}{\partial \eta_1} \right) \left( \theta_j^s s_j + \sum_{i=1}^4 \mathbf{C}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} u_i \right) = \\ &= \sum_{j=5}^8 \alpha_{j,1} e_2 \cdot s_j \theta_j^s + \sum_{i=1}^4 \left( \sum_{j=5}^8 \alpha_{j,1} e_2 \cdot \mathbf{C}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} \right) u_i, \end{aligned} \quad (40)$$

avendo posto  $\alpha_{j,1} = \frac{\partial}{\partial \eta_1} (\psi_j + \frac{1}{4} \psi_9)$ . Analogamente per  $k_{22}$  avremo

$$k_{22} = \sum_{j=5}^8 -\alpha_{j,2} e_1 \cdot s_j \theta_j^s + \sum_{i=1}^4 \left( \sum_{j=5}^8 -\alpha_{j,2} e_1 \cdot C_j \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} \right) u_i, \quad (41)$$

con  $\alpha_{j,2} = \frac{\partial}{\partial \eta_2} (\psi_j + \frac{1}{4} \psi_9)$ .

Infine per  $k_{12}$  si ha

$$k_{12} = \sum_{j=5}^8 (\alpha_{j,2} e_2 - \alpha_{j,1} e_1) \cdot s_j \theta_j^s + \sum_{i=1}^4 \left( \sum_{j=5}^8 (\alpha_{j,2} e_2 - \alpha_{j,1} e_1) \cdot C_j \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} \right) u_i. \quad (42)$$

Quindi, tenendo conto di (40), (41) e (42), possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^f u_i + \sum_{j=5}^8 \mathbf{B}_j^\theta \theta_j^s, \quad (43)$$

con

$$\mathbf{B}_i^f = \begin{bmatrix} \sum_{j=5}^8 \alpha_{j,1} e_2^T C_j \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} \\ - \sum_{j=5}^8 \alpha_{j,2} e_1^T C_j \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} \\ \sum_{j=5}^8 (\alpha_{j,2} e_2^T - \alpha_{j,1} e_1^T) C_j \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

e

$$\mathbf{B}_j^\theta = \begin{bmatrix} \alpha_{j,1} e_2 \cdot s_j \\ -\alpha_{j,2} e_1 \cdot s_j \\ (\alpha_{j,2} e_2 - \alpha_{j,1} e_1) \cdot s_j \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Riassumendo, possiamo facilmente vedere che, da (37) e (43), il campo di deformazione può scriversi come

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = [ \mathbf{B}^m + \eta_3 \mathbf{B}^f \quad \eta_3 \mathbf{B}^\theta ] \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{\theta^s\} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{\theta^s\} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

con



$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\theta^s\} = \begin{bmatrix} \theta_5^s \\ \theta_6^s \\ \theta_7^s \\ \theta_8^s \end{bmatrix}; \quad (47)$$

oppure, usando le caratteristiche di deformazione  $\epsilon_{ij}$  e  $k_{ij}$ , con  $i, j = 1, 2$ , si ha:

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^f & \mathbf{B}^\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{\theta\} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

#### 4.4 Matrice di rigidezza e caratteristiche di sollecitazione

La matrice di rigidezza  $\mathbf{K}^e$  ha la forma seguente:

$$\mathbf{K}^e = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\eta_3 \, dA, \quad (49)$$

dove  $A$  è l'area dell'elemento,  $\mathbf{B}$  è la matrice che esprime le relazioni di congruenza tra deformazioni e spostamenti (cfr. (46)), mentre  $\mathbf{D}$ , detta matrice costitutiva, è definita dalla relazione

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon \quad (50)$$

nel caso lineare, oppure da

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}\dot{\epsilon} \quad (51)$$

nei casi non lineari, dove con  $\sigma$  e  $\dot{\sigma}$  si è indicato il vettore delle componenti di sforzo e la sua derivata temporale, rispettivamente. Nel caso del guscio sottile,  $\mathbf{D}$  è una matrice  $3 \times 3$  che formalizza la relazione di stato piano di sforzo. Inserendo (50) o (51) in (49) e tenendo conto di (46), si ha

$$\mathbf{K}^e = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} + \eta_3 \mathbf{B}^{fT} \\ \eta_3 \mathbf{B}^{\theta T} \end{bmatrix} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m + \eta_3 \mathbf{B}^f & \eta_3 \mathbf{B}^\theta \end{bmatrix} \, d\eta_3 \, dA, \quad (52)$$

e, dopo semplici calcoli, si arriva a

$$\mathbf{K}^e = \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} & \mathbf{B}^{fT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{\theta T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^f & \mathbf{B}^\theta \end{bmatrix} dA, \quad (53)$$

dove

$$\mathbf{D}_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathbf{D} d\eta_3, \quad (54)$$

$$\mathbf{D}_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta_3 \mathbf{D} d\eta_3, \quad (55)$$

$$\mathbf{D}_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta_3^2 \mathbf{D} d\eta_3. \quad (56)$$

Da notare che se  $\mathbf{D}$  non dipende da  $\eta_3$ , allora si ha:

$$\mathbf{D}_0 = h \mathbf{D},$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{h^3}{12} \mathbf{D}.$$

La potenza  $W$  dello sforzo, definita da

$$W = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\eta_3 dA, \quad (57)$$

e in vista di (33), risulta

$$\begin{aligned} W &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \eta_3 \dot{\boldsymbol{k}}) d\eta_3 dA = \\ &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \eta_3 \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{k}}) d\eta_3 dA = \\ &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T & \dot{\boldsymbol{k}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \eta_3 \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} d\eta_3 dA = \\ &= \int_A \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T & \dot{\boldsymbol{k}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} dA, \end{aligned} \quad (58)$$

dove i vettori

$$N = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma d\eta_3, \quad (59)$$

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta_3 \sigma d\eta_3, \quad (60)$$

sono noti, rispettivamente, come sforzi normali e momenti flettenti o, complessivamente, come caratteristiche di sollecitazione.

#### 4.5 La matrice di massa del guscio sottile

La matrice di massa di un elemento, moltiplicata per il vettore delle accelerazioni nodali generalizzate  $\begin{bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{\theta}\} \end{bmatrix}$  dell'elemento, dà gli equivalenti nodali delle forze d'inerzia agenti sull'elemento stesso.

Detta  $\mathbf{N}$  la matrice tale che

$$\ddot{u}^* = \mathbf{N} \begin{bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{\theta}\} \end{bmatrix}, \quad (61)$$

dove  $\ddot{u}^*$  è l'accelerazione di un generico punto interno al guscio, e detta  $\rho$  la densità, allora la matrice di massa  $\mathbf{M}$  è definita dalla relazione:

$$\mathbf{M} = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\eta_3 dA. \quad (62)$$

Da (6), (22) e (31) si ha

$$\begin{aligned} \ddot{u}^* &= \sum_{i=1}^4 \phi_i \ddot{u}_i + \eta_3 (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \sum_{j=5}^8 \left( \psi_j + \frac{1}{4} \psi_9 \right) \left( \ddot{\theta}_j^s s_j + C_j \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} \ddot{u}_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^4 \left[ \phi_i + \eta_3 (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \sum_{j=5}^8 \alpha_j \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} C_j \right] \ddot{u}_i + \\ &\quad + \eta_3 \sum_{j=5}^8 \alpha_j (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) s_j \ddot{\theta}_j^s, \end{aligned}$$

e quindi, posto

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \sum_{j=5}^8 \alpha_j \frac{\partial \phi_i}{\partial s_j} \mathbf{C}_j, \\ \mathbf{Z}_j &= \alpha_j (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) s_j, \end{aligned}$$

e indicando con  $\mathbf{I}_3$  la matrice identica  $3 \times 3$ , si ha

$$\begin{aligned} \ddot{u}^* &= \sum_{i=1}^4 [\phi_i \mathbf{I}_3 + \eta_3 \mathbf{Y}_i] \ddot{u}_i + \eta_3 \sum_{j=5}^8 \mathbf{Z}_j \ddot{\theta}_j^s = [\mathbf{X} + \eta_3 \mathbf{Y}] \{u\} + \eta_3 \mathbf{Z} \{\theta\} = \\ &= [\mathbf{X} + \eta_3 \mathbf{Y} \quad \mathbf{Z}] \begin{bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{\theta}\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e allora

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T + \eta_3 \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Z}^T \end{bmatrix} [\mathbf{X} + \eta_3 \mathbf{Y} \quad \mathbf{Z}] d\eta_3 dA = \\ &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} + \eta_3 (\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{X}) + \eta_3^2 \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} & \eta_3 \mathbf{X}^T \mathbf{Z} + \eta_3^2 \mathbf{Y}^T \mathbf{Z} \\ \eta_3 \mathbf{Z}^T \mathbf{X} + \eta_3^2 \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} & \eta_3^2 \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \end{bmatrix} d\eta_3 dA, \end{aligned} \quad (63)$$

che, nel caso particolare in cui  $\rho$  non dipenda da  $\eta_3$ , diviene

$$\mathbf{M} = \int_A \rho \begin{bmatrix} h \mathbf{X}^T \mathbf{X} + \frac{h^3}{12} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} & \frac{h^3}{12} \mathbf{Y}^T \mathbf{Z} \\ \frac{h^3}{12} \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} & \frac{h^3}{12} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \end{bmatrix} dA. \quad (64)$$

## 5 L'elemento guscio spesso

L'elemento guscio spesso del codica NOSA (tipo 10) è un quadrilatero a 4 nodi con lati retti e 6 gradi di libertà per nodo: le 3 componenti dello spostamento  $u$  della superficie media e le 3 componenti del vettore rotazione  $\theta$ , nel riferimento cartesiano globale.

L'elemento ha gli stessi pregi del guscio sottile, con l'ulteriore vantaggio di dare un'informazione anche sulle deformazioni e sugli sforzi di taglio nello spessore del guscio.

La costruzione della base locale ortonormale è uguale a quella mostrata per il guscio sottile e non viene qui ripetuta; inoltre saranno usate le stesse notazioni dei capitoli precedenti.

Il vettore spostamento  $u^*$  nei punti interni del guscio è ancora dato dall'espressione (4) o (6), però, in questo caso, la deformata  $n$  della normale  $e_3$  non è più necessariamente normale al guscio deformato e quindi conviene considerare le componenti di rotazione  $\theta_1 = e_1 \cdot \theta$ , e  $\theta_2 = e_2 \cdot \theta$  come variabili indipendenti.

Le funzioni di forma bilineari  $\phi_i$ , già definite nel capitolo precedente, sono usate per interpolare sia lo spostamento della superficie media che il vettore rotazione, quindi, avremo:

$$u = \sum_{i=1}^4 \phi_i u_i, \quad (65)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^4 \phi_i \theta_i, \quad (66)$$

essendo  $u_i$  e  $\theta_i$  i vettori spostamento e rotazione del nodo  $i$ .

## 5.1 Deformazioni

Con le stesse notazioni e ipotesi del capitolo precedente, le componenti di deformazione nel riferimento ortonormale locale sono:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial \eta_1} (e_1 \cdot u^*) = e_1 \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \eta_1}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial}{\partial \eta_2} (e_2 \cdot u^*) = e_2 \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \eta_2}, \\ \varepsilon_{33} &= 0, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial}{\partial \eta_2} (e_1 \cdot u^*) + \frac{\partial}{\partial \eta_1} (e_2 \cdot u^*) = e_1 \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \eta_2} + e_2 \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \eta_1}, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{\partial}{\partial \eta_2} (e_3 \cdot u^*) + \frac{\partial}{\partial \eta_3} (e_2 \cdot u^*) = e_3 \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \eta_2} + e_2 \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \eta_3}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{\partial}{\partial \eta_1} (e_3 \cdot u^*) + \frac{\partial}{\partial \eta_3} (e_1 \cdot u^*) = e_3 \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \eta_1} + e_1 \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \eta_3}. \end{aligned} \quad (67)$$

Tenendo conto di (6), si ha:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= e_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta_1} + \eta_3 e_2 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1}, \\
\varepsilon_{22} &= e_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta_2} - \eta_3 e_1 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta_2}, \\
\varepsilon_{12} &= e_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta_2} + e_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta_1} + \eta_3 \left( e_2 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta_2} - e_1 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \right), \\
\varepsilon_{23} &= e_3 \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta_2} - e_1 \cdot \theta, \\
\varepsilon_{13} &= e_3 \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta_1} + e_2 \cdot \theta,
\end{aligned} \tag{68}$$

e, interpolando secondo (65) e (66), si ha infine

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} e_1 \cdot u_i + \eta_3 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} e_2 \cdot \theta_i \right), \\
\varepsilon_{22} &= \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} e_2 \cdot u_i - \eta_3 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} e_1 \cdot \theta_i \right), \\
\varepsilon_{12} &= \sum_{i=1}^4 \left( \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} e_1 + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} e_2 \right) \cdot u_i + \eta_3 \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} e_2 - \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} e_1 \right) \cdot \theta_i \right), \\
\varepsilon_{23} &= \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} e_3 \cdot u_i - \phi_i e_1 \cdot \theta_i \right), \\
\varepsilon_{13} &= \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} e_3 \cdot u_i + \phi_i e_2 \cdot \theta_i \right).
\end{aligned} \tag{69}$$

Analogamente al caso del guscio sottile, la componente  $\varepsilon_{12}$  è assunta costante su tutto l'elemento ed uguale al suo valore centroidale. Per il calcolo delle componenti  $\varepsilon_{23}$  e  $\varepsilon_{13}$  rimandiamo alla sezione successiva.

## 5.2 Condizioni sui tagli nello spessore

Le deformazioni di taglio nello spessore sono assunte costanti lungo i lati dell'elemento e uguali al valore nei punti medi dei lati stessi (si ricordi che in tali punti la terna locale ortonormale è uguale a quella centroidale, perché, per costruzione, il centroide ed i 4 nodi di metà lato sono su uno stesso piano).

Quindi (fig. 6), si ha

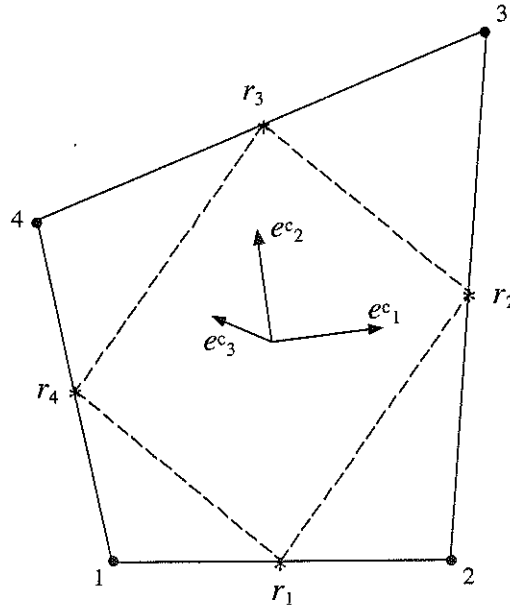


Figure 6: Punti per il calcolo dei tagli nello spessore.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{23}(2) &= \varepsilon_{23}(3) = \varepsilon_{23}(r_2), \\
 \varepsilon_{23}(1) &= \varepsilon_{23}(4) = \varepsilon_{23}(r_4), \\
 \varepsilon_{13}(1) &= \varepsilon_{13}(2) = \varepsilon_{13}(r_1), \\
 \varepsilon_{13}(3) &= \varepsilon_{13}(4) = \varepsilon_{13}(r_4).
 \end{aligned}
 \tag{70}$$

Da (69) abbiamo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{23}(r_2) &= \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \phi_i(r_2)}{\partial \eta_2} e_3^c \cdot u_i - \phi_i(r_2) e_1^c \cdot \theta_i \right) = \\
&= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i(r_2)}{\partial \eta_2} e_3^c \cdot u_i - e_1^c \cdot \frac{\theta_2 + \theta_3}{2}, \\
\varepsilon_{23}(r_4) &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i(r_4)}{\partial \eta_2} e_3^c \cdot u_i - e_1^c \cdot \frac{\theta_1 + \theta_4}{2}, \\
\varepsilon_{13}(r_1) &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i(r_1)}{\partial \eta_1} e_3^c \cdot u_i + e_2^c \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \\
\varepsilon_{13}(r_3) &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i(r_3)}{\partial \eta_1} e_3^c \cdot u_i + e_2^c \cdot \frac{\theta_3 + \theta_4}{2},
\end{aligned} \tag{71}$$

ed inoltre si assume che le deformazioni di taglio in un qualsiasi punto  $r$  della superficie media siano ottenute interpolando i loro valori nodali con le funzioni di forma  $\phi_i$ . Si ha allora

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{23}(r) &= \sum_{i=1}^4 \phi_i(r) \varepsilon_{23}(i), \\
\varepsilon_{13}(r) &= \sum_{i=1}^4 \phi_i(r) \varepsilon_{13}(i),
\end{aligned} \tag{72}$$

che tenendo conto di (70) e di (71), divengono

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{23}(r) &= (\phi_2(r) + \phi_3(r)) \varepsilon_{23}(r_2) + (\phi_1(r) + \phi_4(r)) \varepsilon_{23}(r_4) = \\
&= \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \phi_i(r_2)}{\partial \eta_2} (\phi_2(r) + \phi_3(r)) + \frac{\partial \phi_i(r_4)}{\partial \eta_2} (\phi_1(r) + \phi_4(r)) \right) e_3^c \cdot u_i + \\
&\quad - \frac{1}{2} (\phi_2(r) + \phi_3(r)) e_1^c \cdot (\theta_2 + \theta_3) - \frac{1}{2} (\phi_1(r) + \phi_4(r)) e_1^c \cdot (\theta_1 + \theta_4)
\end{aligned} \tag{73}$$

e



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{13}(r) &= (\phi_1(r) + \phi_2(r)) \varepsilon_{13}(r_1) + (\phi_3(r) + \phi_4(r)) \varepsilon_{13}(r_3) = & (74) \\
&= \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \phi_i(r_1)}{\partial \eta_1} (\phi_1(r) + \phi_2(r)) + \frac{\partial \phi_i(r_3)}{\partial \eta_1} (\phi_3(r) + \phi_4(r)) \right) e_3^c \cdot u_i + \\
&\quad + \frac{1}{2} (\phi_1(r) + \phi_2(r)) e_2^c \cdot (\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{2} (\phi_3(r) + \phi_4(r)) e_2^c \cdot (\theta_3 + \theta_4);
\end{aligned}$$

oppure, ponendo

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{\partial \phi_i(r_2)}{\partial \eta_2} (\phi_2(r) + \phi_3(r)) + \frac{\partial \phi_i(r_4)}{\partial \eta_2} (\phi_1(r) + \phi_4(r)), \\
b_2 &= b_3 = -\frac{1}{2} (\phi_2(r) + \phi_3(r)), \\
b_1 &= b_4 = -\frac{1}{2} (\phi_1(r) + \phi_4(r)), \\
c_i &= \frac{\partial \phi_i(r_1)}{\partial \eta_1} (\phi_1(r) + \phi_2(r)) + \frac{\partial \phi_i(r_3)}{\partial \eta_1} (\phi_3(r) + \phi_4(r)), \\
d_1 &= d_2 = \frac{1}{2} (\phi_1(r) + \phi_2(r)), \\
d_3 &= d_4 = \frac{1}{2} (\phi_3(r) + \phi_4(r)),
\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{23}(r) &= \sum_{i=1}^4 (a_i e_3^c \cdot u_i + b_i e_1^c \cdot \theta_i), & (75) \\
\varepsilon_{13}(r) &= \sum_{i=1}^4 (c_i e_3^c \cdot u_i + d_i e_2^c \cdot \theta_i).
\end{aligned}$$

### 5.3 Matrice di congruenza

Partendo dalle espressioni (69) e (75) è facile costruire la matrice di congruenza  $\mathbf{B}$ , di dimensioni  $5 \times 24$ , che esprime la relazione tra spostamenti generalizzati e componenti di deformazione, cioè:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Si osservi che per (69) e (75), la matrice di congruenza  $\mathbf{B}$  può scriversi come

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^m + \eta_3 \mathbf{B}^\theta. \quad (77)$$

#### 5.4 Matrice di rigidezza e caratteristiche di sollecitazione

Analogamente al caso del guscio sottile, la matrice di rigidezza ha la forma:

$$\mathbf{K}^e = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\eta_3 dA, \quad (78)$$

dove  $\mathbf{B}$  è la matrice di congruenza e  $\mathbf{D}$  la matrice costitutiva. In questo caso  $\mathbf{D}$  è una matrice  $5 \times 5$  ricavabile dalla matrice costitutiva tridimensionale imponendo la condizione  $\sigma_{33} = 0$ .

Inserendo (77) in (78) si ha

$$\mathbf{K}^e = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\mathbf{B}^{mT} + \eta_3 \mathbf{B}^{\theta T}) \mathbf{D} (\mathbf{B}^m + \eta_3 \mathbf{B}^\theta) d\eta_3 dA,$$

che, dopo semplici calcoli, diviene

$$\mathbf{K}^e = \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} & \mathbf{B}^{\theta T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^\theta \end{bmatrix} dA, \quad (79)$$

dove poniamo ancora

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_0 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mathbf{D} \, d\eta_3, \\
\mathbf{D}_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta_3 \mathbf{D} \, d\eta_3, \\
\mathbf{D}_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta_3^2 \mathbf{D} \, d\eta_3.
\end{aligned}$$

Da notare che la matrice  $\mathbf{B}^\theta$  ha le ultime due righe nulle e quindi anche  $\mathbf{D}_1$  e  $\mathbf{D}_2$  possono essere limitate alle sottomatrici  $3 \times 3$  che riguardano le componenti in piano. Da ciò si deduce che (79) può essere scritta come (si indicano tra parentesi le dimensioni delle varie matrici):

$$\mathbf{K}_{(24 \times 24)}^e = \int_A \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{B}_{(24 \times 5)}^{mT} & \mathbf{B}_{(24 \times 3)}^{\theta T} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{D}_{0(5 \times 5)} & \mathbf{D}_{1(3 \times 3)} \\ \mathbf{D}_{1(3 \times 3)} & \mathbf{D}_{2(3 \times 3)} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{B}_{(5 \times 24)}^m \\ \mathbf{B}_{(3 \times 24)}^\theta \end{array} \right] dA.$$

Per quanto riguarda le caratteristiche di deformazione, con un ragionamento analogo a quello fatto nel capitolo precedente, si ha:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{11} \, d\eta_3, \\
N_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{22} \, d\eta_3, \\
N_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{12} \, d\eta_3, \\
Q_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{23} \, d\eta_3, \\
Q_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{13} \, d\eta_3, \\
M_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta_3 \sigma_{11} \, d\eta_3, \\
M_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta_3 \sigma_{22} \, d\eta_3, \\
M_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta_3 \sigma_{12} \, d\eta_3.
\end{aligned} \tag{80}$$

Da notare in questo caso la presenza delle forze di taglio  $Q_1$  e  $Q_2$  nello spessore del guscio.

## 5.5 La matrice di massa del guscio spesso

Da (6), (65) e (66) si ha

$$\begin{aligned} u^* &= \sum_{i=1}^4 \phi_i (u_i + \eta_3 (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \theta_i) = \\ &= \sum_{i=1}^4 \left[ \phi_i \mathbf{I}_3 \quad \eta_3 \phi_i (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \right] \begin{bmatrix} u_i \\ \theta_i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ponendo  $\Phi_i = \phi_i \mathbf{I}_3$  e  $\mathbf{F}_i = \phi_i (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$ , si ha

$$u^* = \sum_{i=1}^4 \left[ \Phi_i \quad \eta_3 \mathbf{F}_i \right] \begin{bmatrix} u_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$$

e quindi la matrice di massa  $\mathbf{M}$  sarà composta da sottomatrici  $\mathbf{M}_{ij}$ , di dimensione  $6 \times 6$ , che legano i gradi di libertà dell' $i$ -esimo e del  $j$ -esimo nodo dell'elemento, con la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij} &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho \begin{bmatrix} \Phi_i^T \\ \eta_3 \mathbf{F}_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_j & \eta_3 \mathbf{F}_j \end{bmatrix} d\eta_3 dA = \\ &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho \begin{bmatrix} \Phi_i^T \Phi_j & \eta_3 \Phi_i^T \mathbf{F}_j \\ \eta_3 \mathbf{F}_i^T \Phi_j & \eta_3^2 \mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_j \end{bmatrix} d\eta_3 dA, \end{aligned} \quad (81)$$

la quale, nel caso particolare in cui  $\rho$  non dipenda da  $\eta_3$ , diviene:

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_A \rho \begin{bmatrix} h \Phi_i^T \Phi_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{h^3}{12} \mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_j \end{bmatrix} dA. \quad (82)$$

## 5.6 Avvertenza importante

Nel sistema di riferimento ortonormale locale la rotazione attorno alla normale  $e_3$  al guscio non è definita. Quindi, nel caso in cui l'elemento sia piano e la sua normale

coincida con un asse coordinato del sistema di riferimento cartesiano globale si ha che le matrici di rigidezza e di massa sono singolari, presentando degli zeri sulle righe e colonne corrispondenti al grado di libertà non definito. Possiamo ovviare a tale inconveniente ponendo una valore non nullo (per esempio il massimo dei termini diagonali) sulla diagonale principale delle matrici in corrispondenza del grado di libertà non definito, il che corrisponde anche ad imporre un valore nullo per tale incognita.

## 6 Elemento guscio per problemi di propagazione del calore

La propagazione del calore in un solido  $\Omega$  in regime non stazionario e nell'ipotesi di isotropia del materiale è governata dall'equazione

$$k\nabla \cdot (\nabla T) - \rho c \dot{T} + Q = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (83)$$

dove:

$T$  è la temperatura,

$k$  è la conducibilità termica,

$\rho$  è la densità,

$c$  è il calore specifico,

$Q$  è il calore assorbito per unità di volume e di tempo;

con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} T &= \bar{T} & \text{su } \partial\Omega_1, \\ k \frac{\partial T}{\partial n} &= q_0 - h(T - T_\infty) & \text{su } \partial\Omega_2, \end{aligned} \quad (84)$$

e le condizioni iniziali

$$T = T_0 \quad \text{su } \Omega \quad \text{per } t = 0. \quad (85)$$

In (84)  $n$  è la normale esterna alla frontiera  $\partial\Omega$ ,  $q_0$  è la quantità di calore che fluisce nel corpo per unità di superficie e di tempo, il fattore  $h(T - T_\infty)$  è noto come termine di convezione dove  $h$  è il coefficiente di scambio termico con l'ambiente esterno a temperatura  $T_\infty$  in cui il corpo è immerso. Inoltre la frontiera  $\partial\Omega$  è divisa nelle 2 parti  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$  tali che  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$  e  $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$ .

Indicando con  $\theta$  un campo scalare tale che  $\theta = 0$  su  $\partial\Omega_1$ , allora moltiplicando la (83) per  $\theta$  e integrando sul volume si ha infine

$$\int_{\Omega} k \nabla \theta \cdot \nabla T \, dV + \int_{\Omega} \rho c \theta \dot{T} \, dV = \int_{\Omega} \theta Q \, dV + \int_{\Omega_2} \theta (q_0 - h(T - T_{\infty})) \, dA. \quad (86)$$

L'elemento che viene qui presentato è in corso di introduzione nel codice NOSA. Si tratta di un elemento quadrilatero a 4 nodi con funzioni di forma bilineari.

La rappresentazione geometrica dell'elemento e le notazioni sono identiche a quelle descritte per il guscio sottile.

I gradi di libertà nodali possono essere 2, le temperature alla superficie superiore (dalla parte della direzione positiva del versore normale) e inferiore, oppure 3, le temperature alla superficie superiore, inferiore e media. Nel caso di 2 gradi di libertà nodali, la temperatura entro il guscio è calcolata per interpolazione lineare, mentre nell'altro caso è usata l'interpolazione parabolica.

In ogni caso, la temperatura  $T$  e la sua derivata temporale  $\dot{T}$  in un punto  $p$  generico entro il guscio sono approssimate da:

$$T(p) = \sum_{i=1}^4 \phi_i v \cdot T_i = \{x\} \cdot \{T\}, \quad (87)$$

e

$$\dot{T}(p) = \sum_{i=1}^4 \phi_i v \cdot \dot{T}_i = \{x\} \cdot \{\dot{T}\}, \quad (88)$$

dove  $\phi_i$  sono le funzioni di forma bilineari definite in (8),  $T_i$  è il vettore delle temperature al nodo  $i$ -esimo e  $v$  è il vettore interpolante, definito da

$$v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\eta_3}{h} \\ \frac{1}{2} - \frac{\eta_3}{h} \end{bmatrix}, \quad (89)$$

nel caso di interpolazione lineare, e

$$v = \begin{bmatrix} \frac{\eta_3}{h} \left(1 + \frac{2\eta_3}{h}\right) \\ -\frac{\eta_3}{h} \left(1 - \frac{2\eta_3}{h}\right) \\ \left(1 + \frac{2\eta_3}{h}\right) \left(1 - \frac{2\eta_3}{h}\right) \end{bmatrix}, \quad (90)$$

nel caso di interpolazione parabolica.

Invece la posizione  $r$  di un generico punto sulla superficie media del guscio è approssimata da

$$r = \sum_{i=1}^4 \phi_i r_i. \quad (91)$$

Per quanto riguarda il gradiente della temperatura si ha

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta_3} \end{bmatrix} \quad (92)$$

con

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_j} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_j} v \cdot T_i, \quad j = 1, 2 \quad (93)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_3} = \sum_{i=1}^4 \phi_i \frac{\partial v}{\partial \eta_3} \cdot T_i, \quad (94)$$

quindi per  $\nabla T$  abbiamo un'espressione del tipo

$$\nabla T = \mathbf{B} \{T\} \quad (95)$$

ed un'espressione analoga per  $\nabla \theta$ .

## 6.1 Le matrici di conducibilità e di capacità termica e i termini di carico

Sostituendo (95) nel primo termine di (86) si ha per ogni elemento

$$\int_V k \nabla \theta \cdot \nabla T \, dV = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k \{\theta\}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \{T\} \, d\eta_3 \, dA = \{\theta\}^T \mathbf{K} \{T\}, \quad (96)$$

dove

$$\mathbf{K} = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\eta_3 dA$$

è la matrice di conducibilità .

Per quanto riguarda la matrice di capacità termica, sostituendo (88) nel secondo termine di (86), si ha

$$\int_V \rho c \theta \dot{T} dV = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho c \{\theta\}^T \{x\} \{x\}^T \{\dot{T}\} d\eta_3 dA = \{\theta\}^T \mathbf{C} \{\dot{T}\}, \quad (97)$$

dove

$$\mathbf{C} = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho c \{x\} \{x\}^T d\eta_3 dA$$

è la matrice di capacità termica .

Infine, per i termini di flusso termico, volumetrico e superficiale, e per il termine convettivo in (86), si ha, rispettivamente

$$\int_V \theta Q dV = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\theta\}^T \{x\} \{x\}^T \{Q\} d\eta_3 dA = \{\theta\}^T \{Q_V\}, \quad (98)$$

con

$$\{Q_V\} = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{x\} \{x\}^T \{Q\} d\eta_3 dA,$$

e

$$\int_A \theta q dA = \int_A \{\theta\}^T \{x\} \{x\}^T \{q\} dA = \{\theta\}^T \{Q_S\}, \quad (99)$$

con

$$\{Q_S\} = \int_A \{x\} \{x\}^T \{q\} dA,$$



e infine

$$-\int_A h(T - T_\infty) dA = -\int_A h \{\theta\}^T \{x\} \{x\}^T \{T - T_\infty\} dA = -\{\theta\}^T \mathbf{H} \{T - T_\infty\}, \quad (100)$$

con

$$\mathbf{H} = \int_A h \{x\} \{x\}^T dA.$$

In definitiva, l'equazione di equilibrio (86), raggruppando a sinistra tutti i termini dipendenti da  $T$ , per l'arbitrarietà di  $\theta$  diviene:

$$\mathbf{C} \{\dot{T}\} + \mathbf{K} \{T\} + \mathbf{H} \{T\} = \{Q_V\} + \{Q_S\} + \mathbf{H} \{T_\infty\}. \quad (101)$$

Rimandiamo all'Appendice per il calcolo esplicito dei vari termini in (101) a seconda che sia usata l'interpolazione lineare o parabolica della temperatura entro lo spessore del guscio.

## 7 Appendice

### 7.1 Calcolo delle funzioni di forma dei gradi di libertà rotazionali nel guscio sottile

L'interpolazione del vettore rotazione è compiuta usando le funzioni di forma  $\psi_j(\xi_1, \xi_2)$  che dobbiamo calcolare. Si ha

$$\theta = \sum_{k=5}^9 \psi_k(\xi_1, \xi_2) \theta_k. \quad (102)$$

Nei nodi di metà lato, la rotazione nodale deve essere il valor medio della rotazione lungo il lato stesso, cioè deve valere

$$\theta_j = \frac{1}{l_j} \int_{l_j} \sum_{k=5}^9 \psi_k(\xi_1, \xi_2) \theta_k dl_j, \quad (j = 5, 6, 7, 8) \quad (103)$$

da cui si deduce che:

$$\frac{1}{l_j} \int_{l_j} \psi_k(\xi_1, \xi_2) dl_j = \delta_{jk}. \quad (j = 5, 6, 7, 8; k = 5, 6, 7, 8, 9) \quad (104)$$

La condizione di cambiamento di curvatura costante implica che se un campo di rotazioni variabile linearmente

$$\theta = \theta^0 + \mathbf{A} r$$

è imposto nei nodi, allora lo stesso campo di rotazioni deve essere descritto esattamente dalle funzioni di forma, cioè deve valere

$$\theta^0 + \mathbf{A} r = \sum_{k=5}^9 \psi_k(\xi_1, \xi_2) (\theta_k^0 + \mathbf{A} r_k)$$

per ogni valore di  $\theta^0$  e di  $\mathbf{A}$ , e quindi si hanno le seguenti due condizioni:

$$\sum_{k=5}^9 \psi_k(\xi_1, \xi_2) = 1, \quad (105)$$

$$\sum_{k=5}^9 \psi_k(\xi_1, \xi_2) r_k = r. \quad (106)$$

Combinando (106) con (7) si ha

$$\sum_{k=5}^9 \psi_k(\xi_1, \xi_2) r_k = \sum_{i=1}^4 \phi_i(\xi_1, \xi_2) r_i. \quad (107)$$

Questa condizione può essere soddisfatta solo se il guscio è piatto, perché i nodi da 5 a 9 sono sullo stesso piano. Nel caso di elementi non piani, dobbiamo sostituire i nodi d'angolo di posizione  $r_i$  con le loro proiezioni  $\hat{r}_i$  sul piano dei nodi di metà lato, e quindi la (107) diviene

$$\sum_{k=5}^9 \psi_k(\xi_1, \xi_2) r_k = \sum_{i=1}^4 \phi_i(\xi_1, \xi_2) \hat{r}_i. \quad (108)$$

Tenendo presente che:

$$\begin{aligned}
r_5 &= \frac{1}{2}(\hat{r}_1 + \hat{r}_2), & r_6 &= \frac{1}{2}(\hat{r}_2 + \hat{r}_3), \\
r_7 &= \frac{1}{2}(\hat{r}_3 + \hat{r}_4), & r_8 &= \frac{1}{2}(\hat{r}_4 + \hat{r}_1), & r_9 &= \frac{1}{4}(\hat{r}_1 + \hat{r}_2 + \hat{r}_3 + \hat{r}_4),
\end{aligned}$$

la 108) implica:

$$\sum_{i=1}^4 (\phi_i(\xi_1, \xi_2) - \gamma_i(\xi_1, \xi_2)) \hat{r}_i, \quad (109)$$

dove

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{2} \left( \psi_5 + \psi_8 + \frac{1}{2} \psi_9 \right), \\
\gamma_2 &= \frac{1}{2} \left( \psi_5 + \psi_6 + \frac{1}{2} \psi_9 \right), \\
\gamma_3 &= \frac{1}{2} \left( \psi_6 + \psi_7 + \frac{1}{2} \psi_9 \right), \\
\gamma_4 &= \frac{1}{2} \left( \psi_7 + \psi_8 + \frac{1}{2} \psi_9 \right).
\end{aligned} \quad (110)$$

Poiché le  $\hat{r}_i$  non sono arbitrarie, non possiamo concludere che in (109) le funzioni  $\phi_i$  e  $\gamma_i$  sono uguali e allora, per ragioni di semplicità scegliamo per le funzioni  $\psi_k$  la seguente forma quadratica completa:

$$\psi_k(\xi_1, \xi_2) = a_k + b_k \xi_1 + c_k \xi_2 + d_k \xi_1^2 + e_k \xi_1 \xi_2 + f_k \xi_2^2. \quad (111)$$

I 30 coefficienti incogniti che appaiono nelle (111) devono essere determinati imponendo le condizioni (104), (105), (109) e (110).

*Calcolo dei coefficienti di  $\psi_5$ .*

Imponendo la (104) sui 4 lati si ha

$$\begin{aligned}
1^0 \text{ lato } (\xi_2 = -1) & \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (a_5 + b_5 \xi_1 - c_5 + d_5 \xi_1^2 - e_5 \xi_1 + f_5) d\xi_1 = 1, \\
2^0 \text{ lato } (\xi_1 = +1) & \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (a_5 + b_5 + c_5 \xi_2 + d_5 + e_5 \xi_2 + f_5 \xi_2^2) d\xi_2 = 0, \\
3^0 \text{ lato } (\xi_2 = +1) & \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (a_5 + b_5 \xi_1 + c_5 + d_5 \xi_1^2 + e_5 \xi_1 + f_5) d\xi_1 = 0, \\
4^0 \text{ lato } (\xi_1 = -1) & \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (a_5 - b_5 + c_5 \xi_2 + d_5 - e_5 \xi_2 + f_5 \xi_2^2) d\xi_2 = 0.
\end{aligned} \quad (112)$$

Il calcolo degli integrali in (112) porta al seguente sistema algebrico:

$$\begin{aligned} a_5 - c_5 + \frac{1}{3}d_5 + f_5 &= 1, \\ a_5 + b_5 + d_5 + \frac{1}{3}f_5 &= 0, \\ a_5 + c_5 + \frac{1}{3}d_5 + f_5 &= 0, \\ a_5 - b_5 + d_5 + \frac{1}{3}f_5 &= 0, \end{aligned}$$

che porta a

$$b_5 = 0, \quad c_5 = -\frac{1}{2}, \quad d_5 = -\frac{3}{16} - \frac{3}{4}a_5, \quad f_5 = \frac{9}{16} - \frac{3}{4}a_5, \quad (113)$$

e restano da determinare  $a_5$  ed  $e_5$ .

*Calcolo dei coefficienti di  $\psi_6$ .*

In modo analogo a quanto visto prima si trova il sistema algebrico

$$\begin{aligned} a_6 - c_6 + \frac{1}{3}d_6 + f_6 &= 0, \\ a_6 + b_6 + d_6 + \frac{1}{3}f_6 &= 1, \\ a_6 + c_6 + \frac{1}{3}d_6 + f_6 &= 0, \\ a_6 - b_6 + d_6 + \frac{1}{3}f_6 &= 0, \end{aligned}$$

che porta a

$$b_6 = \frac{1}{2}, \quad c_6 = 0, \quad d_6 = \frac{9}{16} - \frac{3}{4}a_6, \quad f_6 = -\frac{3}{16} - \frac{3}{4}a_6, \quad (114)$$

e restano da determinare  $a_6$  ed  $e_6$ .

*Calcolo dei coefficienti di  $\psi_7$ .*

Si ha

$$a_7 - c_7 + \frac{1}{3}d_7 + f_7 = 0,$$

$$a_7 + b_7 + d_7 + \frac{1}{3}f_7 = 0,$$

$$a_7 + c_7 + \frac{1}{3}d_7 + f_7 = 1,$$

$$a_7 - b_7 + d_7 + \frac{1}{3}f_7 = 0,$$

da cui

$$b_7 = 0, \quad c_7 = \frac{1}{2}, \quad d_7 = -\frac{3}{16} - \frac{3}{4}a_7, \quad f_7 = \frac{9}{16} - \frac{3}{4}a_7, \quad (115)$$

e restano da determinare  $a_7$  ed  $e_7$ .

*Calcolo dei coefficienti di  $\psi_8$ .*

Si ha

$$a_8 - c_8 + \frac{1}{3}d_8 + f_8 = 0,$$

$$a_8 + b_8 + d_8 + \frac{1}{3}f_8 = 0,$$

$$a_8 + c_8 + \frac{1}{3}d_8 + f_8 = 0,$$

$$a_8 - b_8 + d_8 + \frac{1}{3}f_8 = 1,$$

da cui

$$b_8 = -\frac{1}{2}, \quad c_8 = 0, \quad d_8 = \frac{9}{16} - \frac{3}{4}a_8, \quad f_8 = -\frac{3}{16} - \frac{3}{4}a_8, \quad (116)$$

e restano da determinare  $a_8$  ed  $e_8$ .

*Calcolo dei coefficienti di  $\psi_9$ .*

Si ha

$$a_9 - c_9 + \frac{1}{3}d_9 + f_9 = 0,$$

$$a_9 + b_9 + d_9 + \frac{1}{3}f_9 = 0,$$

$$a_9 + c_9 + \frac{1}{3}d_9 + f_9 = 0,$$

$$a_9 - b_9 + d_9 + \frac{1}{3}f_9 = 0,$$

da cui

$$b_9 = 0, \quad c_9 = 0, \quad d_9 = \frac{3}{4}a_9, \quad f_9 = -\frac{3}{4}a_9, \quad (117)$$

e restano da determinare  $a_9$  ed  $e_9$ .

Sostituendo i coefficienti trovati nell'espressione delle  $\psi_k$  (111), si ha

$$\begin{aligned} \psi_5 &= -\frac{1}{2}\xi_2 - \frac{3}{16}\xi_1^2 + \frac{9}{16}\xi_2^2 + a_5 \left(1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2\right) + e_5\xi_1\xi_2, \\ \psi_6 &= +\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{9}{16}\xi_1^2 - \frac{3}{16}\xi_2^2 + a_6 \left(1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2\right) + e_6\xi_1\xi_2, \\ \psi_7 &= +\frac{1}{2}\xi_2 - \frac{3}{16}\xi_1^2 + \frac{9}{16}\xi_2^2 + a_7 \left(1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2\right) + e_7\xi_1\xi_2, \\ \psi_8 &= -\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{9}{16}\xi_1^2 - \frac{3}{16}\xi_2^2 + a_8 \left(1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2\right) + e_8\xi_1\xi_2, \\ \psi_9 &= 1 - (\psi_5 + \psi_6 + \psi_7 + \psi_8) = \\ &= \left(1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2\right) (1 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8) - (e_5 + e_6 + e_7 + e_8) \xi_1\xi_2, \end{aligned} \quad (118)$$

e per le  $\gamma_i$  in (110) si ha

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1 - \xi_2) + a_1 \left(1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2\right) + e_1\xi_1\xi_2, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1 - \xi_2) + a_2 \left(1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2\right) + e_2\xi_1\xi_2, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1 + \xi_2) - a_1 \left(1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2\right) - e_1\xi_1\xi_2, \\ \gamma_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1 + \xi_2) - a_2 \left(1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2\right) - e_2\xi_1\xi_2, \end{aligned} \quad (119)$$

con

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4}(a_5 - a_6 - a_7 + a_8), & a_2 &= \frac{1}{4}(a_5 + a_6 - a_7 - a_8), \\ e_1 &= \frac{1}{4}(e_5 - e_6 - e_7 + e_8), & e_2 &= \frac{1}{4}(e_5 + e_6 - e_7 - e_8). \end{aligned} \quad (120)$$

Tenendo conto di (8) e di (118), la condizione (109) diviene

$$\begin{aligned}
& a_1 (\tilde{r}_3 - \tilde{r}_1) + a_2 (\tilde{r}_4 - \tilde{r}_2) + \frac{3}{4} [a_1 (\tilde{r}_1 - \tilde{r}_3) + a_2 (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_4)] \xi_1^2 + \\
& + \frac{3}{4} [a_1 (\tilde{r}_1 - \tilde{r}_3) + a_2 (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_4)] \xi_2^2 + \frac{1}{4} (\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 + \tilde{r}_3 - \tilde{r}_4) \xi_1 \xi_2 + \\
& + [e_1 (\tilde{r}_3 - \tilde{r}_1) + e_2 (\tilde{r}_4 - \tilde{r}_2)] \xi_1 \xi_2 = 0.
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\xi_1$  e di  $\xi_2$ , si ha

$$\begin{aligned}
a_1 (\tilde{r}_1 - \tilde{r}_3) + a_2 (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_4) &= 0, \\
e_1 (\tilde{r}_1 - \tilde{r}_3) + e_2 (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_4) &= \frac{1}{4} (\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 + \tilde{r}_3 - \tilde{r}_4),
\end{aligned}$$

e poichè  $\tilde{r}_1 - \tilde{r}_3$  e  $\tilde{r}_2 - \tilde{r}_4$  sono linearmente indipendenti e quindi

$$a_1 = a_2 = 0, \quad (121)$$

inoltre, ponendo  $x = \tilde{r}_1 - \tilde{r}_3$ ,  $y = \tilde{r}_2 - \tilde{r}_4$  e  $z = \frac{1}{4} (\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 + \tilde{r}_3 - \tilde{r}_4)$  si ha:

$$e_1 x + e_2 y = z. \quad (122)$$

Moltiplicando scalarmente la (122) per  $x$  e  $y$  si ha

$$\begin{aligned}
x \cdot x e_1 + x \cdot y e_2 &= x \cdot z \\
y \cdot x e_1 + y \cdot y e_2 &= y \cdot z,
\end{aligned}$$

da cui risolvendo

$$e_1 = \frac{(x \cdot z)(y \cdot y) - (x \cdot y)(y \cdot z)}{(x \cdot x)(y \cdot y) - (x \cdot y)^2}; \quad e_2 = \frac{(x \cdot x)(y \cdot z) - (x \cdot z)(x \cdot y)}{(x \cdot x)(y \cdot y) - (x \cdot y)^2}. \quad (123)$$

Da (120), tenendo conto di (121), si ha

$$\begin{aligned}
a_5 - a_6 - a_7 + a_8 &= 0, \\
a_5 + a_6 - a_7 - a_8 &= 0,
\end{aligned}$$

e quindi

$$a_5 = a_7; \quad a_6 = a_8, \quad (124)$$

e inoltre, sempre da (120):

$$\begin{aligned} e_5 - e_6 - e_7 + e_8 &= 4e_1, \\ e_5 + e_6 - e_7 - e_8 &= 4e_2, \end{aligned}$$

da cui

$$e_7 = e_5 - 2(e_1 + e_2); \quad e_8 = e_6 + 2(e_1 - e_2). \quad (125)$$

Le 4 incognite rimanenti  $a_5, a_6, e_5, e_6$ , sono scelte in base a considerazioni di simmetria.

Il termine  $1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2$  in (118) è simmetrico rispetto al centroide quindi poniamo

$$a_9 = 1, \text{ cioè } a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0. \quad (126)$$

Invece il termine  $\xi_1\xi_2$  è invece asimmetrico e quindi poniamo

$$e_9 = 0, \text{ cioè } e_5 + e_6 + e_7 + e_8 = 0,$$

da cui possiamo pensare che valga

$$e_7 = -e_5 \quad \text{e} \quad e_8 = -e_6,$$

le quali, sostituite in (125), danno

$$e_5 = e_1 + e_2, \quad e_6 = e_2 - e_1. \quad (127)$$

Riassumendo, le funzioni  $\psi_k$  hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \psi_5(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{2}\xi_2 - \frac{3}{16}\xi_1^2 + \frac{9}{16}\xi_2^2 + e_5\xi_1\xi_2, \\ \psi_6(\xi_1, \xi_2) &= +\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{9}{16}\xi_1^2 - \frac{3}{16}\xi_2^2 + e_6\xi_1\xi_2, \\ \psi_7(\xi_1, \xi_2) &= +\frac{1}{2}\xi_2 - \frac{3}{16}\xi_1^2 + \frac{9}{16}\xi_2^2 - e_5\xi_1\xi_2, \\ \psi_8(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{9}{16}\xi_1^2 - \frac{3}{16}\xi_2^2 - e_6\xi_1\xi_2, \\ \psi_9(\xi_1, \xi_2) &= +1 - \frac{3}{4}\xi_1^2 - \frac{3}{4}\xi_2^2. \end{aligned} \quad (128)$$



## 7.2 Matrici del guscio termico

### 7.2.1 Matrice di conducibilità

Da (96) il termine di conducibilità è:

$$\int_V k \nabla \theta \cdot \nabla T \, dV = \{\theta\}^T \mathbf{K} \{T\}. \quad (129)$$

E, tenendo presente (92), (93) e (94), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \nabla \theta \cdot \nabla T &= \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \frac{\partial T}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta_2} \frac{\partial T}{\partial \eta_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta_3} \frac{\partial T}{\partial \eta_3} = \\ &= \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} v \cdot \theta_i \right) \left( \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta_1} v \cdot T_j \right) + \\ &+ \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} v \cdot \theta_i \right) \left( \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta_2} v \cdot T_j \right) + \\ &+ \left( \sum_{i=1}^4 \phi_i \frac{\partial v}{\partial \eta_3} \cdot \theta_i \right) \left( \sum_{j=1}^4 \phi_j \frac{\partial v}{\partial \eta_3} \cdot T_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \theta_i^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_j T_j = \{\theta\}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \{T\} \end{aligned} \quad (130)$$

con

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} v^T \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} v^T \\ \phi_i \frac{\partial v}{\partial \eta_3} \end{bmatrix}. \quad (131)$$

E quindi

$$\{\theta\}^T \mathbf{K} \{T\} = \int_{\Omega} k \nabla \theta \cdot \nabla T \, dV = \{\theta\}^T \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} k \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, d\eta_3 \, dA \{T\}. \quad (132)$$

La matrice di conducibilità è composta di sottomatrici (di dimensione  $2 \times 2$  o  $3 \times 3$ ) che legano i valori di temperatura dell' $i$ -esimo e del  $j$ -esimo nodo dell'elemento.

Si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ij} &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} k \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_j d\eta_3 dA = \\
&= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} k \left[ \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta_2} \right) v \otimes v + \phi_i \phi_j \frac{\partial v}{\partial \eta_3} \otimes \frac{\partial v}{\partial \eta_3} \right] d\eta_3 dA.
\end{aligned} \tag{133}$$

Nel caso particolare che  $k$  non dipenda da  $\eta_3$  l'integrazione nello spessore può essere effettuata analiticamente, distinguendo tra i due casi di interpolazione lineare e parabolica. Si ha

### 1 interpolazione lineare

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (v \otimes v) d\eta_3 = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial v}{\partial \eta_3} \otimes \frac{\partial v}{\partial \eta_3} \right) d\eta_3 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_A k \left( \frac{h}{6} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta_2} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{h} \phi_i \phi_j \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \right) dA \tag{134}$$

### 2 interpolazione parabolica

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (v \otimes v) d\eta_3 = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

e

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial v}{\partial \eta_3} \otimes \frac{\partial v}{\partial \eta_3} \right) d\eta_3 = \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} &= \int_A k \frac{h}{30} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_1} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_2} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta_2} \right) \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} dA + \\ &+ \int_A \frac{1}{3h} \phi_i \phi_j \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} dA. \end{aligned} \quad (135)$$

### 7.2.2 Matrice di capacità termica

Il termine di capacità termica in (86) è:

$$\int_V \rho c \theta \dot{T} dV = \{\theta\}^T \mathbf{C} \{\dot{T}\}, \quad (136)$$

e da (87) e (88) abbiamo

$$\begin{aligned} \theta \dot{T} &= \left( \sum_{i=1}^4 \phi_i v \cdot \theta_i \right) \left( \sum_{j=1}^4 \phi_j v \cdot \dot{T}_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \theta_i^T \phi_i \phi_j (v \otimes v) \dot{T}_j = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \theta_i^T (x_i \otimes x_j) \dot{T}_j = \\ &= \{\theta\}^T (\{x\} \otimes \{x\}) \{\dot{T}\}; \end{aligned} \quad (137)$$

con

$$x_i = \phi_i v,$$

e quindi, da (136)

$$\{\theta\}^T \mathbf{C} \{\dot{T}\} = \{\theta\}^T \left( \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho c \{x\} \{x\}^T d\eta_3 dA \right) \{\dot{T}\}. \quad (138)$$

Anche la matrice di capacità termica è composta da sottomatrici (di dimensione  $2 \times 2$  o  $3 \times 3$ ) della forma

$$\mathbf{C}_{ij} = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho c \{x_i\} \{x_j\}^T d\eta_3 dA = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho c \phi_i \phi_j v \otimes v d\eta_3 dA,$$

ed, ancora, se la densità  $\rho$  e il calore specifico  $c$ , non dipendono da  $\eta_3$ , l'integrazione nello spessore può essere compiuta analiticamente, distinguendo i due casi di interpolazione. Si ha

1. interpolazione lineare:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (v \otimes v) d\eta_3 = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e quindi:

$$\mathbf{C}_{ij} = \int_A \frac{h}{6} \rho c \phi_i \phi_j \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} dA;$$

2. interpolazione parabolica

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (v \otimes v) d\eta_3 = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathbf{C}_{ij} = \int_A \frac{h}{30} \rho c \phi_i \phi_j \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} dA.$$

In modo perfettamente analogo, possono esser calcolati i termini di flusso termico, volumetrico e superficiale, e il termine convettivo.

## References

- [1] Guidotti P., Lucchesi M., Pagni A., Pasquinelli G., *Application of Shell Theory to structural Problem Using the Finite Element Method*, Quaderni de *La ricerca Scientifica*, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma, 1986.
- [2] Nagtegaal J.C., Slater I.G., *A simple nonconforming thin shell element based on discrete Kirchhoff theory*, *Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells*, AMD - vol. 48 - ASME (1981).
- [3] Zienkiewicz O.C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, 1977.