

Consiglio Nazionale delle Ricerche

Nota Interna

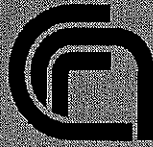
**Verifica sperimentale di un metodo per le misure
di profilo mediante illuminatore a laser**

Massimo Chimenti, Edoardo Bozzi, Luciano Azzarelli

B4-27
dic-1997

I.E.I.
ISTITUTO DI
ELABORAZIONE DELLA
INFORMAZIONE





Consiglio Nazionale delle Ricerche

**Verifica sperimentale di un metodo per le misure
di profilo mediante illuminatore a laser**

Massimo Chimenti, Edoardo Bozzi, Luciano Azzarelli

B4-27
dic-1997

**Verifica sperimentale di un metodo per le misure di profilo
mediante illuminatore a laser**

Massimo Chimenti, Edoardo Bozzi, Luciano Azzarelli

Istituto di Elaborazione della Informazione - CNR, Pisa

Introduzione

Il progetto OUTLINE, finanziato nell'ambito del programma METIER TETRApc TTN, ha come obiettivo la realizzazione di un sistema per il controllo di qualità di mattonelle, basato sull'ispezione in linea mediante telecamere operanti nel visibile.

La classificazione da eseguire è riferita a due caratteristiche superficiali delle mattonelle: la geometria e la planarità. Nel primo caso, il sistema deve eseguire in modo automatico le misure degli spigoli e degli angoli delle mattonelle, confrontandole con quelle di riferimento; nel secondo caso il sistema deve controllare in determinati punti di misura le variazioni della faccia superiore della mattonella rispetto ad un piano di riferimento.

La ripresa delle immagini da analizzare può essere fatta mediante una telecamera posta perpendicolarmente al piano di scorrimento delle mattonelle (vedi figura 1).

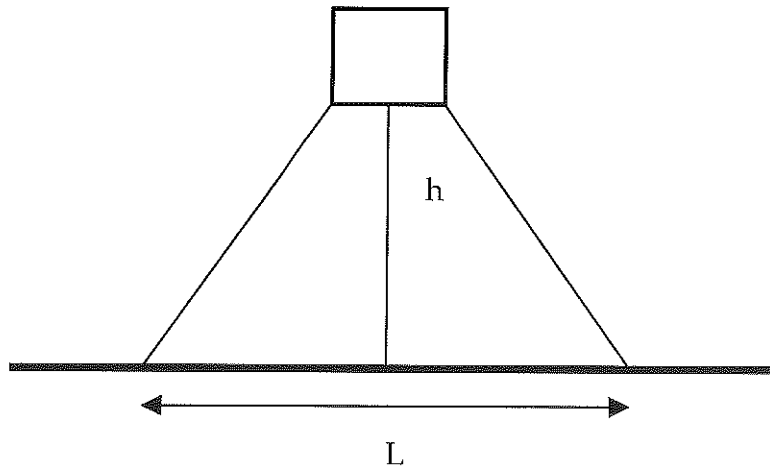


Figura 1. Telecamera ortogonale al piano della mattonella.

Indicando con x,y le coordinate del piano di ripresa (ad esempio, x sia la coordinata lungo la linea mostrata in figura), le risoluzioni spaziali nel piano di misura sono:

$$p_x = p_y = L/N \quad (1)$$

dove L è la dimensione del campo di ripresa e N è il numero di elementi per riga sul trasduttore, supposto quadrato per semplicità.

La misura della distanza dell'oggetto ripreso rispetto al trasduttore può essere fatta usando il principio mostrato in figura 2.

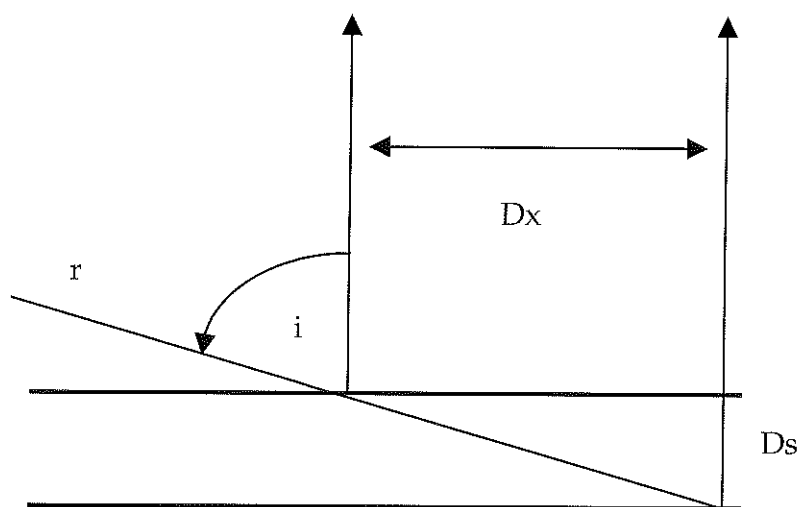


Figura 2. Illuminamento di un piano con un raggio luminoso.

Si consideri un raggio luminoso r incidente con l'angolo i rispetto alla normale su un piano diffondente: osservando il piano nella direzione normale si vede un punto luminoso in corrispondenza del punto di incidenza del raggio. Se il piano viene traslato alla distanza D_s , il punto luminoso si sposta alla distanza D_x rispetto al precedente, in corrispondenza del nuovo punto di incidenza del raggio ; si ha:

$$D_x = D_s \times \tan(i) \quad (2)$$

Si possono quindi possibile determinare:

- la coordinata x del punto di incidenza, data da $D_x = N \times p_y$, dove p_y è la risoluzione spaziale di misura;
- l'altezza del punto x dal piano di riferimento, data da $D_s = D_x / \tan(i) = N \times p_y / \tan(i) = N \times p_z$, dove N è la distanza in pixel e $p_y = p_y / \tan(i)$ è la risoluzione di misura per le traslazioni verticali.

In realtà, con questo metodo di rilevamento non è possibile ottenere direttamente il valore dell'altezza in corrispondenza di una coordinata prefissata x_v dal momento che, se la superficie esaminata non è perfettamente piana e non coincide col piano di riferimento, la misura di altezza viene eseguita ad una coordinata x che è spostata rispetto a x_0 in direzione della sorgente luminosa. Il metodo descritto può tuttavia essere accettato per due motivi:

- se la misura di una piastrella dà un risultato differente da quello ottenuto col campione di riferimento, ciò significa che la planarità dell'oggetto esaminato è diversa da quella del campione (sensibilità del metodo di misura);
- se si esegue un insieme di misure a differenti posizioni di riferimento x_i , opportunamente distanziate, è possibile ricostruire il profilo della mattonella in esame, ottenendo per interpolazione i valori di misura anche in corrispondenza delle coordinate di riferimento (precisione del metodo di misura).

Modello matematico

Al fine di ricavare le coordinate dei punti di illuminamento prodotti dalla sorgente laser e di stimare la sensibilità del metodo proposto per le misure di planarità si è seguita una procedura composta dai seguenti passi.

- dato un sistema di riferimento Ω associato alla sorgente laser si determinano le traiettorie dei raggi luminosi, emessi secondo particolari geometrie
- dato un piano π si determinano le coordinate P dei punti di illuminamento del piano
- dato un sistema di riferimento Ω_1 associato a π si trasformano le coordinate P nelle coordinate P'
- dato un sistema di riferimento Ω_2 associato alla telecamera di ripresa si trasformano le coordinate P' nelle coordinate P''
- si determina la relazione inversa, che consente di ricavare la variazione di altezza rispetto al sistema di riferimento Ω_1 , associata ad una traslazione nel piano xy del sistema di riferimento Ω_2 .

Si considerano due sistemi di illuminamento, mediante i quali si producono sul piano in esame una matrice di punti oppure una linea continua.

Matrice di punti

Utilizzando un apposito dispositivo ottico, la sorgente laser può emettere un insieme di raggi luminosi, divergenti in modo simmetrico in due direzioni ortogonali. Si assume che le rette r_j corrispondenti ai raggi siano individuate dall'intersezione di coppie di piani. Con riferimento alla figura 3, si ha un fascio di piani passanti per l'asse y , separati da un incremento angolare costante δ ; rispetto al sistema di riferimento Ω , le equazioni dei piani sono date da:

$$x = m_j z$$

con $m_j = \tan(j\delta)$, $j =$ indice intero compreso tra $-N$ e N .

Si ha inoltre un fascio di piani passanti per l'asse x , separati anch'essi da un incremento angolare costante δ ; rispetto al sistema di riferimento Ω , le equazioni di questi piani sono date da:

$$y = m_i z$$

con $m_i = \tan(i\delta)$, $i =$ indice intero compreso tra $-N$ e N .

Le equazioni delle rette r_{ij} sono dunque definite al variare degli indici i e j dal sistema:

$$\begin{aligned} x &= m_j z \\ y &= m_i z \end{aligned} \tag{3}$$

Si consideri un generico piano π illuminato dalla sorgente; rispetto al sistema di riferimento Ω , l'equazione del piano è data da:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

dove α , β e γ sono gli angoli tra la normale al piano e gli assi x , y , z del sistema di riferimento Ω . Per comodità, si assume che π sia parallelo all'asse x di Ω ; π è dunque definito dall'equazione:

$$y = m z - p$$

dove $m = \tan(\theta)$; $\theta \neq 0$ è l'angolo fra l'asse z e il piano.

Le coordinate $P(i,j; \pi)$ dei punti di π illuminati dalla sorgente sono date dalle intersezioni tra le rette r_{ij} e il piano π ; le coordinate $P(i,j; \pi)$ sono dunque definite al variare degli indici i e j dal sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} x &= m_j z \\ y &= m_i z \\ y &= m z - p \end{aligned}$$

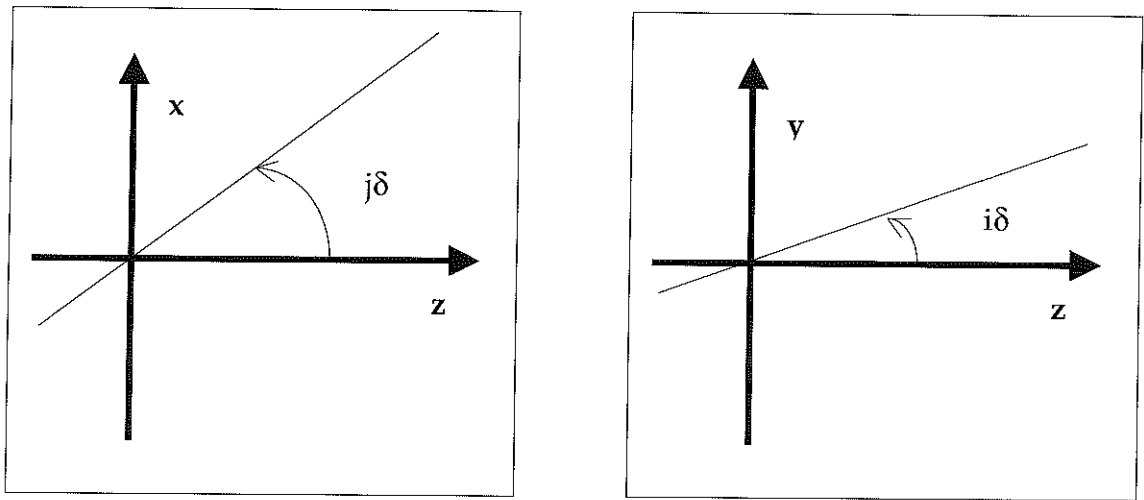


Figura 3. Individuazione dei piani cui appartengono i raggi luminosi emessi dalla sorgente.

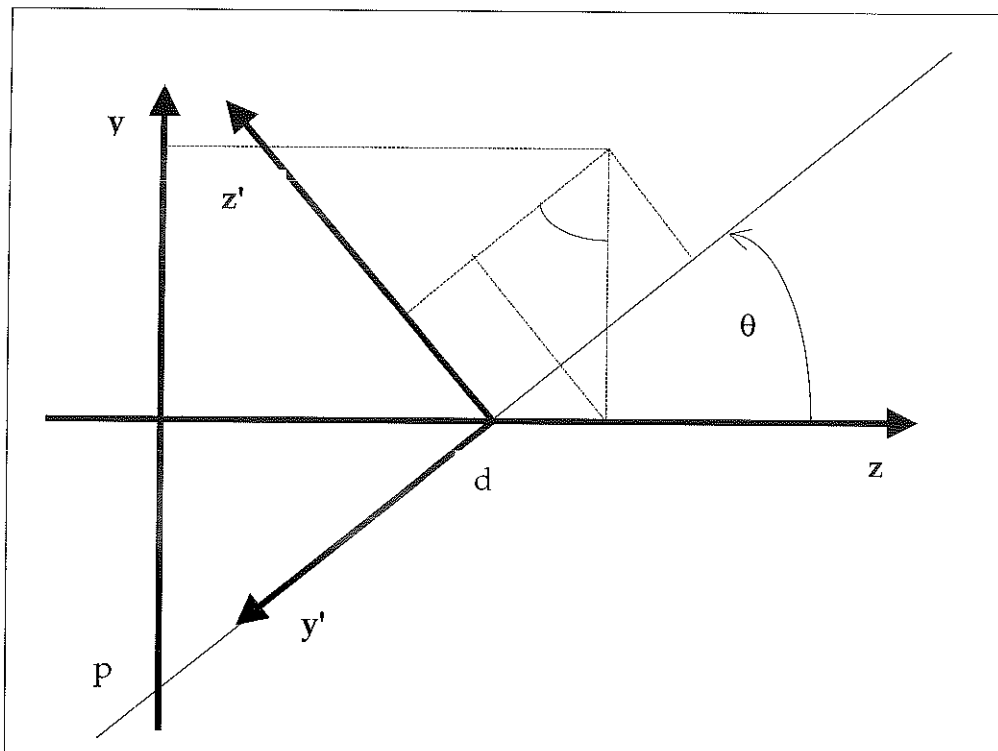


Figura 4. Trasformazione di coordinate dal sistema $\Omega(x,y,z)$ al sistema $\Omega_1(x',y',z')$.

Sostituendo, si ottiene:

$$\begin{array}{l}
 P(i,j; \pi): \\
 x = p \frac{mj}{m - mi} \\
 y = p \frac{mi}{m - mi} \\
 z = p \frac{1}{m - mi}
 \end{array}$$

Traslazioni del piano π

Si consideri un piano π_1 parallelo al piano π e posto a distanza s da π . Nel sistema di riferimento Ω , l'equazione di π_1 è data da:

$$y = mz - p_1$$

dove $p_1 = p - s/\cos(\theta)$.

Le coordinate dei punti $P(i,j; \pi_1)$ di illuminamento del piano π_1 sono date dalle intersezioni tra le rette r_{ij} e il piano π_1 ; si ha il sistema:

$$\begin{array}{l}
 x = mj z \\
 y = mi z \\
 y = mz - p_1
 \end{array}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\begin{array}{l}
 P(i,j; \pi_1): \\
 x = p \frac{mj}{m - mi} + s \frac{mj}{m - mi} \frac{1}{\cos \theta} \\
 y = p \frac{mi}{m - mi} + s \frac{mi}{m - mi} \frac{1}{\cos \theta} \\
 z = p \frac{1}{m - mi} + s \frac{1}{m - mi} \frac{1}{\cos \theta}
 \end{array} \quad (4)$$

Spostamenti Δx e Δy in funzione di s

Nel sistema di riferimento Ω gli spostamenti dei punti di incidenza dei raggi luminosi provocati da una traslazione s del piano riflettente sono dati dalle differenze tra le coordinate definite in 3 e 4; si ha:

$$\begin{array}{l}
 \Delta x = s \frac{mj}{m - mi} \frac{1}{\cos \theta} \\
 \Delta y = s \frac{mi}{m - mi} \frac{1}{\cos \theta} \\
 \Delta z = \frac{1}{m - mi} \frac{1}{\cos \theta}
 \end{array} \quad (6)$$

Per ciascun raggio, fissati dunque gli indici i e j , le variazioni di coordinate dipendono da s e dall'angolo θ ; per il raggio centrale, definito da $i = j = 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\Delta x &= 0 \\ \Delta y &= 0 \\ \Delta z &= s/\sin(\theta)\end{aligned}$$

Trasformazione di coordinate

Si consideri il sistema di riferimento $\Omega_1(x',y',z')$, così definito: l'asse x' è parallelo all'asse x e giace sul piano π , l'asse y' appartiene al piano yz , l'asse z' è normale a π e l'origine di Ω_1 coincide con l'intersezione dell'asse z di Ω su π .

La trasformazione di coordinate da Ω a Ω_1 è dunque data da (vedi figura 4):

$$\begin{aligned}x' &= x \\ y' &= -y \sin\theta - (z-d) \cos\theta \\ z' &= y \cos\theta - (z-d) \sin\theta\end{aligned}$$

dove $d = p/\tan(\theta) = p/m$; si ha dunque:

$$\begin{aligned}x' &= x \\ y' &= -y \sin\theta - z \cos\theta + p \cos\theta/m \\ z' &= y \cos\theta - z \sin\theta + p \sin\theta/m\end{aligned}\tag{7}$$

Nel sistema di riferimento Ω_1 , le coordinate $P'(i,j; \pi)$ dei punti di π illuminati dalla sorgente sono ricavate applicando la trasformazione definita del sistema 7 alle coordinate $P(i,j; \pi)$ definite dal sistema 4; si ha:

$$\begin{aligned}x' &= p \, m_j / (m - m_i) \\ y' &= -p \sin(\theta) \, m_i / (m - m_i) - p \cos(\theta) / (m - m_i) + p \cos(\theta) / m \\ z' &= p \cos(\theta) \, m_i / (m - m_i) - p \sin(\theta) / (m - m_i) + p \sin(\theta) / m\end{aligned}$$

Il termine z' risulta identicamente nullo; le coordinate $P'(i,j; \pi)$ sono dunque definite da:

$P'(i,j; \pi): \quad \begin{aligned}x' &= p \frac{m_j}{m - m_i} \\ y' &= -p \frac{m_i}{m - m_i} \frac{1}{\sin\theta} \\ z' &= 0\end{aligned}$	(8)
---	-----

Le coordinate $P'(i,j; \pi_1)$ sono ricavate applicando la trasformazione 7 ai valori definiti in 5; si ha:

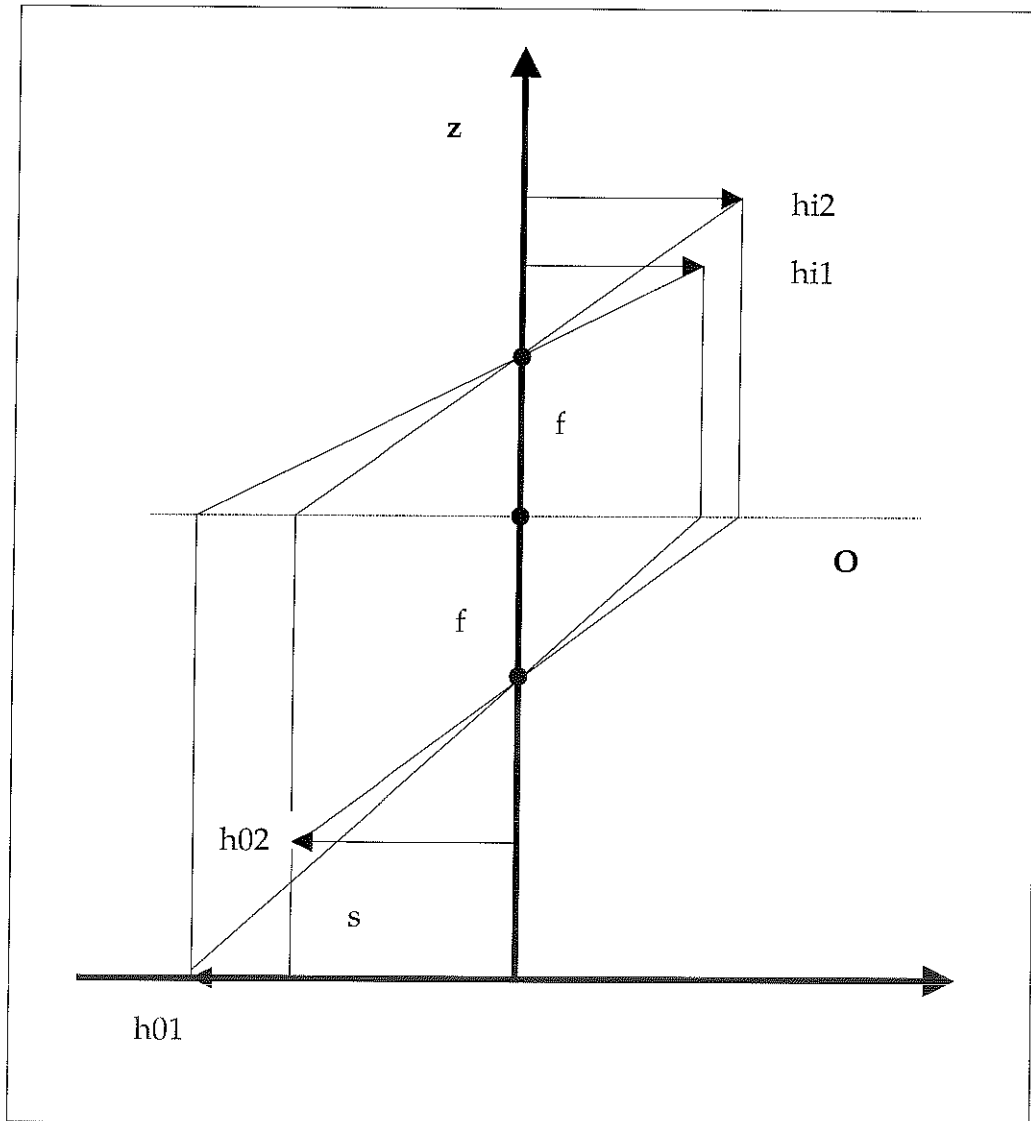


Figura 5. Sistemi $\Omega_1(x',y',z')$ e $\Omega_2(x'',y'',z'')$ impiegati per la descrizione della formazione delle immagini dei punti di illuminamento.

Nel sistema di riferimento Ω_2 le coordinate dei punti $P''(i,j; \pi_i)$ sono ricavate al variare di i e j applicando la trasformazione 13 ai valori definiti da 9; si ottiene:

$$\begin{aligned}
 x'' &= M(s)p \frac{mj}{m-mi} - M(s)s \frac{mj}{m-mi} \frac{1}{\cos \theta} \\
 y'' &= -M(s)p \frac{mi}{m-mi} \frac{1}{\sin \theta} + M(s)s \frac{1+m mi}{m-mi}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Gli spostamenti dei punti immagine sono dati dalle differenze tra le coordinate definite in 12 e 14; si ha:

$$\Delta y'' = [M - M(s)]p \frac{mj}{m - mi} + M(s)s \frac{mj}{m - mi} \frac{1}{\cos \theta} \quad (15)$$

$$\Delta y'' = -[M - M(s)]p \frac{mi}{m - mi} \frac{1}{\sin \theta} - M(s)s \frac{1 + mmi}{m - mi}$$

Proiezione su un piano inclinato a 45°

Se il piano π forma un angolo $\theta = 45^\circ$ con l'asse z di Ω , si ha $\cos(\theta) = \sin(\theta) = 1/\sqrt{2}$, $m = \tan(\theta) = 1$; nel sistema di riferimento Ω_1 le coordinate $P'(i,j; \pi)$ sono dunque definite da (vedi equazioni 8):

$x' = p \frac{mj}{1 - mi}$ $P'(i,j; \pi): \quad y' = -p\sqrt{2} \frac{mi}{1 - mi}$ $z' = 0$	(16)
---	------

Le coordinate P' relative ad un piano distante s da π sono date da (vedi equazioni 9):

$x' = p \frac{mj}{1 - mi} - s\sqrt{2} \frac{mj}{1 - mi}$ $P'(i,j; \pi_1): \quad y' = -p\sqrt{2} \frac{mi}{1 - mi} + s \frac{1 + mi}{1 - mi}$ $z' = s$	(17)
---	------

Nel sistema di riferimento Ω , si hanno le differenze (confronta con sistema 10):

$$\Delta x' = s\sqrt{2} \frac{mj}{1 - mi}$$

$$\Delta y' = -s \frac{1 + mi}{1 - mi} \quad (18)$$

$$\Delta z' = -s$$

Nel sistema di riferimento Ω_2 le coordinate dei punti immagine $P''(i,j; \pi)$ e $P''(i,j; \pi_1)$ sono date da (vedi equazioni 12 e 14):

$x'' = Mp \frac{mj}{1 - mi}$ $P''(i,j; \pi): \quad y'' = -Mp\sqrt{2} \frac{mi}{1 - mi}$	(19)
---	------

$$\begin{aligned}
 & x'' = M(s)p \frac{mj}{1-mi} - M(s)s\sqrt{2} \frac{mj}{1-mi} \\
 \mathbf{P''(i,j; \pi_1):} & \\
 & y'' = -M(s)p\sqrt{2} \frac{mi}{1-mi} + M(s)s \frac{1+mi}{1-mi}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Nel sistema di riferimento Ω_2 si hanno le differenze:

$$\begin{aligned}
 \Delta x'' &= [M - M(s)]p \frac{mj}{1-mi} + M(s)s \frac{mj}{1-mi} \sqrt{2} \\
 \Delta y'' &= -[M - M(s)]p \frac{mi}{1-mi} \sqrt{2} - M(s)s \frac{1+mi}{1-mi}
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Determinazione della variazione di altezza

Per comodità di scrittura si pone:

$$\begin{aligned}
 c(i) &= \sqrt{2} \frac{mi}{1-mi} \\
 d(i) &= \frac{1+mi}{1-mi}
 \end{aligned}$$

Ponendo inoltre $e = d_1 - f$ si ha:

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{f}{e} \\
 M(s) &= -\frac{f}{e-s} = M \frac{e}{e-s} \\
 M - M(s) &= \frac{sf}{e(e-s)} = -M \frac{s}{e-s}
 \end{aligned}$$

Le coordinate y'' dei punti riflessi dai piani π e π_1 diventano:

$$\mathbf{P''(i,j; \pi):} \quad y'' = -Mpc(i) \tag{22}$$

$$\mathbf{P''(i,j; \pi_1):} \quad y'' = -M \frac{e}{e-s} pc(i) + M \frac{e}{e-s} sd(i) \tag{23}$$

Nel sistema di riferimento Ω_2 si ha la differenza:

$$\Delta y'' = M \frac{s}{e-s} pc(i) - M \frac{s}{e-s} ed(i) \tag{24}$$

Si può dunque ricavare il valore della variazione di altezza s in funzione della variazione $\Delta y''$ e dei parametri noti $M, e, p, c(i), d(i)$; risolvendo l'equazione 24 si ottiene:

$$s = \frac{e\Delta y''}{\Delta y'' + Mpc(i) - Med(i)} \quad (25)$$

La procedura di misura si può così riassumere:

- nel sistema di riferimento Ω_2 si determinano le coordinate x'', y'' di un punto di riflessione, caratterizzato dagli indici i e j ;
- si calcola lo spostamento $\Delta y''$ rispetto alla coordinata di misura del punto sul piano di riferimento;
- si calcola il valore di s in funzione di $\Delta y''$ e dei parametri noti;
- si determinano le coordinate del punto di riflessione nel sistema di riferimento Ω_1 mediante le relazioni:

$$x' = \frac{1}{M(s)} x'' = \frac{e-s}{Me} x'' = -\frac{e-s}{f} x''$$

$$y' = \frac{1}{M(s)} y'' = \frac{e-s}{Me} y'' = -\frac{e-s}{f} y''$$

I parametri $c(i) = \sqrt{2mi}/(1-mi)$ e $d(i) = [(1+mi)/(1-mi)]$ dipendono dall'angolo d'incidenza del piano contenente il raggio considerato rispetto al piano di riferimento; per $mi = 0$ si ha $c(0) = 0, d(0) = 1$; si ha quindi:

$$s = \frac{e\Delta y''}{\Delta y'' - Me}$$

Eseguendo la sostituzione $e = -f/M$ si ottiene:

$$s = -\frac{1}{M} \frac{f\Delta y''}{f + \Delta y''}$$

Per $M(s) \approx M$, si ha:

$$\Delta y'' = -Ms \frac{1+mi}{1-mi} = M\Delta y'$$

In questo caso, il valore di s è ricavabile in funzione dello spostamento $\Delta y''$ nel piano immagine mediante la relazione:

$$s = -\frac{1}{M} \frac{\Delta y''(i, j)}{d(i)} \quad (26)$$

In particolare, per i raggi appartenenti al piano centrale si ha:

$$s = -\frac{1}{M}\Delta y''(i, j)$$

Linea continua

Utilizzando un apposito dispositivo, la sorgente laser può emettere un ventaglio di raggi luminosi, con un'apertura angolare predeterminata. In questo caso si assume che le rette r_i corrispondenti ai raggi appartengano ad un fascio passante per l'origine del sistema di riferimento Ω ed appartenente al piano xz . Si considera un insieme finito di rette, separate da un incremento angolare costante ϕ ; le equazioni delle rette r_k sono dunque definite al variare dell'indice k dal sistema:

$$\begin{aligned} x &= mkz \\ y &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

con $mk = \tan(k\phi)$, $k =$ indice intero compreso tra $-N$ e N .

Seguendo il procedimento illustrato in precedenza si considerano il piano π , definito da:

$$y = mz - p$$

e il piano π_1 , definito da:

$$y = mz - p_1 = mz - p + s/\cos(\theta)$$

Si hanno dunque le intersezioni dei raggi luminosi sui piani π e π_1 , definite rispettivamente da:

$\begin{aligned} P(k; \pi): \quad & x = p \frac{mk}{m} \\ & y = 0 \\ & z = p \frac{1}{m} \end{aligned}$	(28)
---	------

$\begin{aligned} P(k; \pi_1): \quad & x = p \frac{mk}{m} - s \frac{mk}{m} \frac{1}{\cos\theta} \\ & y = 0 \\ & z = p \frac{1}{m} - s \frac{1}{m} \frac{1}{\cos\theta} \end{aligned}$	(29)
--	------

Nel sistema di riferimento Ω gli spostamenti dei punti di incidenza dei raggi luminosi provocati da una traslazione s del piano riflettente sono dati da:

$$\begin{aligned}\Delta x &= s \frac{mk}{m} \frac{1}{\cos \theta} \\ \Delta y &= 0 \\ \Delta z &= s \frac{1}{m} \frac{1}{\cos \theta}\end{aligned}\tag{30}$$

Applicando la trasformazione 6 ai valori definiti in 27 e 28 si ricavano le coordinate dei punti di illuminamento relative al sistema di riferimento $\Omega_1(x',y',z')$; si ha:

$$\begin{aligned}P'(k; \pi): \quad x' &= p \frac{mk}{m} \\ y' &= 0 \\ z' &= 0\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}P'(k; \pi_1): \quad x' &= p \frac{mk}{m} - s \frac{mk}{m} \frac{1}{\cos \theta} \\ y' &= s \frac{1}{m} \\ z' &= s\end{aligned}\tag{32}$$

Nel sistema di riferimento Ω_1 , gli spostamenti dei punti di incidenza dei raggi luminosi provocati da una traslazione s del piano riflettente sono dati da:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= s \frac{mk}{m} \frac{1}{\cos \theta} \\ \Delta y' &= -s \frac{1}{m} \\ \Delta z' &= -s\end{aligned}\tag{33}$$

Dal sistema 33 si ottiene:

$$s = -m \Delta y'$$

Nel sistema di riferimento Ω_2 , le coordinate dei punti immagine sono ricavate al variare di k applicando la trasformazione 11 ai valori definiti in 31; si ottiene:

$$\begin{aligned}P''(k; \pi): \quad x'' &= M p \frac{mk}{m} \\ y'' &= 0\end{aligned}\tag{34}$$

Le coordinate dei punti $P''(k; \pi_1)$ sono ricavate applicando la trasformazione 13 ai valori definiti in 32; si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & x'' = M(s) p \frac{mk}{m} - M(s) s \frac{mk}{m} \frac{1}{\cos \theta} \\
 \mathbf{P}''(\mathbf{k}; \pi_1): & \\
 & y'' = M(s) \frac{1}{m}
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Gli spostamenti dei punti immagine sono dati da:

$$\begin{aligned}
 \Delta x'' &= (M - M(s)) p \frac{mk}{m} + M(s) s \frac{mk}{m} \frac{1}{\cos \theta} \\
 \Delta y'' &= - M(s) s \frac{1}{m}
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Piano inclinato a 45°

Se il piano π forma un angolo $\theta = 45^\circ$ con l'asse z di Ω , si hanno le seguenti equazioni.

$$\begin{aligned}
 & x' = p mk \\
 \mathbf{P}'(\mathbf{k}; \pi): & \\
 & y' = 0 \\
 & z' = 0
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
 & x' = p mk - s\sqrt{2} mk \\
 \mathbf{P}'(\mathbf{k}; \pi_1): & \\
 & y' = s \\
 & z' = s
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta x' &= s \sqrt{2} mk \\
 \Delta y' &= -s \\
 \Delta z' &= -s
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 & x'' = M p mk \\
 \mathbf{P}''(\mathbf{k}; \pi): & \\
 & y'' = 0
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 & x'' = M(s) p mk - M(s) s\sqrt{2} mk \\
 \mathbf{P}''(\mathbf{k}; \pi_1): & \\
 & y'' = M(s) s
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Nel sistema di riferimento Ω_2 si ha dunque la differenza:

$$\Delta y'' = - M(s) s
 \tag{42}$$

Sostituendo $M(s) = Me/e-s$ si ottiene il valore di s in funzione dello spostamento verticale della linea nel piano immagine; si ha:

$$s = -\frac{1}{M} \frac{f \Delta y''}{f + \Delta y''} \quad (43)$$

Per $M(s) \approx M$, si ottiene:

$$\Delta y'' = -M s = M \Delta y'$$

In questo caso si ha:

$$s = -\frac{1}{M} \Delta y'' \quad (44)$$

Simulazione

I grafici 3D e 2D delle figure seguenti mostrano alcuni esempi dei punti di illuminamento calcolati in precedenza. Le coordinate x,y,z sono state calcolate assumendo i seguenti parametri:

Angolo di inclinazione dei piani π e π_1 : $\theta = 45^\circ$

Distanza tra i piani π e π_1 : $s = 0.7$ cm

Distanza tra le origine di Ω e di Ω_1 : $d = 117$ cm

Incremento angolare per l'illuminatore a matrice di punti: $\delta = 0.77^\circ$

Incremento angolare per l'illuminatore lineare: $\varphi = 0.77^\circ$

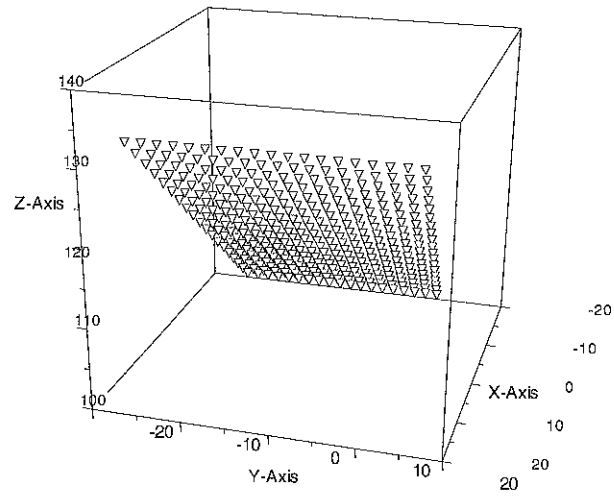


Figura 6. Grafico 3D dei punti $P(i,j)$ nel sistema di riferimento Ω .

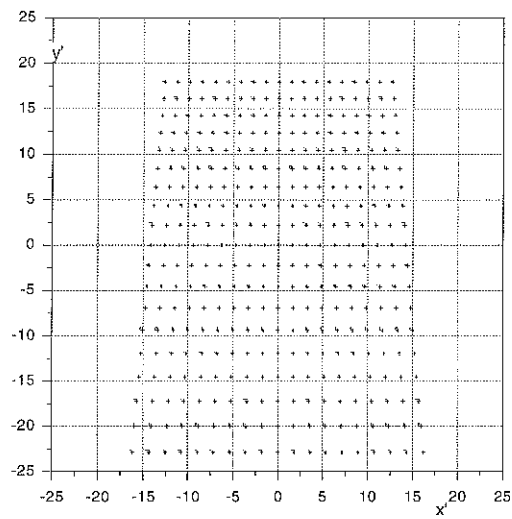


Figura 7. Grafico dei punti $P'(i,j)$ nel sistema di riferimento Ω_1 .

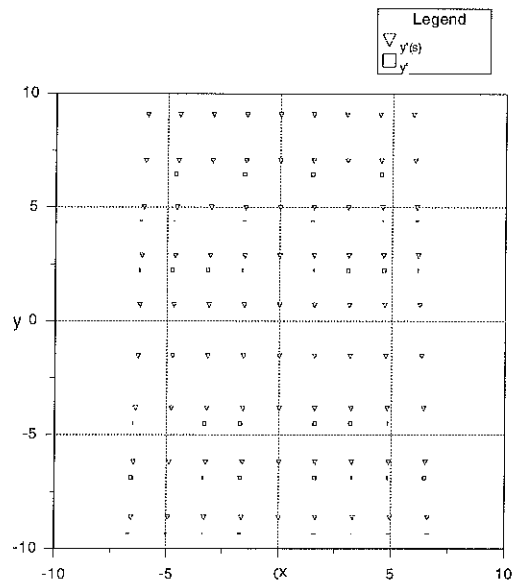


Figura 8. Grafico dei valori $P'(i,j)$ relativi al piano di riferimento (quadrati) e ad un piano traslato del valore $s = 0.7$ cm (triangoli).

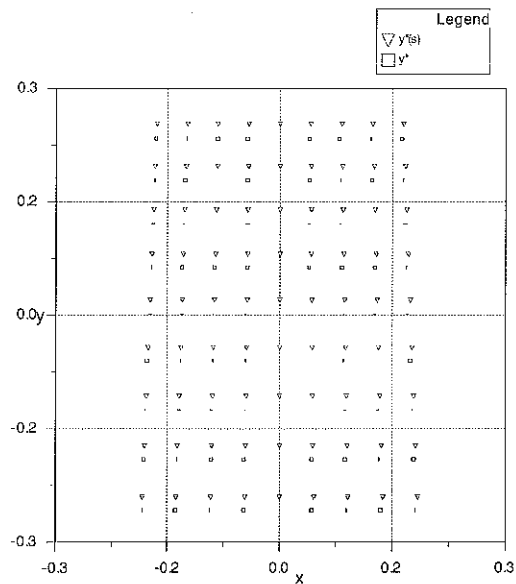


Figura 9. Grafico dei valori $P''(i,j)$ relativi al piano di riferimento (quadrati) e ad un piano traslato del valore $s = 0.7$ cm (triangoli).

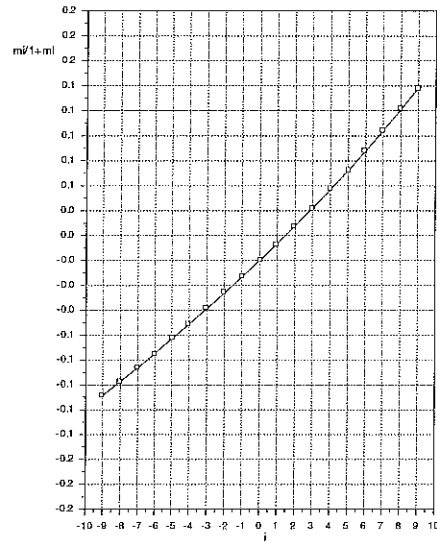


Figura 3. Grafico della funzione $m^i/1+m^i$.

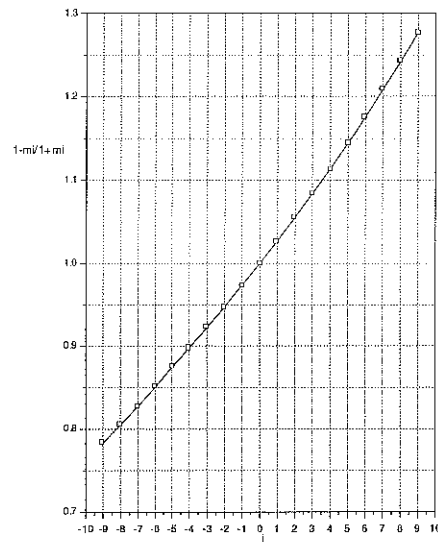


Figura 4. Grafico della funzione $1-m^i/1+m^i$.

Risultati sperimentali

La figura 11 mostra schematicamente i dispositivi usati in una prima fase di sperimentazione.

La telecamera tvc è perpendicolare al piano di riferimento ed è posta a distanza d_1 da esso; la telecamera riprende il campo indicato in tratteggio, le cui dimensioni dipendono dalla focale dell'obiettivo e dalla distanza dal piano; il centro del campo inquadrato coincide con l'origine del sistema di riferimento Ω_1 definito nel modello, la direzione dell'asse x di Ω_1 è determinata dalla direzione di scansione di riga della telecamera.

La sorgente luminosa impiegata per le misure di profilo è posta all'altezza h rispetto al piano e a distanza a dal centro del campo; la sorgente è inclinata in modo che il suo asse, corrispondente all'asse z del sistema di riferimento Ω , incide sul punto centrale del campo di ripresa. La distanza p definita nel modello è dunque data da:

$$p = \sqrt{h^2 + a^2}$$

Se l'angolo di incidenza è di 45° , si ha $h = a$ e $p = \sqrt{2}h$.

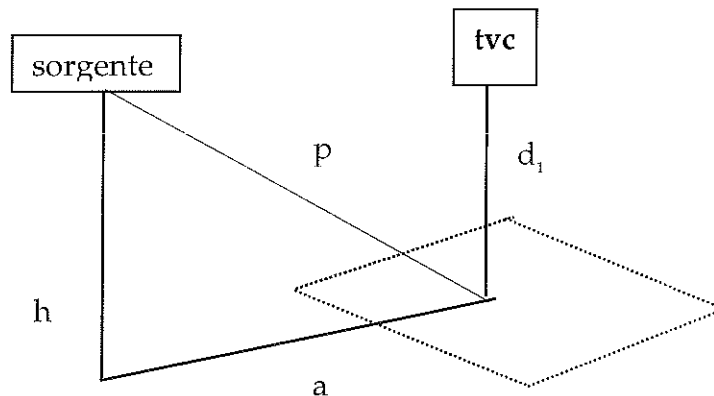


Figura 11. Disposizione dei dispositivi impiegati per la misura di planarità.

Le immagini sono state riprese mediante una telecamera Adimec MX5, impiegando un obiettivo Computar con lunghezza focale $f = 16$ mm. La sorgente era costituita da un diodo laser Lasiris SNF-635m-10, che emette radiazione a 636.6 nm, alla massima potenza di 6.94 mW: l'intensità della luce emessa può essere regolata in continua mediante un'apposita tensione di controllo. Sul laser si possono montare dispositivi particolari, che consentono di proiettare sul piano una riga continua o una matrice di punti.

Misure dimensionali

Alla distanza: $d_1 = 520$ mm. la dimensione del pixel risulta:

$$p_x = p_y = 0.2496 \text{ mm} \quad (45)$$

In queste condizioni è stata acquisita l'immagine di una mattonella di marmo di $15 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$, illuminata da una luce ambiente pressoché uniforme e disposta col lato corto parallelo all'asse x della telecamera.

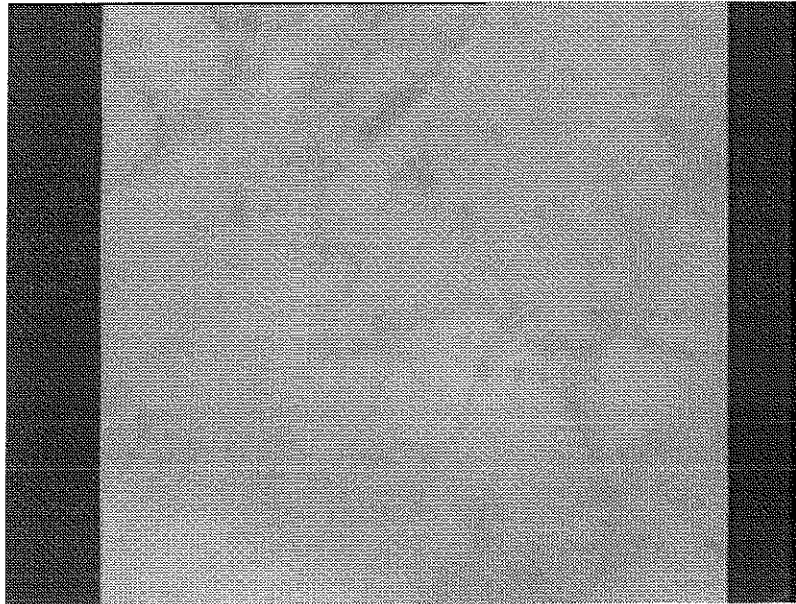


Figura 12. Immagine di una piastrella di 15×30 illuminata con luce diffusa.

La dimensione della mattonella è stata determinata nel seguente modo: si ricava il profilo di una riga della matrice digitale e si determina la distanza in pixel tra i due valori di coordinate in cui il segnale di luminanza assume un valore eguale alla metà della differenza tra la zona chiara (corrispondente alla mattonella) e la zona scura (corrispondente al fondo) (vedi figura 12).

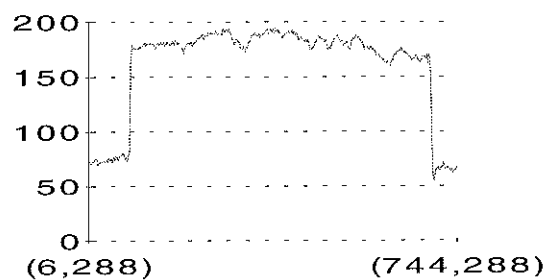


Figura 13. Grafico della riga centrale dell'immagine di figura 12.

La tabella 1 riporta i risultati ottenuti in cinque misure, eseguite su righe simmetriche rispetto alla riga centrale della matrice; la tabella 2 riporta i risultati della statistica calcolata sui valori Δx di tabella 1.

Riga	x_1	x_2	Δx	e
96	81	685	604	0.4
192	81	685	604	0.4
288	77	682	605	0.6
384	83	689	606	1.6
480	83	686	603	1.4

x_1 = coordinata bordo sinistro
 x_2 = coordinata bordo destro
 $\Delta x = (x_1 - x_2) =$ larghezza
 $e = \Delta x - \text{mean}$ (vedi tabella 2)

Tabella 1. Misure di larghezza della mattonella di prova, espresse in pixel.

Min	603
Max	606
Std deviation	1.1402
Std error	0.5099
C.V.	0.1886
Media	604.4

Tabella 2. Parametri statistici calcolati sui valori Δx di tabella 2.

Misure di profilo

La dimensione del campo inquadrato lungo l'asse x (direzione della riga di scansione) è di 191.6 mm; poiché la telecamera ha un sensore di 6.4 mm \times 5.7 mm, il fattore di ingrandimento introdotto dall'obiettivo vale:

$$M = 6.4 \text{ mm} / 191.6 \text{ mm} = 0.033$$

La variazione del fattore di ingrandimento in funzione di s è data dal rapporto $e/e-s$; nel caso considerato, per $s \leq 10$ mm si ha:

$$\frac{e}{e-s} \leq \frac{472}{462} = 1.02$$

Si può quindi assumere che M rimanga costante, con un errore di circa il 2%. Poiché le dimensioni delle immagini elaborate sono definite in pixel, la conversione tra le coordinate x'', y'' sull'immagine e le coordinate x', y' relative al piano di riferimento possono essere fatte mediante la relazione (vedi eq. 45):

$$\begin{aligned} x' &= p_x x'' \approx 0.25 x'' \text{ mm} \\ y' &= p_y y'' \approx 0.25 y'' \text{ mm} \end{aligned}$$

In particolare il valore di s può essere calcolato mediante la relazione:

$$s \approx 0.25 \Delta y'' \frac{1 - m_i}{1 + m_i} \tag{46}$$

Si noti che gli assi x'', y'' dell'immagine digitale hanno lo stesso verso degli assi x', y' del piano di riferimento.

Illuminamento con linea continua

Si è utilizzato l'adattatore SNF-501L, che proietta una riga con intensità uniforme, con un angolo di apertura di 45° .

La sorgente laser è stata posta all'altezza $h = 57$ cm dal piano di riferimento, e inclinata di 45° rispetto ad esso; la distanza tra il proiettore e il piano, misurata lungo l'asse z del sistema di riferimento Ω , è dunque $d = 57 \times \sqrt{2} = 80.6$ cm. Il valore teorico della lunghezza della riga di illuminamento è:

$$L_0 = d \tan(22.5^\circ) = 66.8 \text{ cm}$$

La lunghezza effettiva della riga è risultata:

$$L_1 = 69 \text{ cm.}$$

E' stata illuminata una piastrella avente uno spessore $s = 7$ mm; la figura 12 mostra l'immagine acquisita.

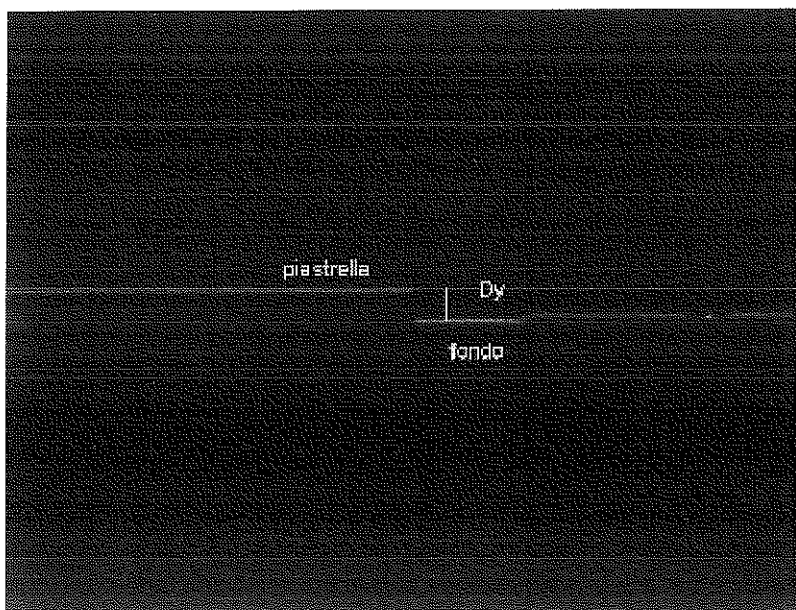


Figura 12. Immagine ottenuta illuminando una piastrella

Sull'immagine digitale di figura 12 è stata misurata la variazione $\Delta y''$ tra i punti di riflessione sulla piastrella e sul piano di riferimento; si è ottenuto:

$$\Delta y'' = 28 \text{ pixel}$$

Lo spessore s risulta dunque:

$$s = p_x \Delta y'' \approx 0.25 \times 28 \text{ mm} = 7 \text{ mm}$$

La figura 13 mostra l'immagine digitale ottenuta illuminando un cuneo con 20 gradini di (1 ± 0.1) mm. La tabella 3 riporta: le coordinate y'' misurate per ciascun scalino sull'immagine di figura 13; gli spostamenti $\Delta y''$ relativi allo scalino 0; gli spostamenti riportati al sistema Ω_1 mediante la relazione 45; gli spostamenti $\Delta y'$ misurati direttamente sul cuneo; gli spessori effettivi degli scalini.

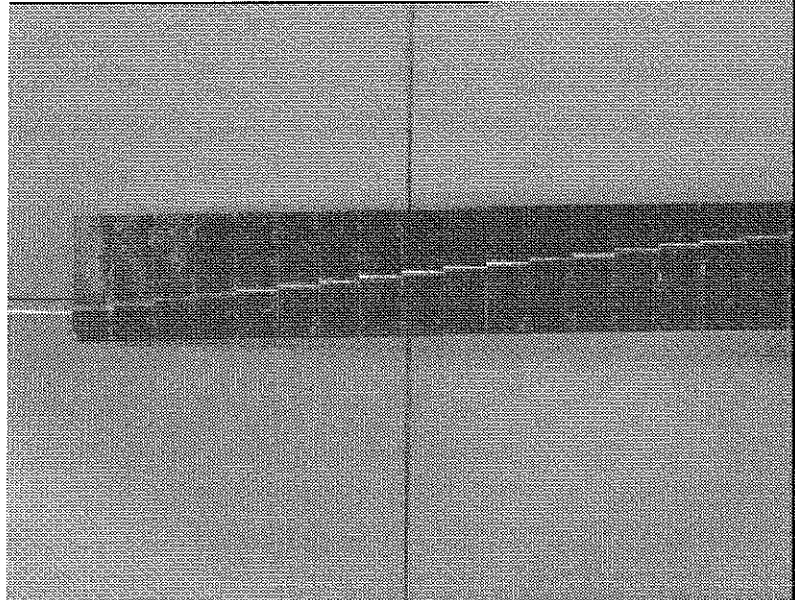


Figura 13. Immagine del cuneo illuminato con una riga luminosa a 45° .

Eseguendo le regressioni lineari dei valori $p\Delta y''$ in funzione di s , $\Delta y'$ in funzione di s e $p\Delta y''$ in funzione di $\Delta y'$ si sono ottenuti i seguenti risultati:

Variables: $X = s, Y = p\Delta y''$

Equation: $p\Delta y'' = -0.0030 + 1.0294*s$

Adjusted R-Squared = 0.999817

Variables: $X = s, Y = \Delta y'$

Equation: $\Delta y' = -0.1514 + 1.0293*s$

Adjusted R-Squared = 0.999457

Variables: $X = \Delta y', Y = p\Delta y''$

Equation: $p\Delta y'' = 0.1530 + 0.9995*\Delta y'$

Adjusted R-Squared = 0.999267

La figura 14 riporta i grafici di $p\Delta y''$ e $\Delta y'$ in funzione di s .

n	s ₀	Δy' ₀	Δy'	y''	Δy''	p _x Δy''
0	0	0	0	298	0	0
1	1.13	1.13	1.02	293	5	1.25
2	2.12	2.12	2.09	289	9	2.25
3	3.13	3.13	2.92	285	13	3.24
4	4.14	4.14	3.88	281	17	4.24
5	5.14	5.14	5.20	277	21	5.24
6	6.17	6.17	6.21	273	25	6.24
7	7.17	7.17	7.28	269	29	7.24
8	8.18	8.18	8.23	264	34	8.48
9	9.17	9.17	9.45	260	38	9.48
10	10.16	10.16	10.23	256	42	10.48
11	11.16	11.16	11.22	252	46	11.48
12	12.15	12.15	12.23	248	50	12.48
13	13.17	13.17	13.48	244	54	13.47
14	14.16	14.16	14.54	240	58	14.47
15	15.17	15.17	15.70	235	63	15.72
16	16.21	16.21	16.44	231	67	16.72
17	17.15	17.15	17.40	227	71	17.72

Tabella 3. Misure relative al cuneo a scalini illuminato con una riga.

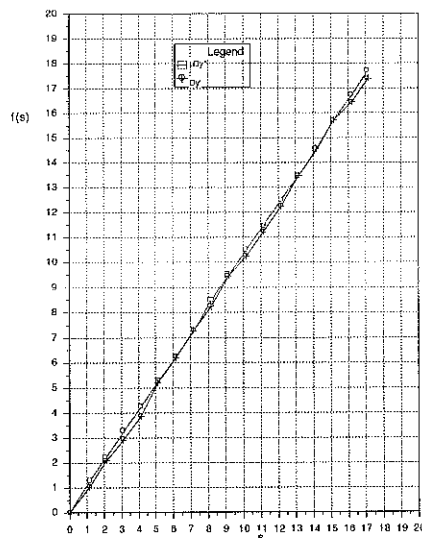


Figura 14. Grafico delle misure ricavate dalla figura 13.

Illuminamento con matrice di punti

Sul diodo laser è stato montato l'adattatore SLH519X, che suddivide il raggio d'ingresso in un fascio di 19×19 raggi; la separazione angolare nominale è $\delta_0 = 0.77^\circ$, l'angolo di apertura complessivo del fascio è $\theta_0 = 2 \times 9 \times 0.77^\circ = 13.86^\circ$.

Illuminando dei piani perpendicolari al raggio centrale del fascio e posti a diverse distanze dal laser, si è determinato che l'angolo di apertura effettivo vale è $\theta = 13.14^\circ$, e che la separazione effettiva è $\delta = 0.73^\circ$.

Poiché l'angolo di separazione è piccolo, i termini $m_i = \tan(i\delta)$ e $m_j = \tan(j\delta)$ utilizzati nelle equazioni del modello matematico possono essere approssimate mediante i valori $m_i = i\delta$ e $m_j = j\delta$, con δ espresso in radianti, e le coordinate teoriche dei punti di illuminamento sono, in prima approssimazione definite dalle espressioni del tipo $p \times i\delta$ oppure $p \times j\delta$, dove p è la distanza tra la sorgente e il piano illuminato. Per confrontare i valori teorici delle coordinate, calcolati con $\delta_0 = 0.77^\circ$, con quelli sperimentali, determinati da un angolo $\delta = 0.73^\circ$, si possono moltiplicare i valori teorici per la costante $k = \delta/\delta_0 = 0.948$; ciò equivale a considerare nelle formule la distanza $p = k \times p$, anziché la distanza effettiva p .

Illuminando il piano di riferimento con un angolo di incidenza $\eta = 45^\circ$, i punti di illuminamento sono disposti su una matrice trapezoidale, le cui dimensioni teoriche possono essere determinate mediante le equazioni 16, usando i valori estremi degli indici i e j .

La dimensione della base maggiore è data da:

$$A = 2p \left(\frac{m_j}{1 - m_i} \right)$$

con $i = 9, j = 9$. La dimensione della base minore è data da:

$$B = 2p \left(\frac{m_j}{1 - m_i} \right)$$

con $i = -9, j = 9$.

La dimensione dell'altezza è data da:

$$C = \sqrt{2}p \left(\frac{mb}{1 - mb} - \frac{ma}{1 - ma} \right)$$

con $a = -9, b = 9$.

La distanza tra la sorgente e il punto centrale della matrice è $p = 80.6$ cm. Secondo l'approssimazione sopra descritta, i valori teorici delle dimensioni del trapezio possono essere calcolati ponendo $p = 72.5$ cm; si ha quindi:

$$A = 20.6 \text{ cm} \quad B = 15.71 \text{ cm} \quad C = 25.30 \text{ cm}$$

I valori sperimentali sono:

$$A' = 20.8 \text{ cm} \quad B' = 16.3 \text{ cm} \quad C' = 25.8 \text{ cm}$$

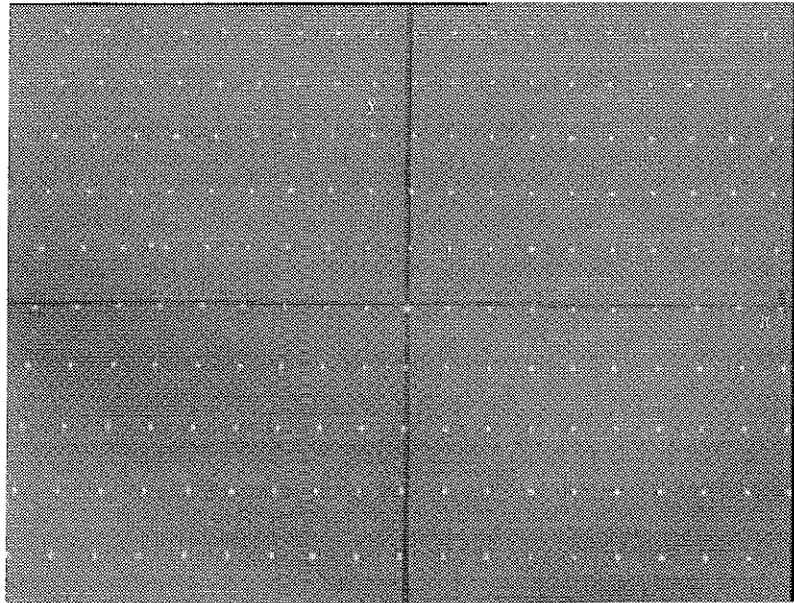


Figura 15. Immagine del piano di riferimento illuminato con una matrice di punti; in figura sono stati disegnati gli assi del sistema di riferimento della telecamera.

La figura 15 riporta l'immagine ottenuta riprendendo una parte della matrice: la telecamera inquadra parte della riga centrale di punti ($i = 0$), cinque righe parziali in direzione della sorgente ($i = -1, -2, -3, -4, -5$) e quattro righe parziali nel verso opposto ($i = 1, 2, 3, 4$).

La tabella 4 riporta le seguenti coordinate dei punti centrali:

coordinate teoriche $y'(0)_0$, calcolate mediante l'equazione 16 con $p = 72.5$ cm

coordinate $y'(0)_0$, misurate in Ω_1

coordinate y'' , misurate sull'immagine di figura 15

coordinate riportate al sistema Ω_1 mediante la relazione 45.

i	$y'(0)_0$	$y'(0)$	$y''(0)$	$p, y''(0)$
4	-58.3085	-58.4	-239	-59.65
3	-43.0931	-43.2	-176	-43.92
2	-28.3289	-28.5	-117	-29.20
1	-13.9645	-14.2	-58	-14.47
0	0.0000	0	0	0
-1	13.5954	13.5	57	14.22
-2	26.8422	27.1	112	27.95
-3	39.7507	40.2	166	41.43
-4	52.3516	52.7	215	53.66

Tabella 4. Coordinate dei punti di riflessione sul piano di riferimento.

Calcolando la regressione tra $p_x y''(0)$, $y'(0)$ e $y'(0)_0$ si sono ottenuti i seguenti risultati.

Variables: $X = y'(0)_0, Y = y'(0)$

Equation: $y'(0) = 0.0460 + 1.0053 * y'(0)_0$

Adjusted R-Squared = 0.999983

Variables: $X = y'(0)_0, Y = p y''(0)$

Equation: $p y''(0) = 0.1652 + 1.0280 * y'(0)_0$

Adjusted R-Squared = 0.999950

Variables: $X = y'(0), Y = p y''(0)$

Equation: $p y''(0) = 0.1182 + 1.0226 * y'(0)$

Adjusted R-Squared = 0.999968

La figura 16 mostra l'immagine ottenuta illuminando una piastrella piana posta sul piano di riferimento ($s = 7$ mm).

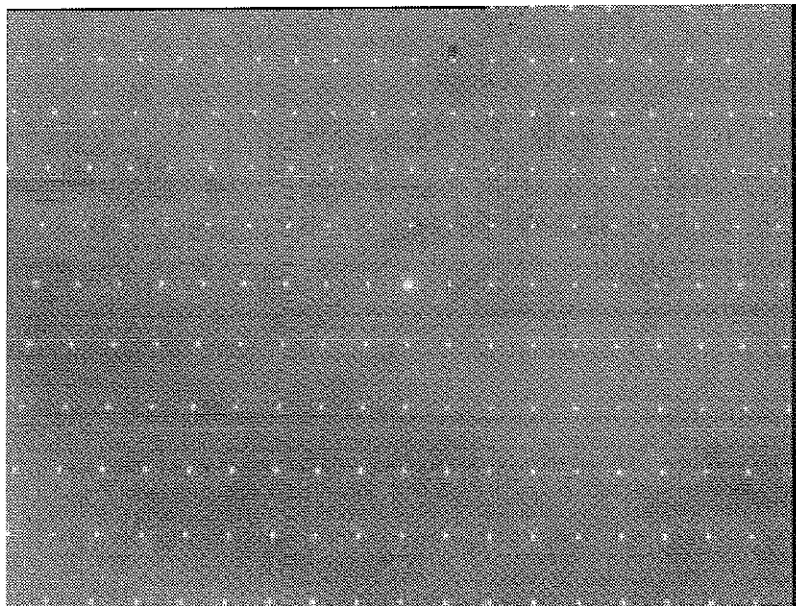


Figura 16. Reticolo proiettato su una piastrella di spessore $s = 7$ mm posta sul piano di riferimento.

La tabella 5 riporta le seguenti coordinate dei punti centrali:

- coordinate teoriche $y'(s)_0$, calcolate mediante l'equazione 16 con $p = 72.5$ cm, $s = 7$ mm
- coordinate $y'(0)_0$, misurate in Ω_1
- coordinate y'' , misurate sull'immagine di figura 16
- coordinate riportate al sistema Ω_1 mediante la relazione 45.

i	$y'(s)_0$	$y'(s)$	$y''(s)$	$p_x y''(s)$
4	-50.5123	-50.5	-213	-53.16
3	-35.5047	-35.5	-151	-37.68
2	-20.9422	-20.8	-90	-22.46
1	-6.77377	-6.8	-30	-7.48
0	7.00000	7.3	26	6.48
-1	20.4097	20.7	82	20.46
-2	33.4756	33.6	137	34.19
-3	46.2078	46.8	190	47.42
-4	58.6367	59.8	242	60.40

Tabella 5. Coordinate dei punti di riflessione su una piastrina di spessore $s = 7$ mm.

Calcolando la regressione tra $p_x y''(s)$, $y'(s)$ e $y'(s)_0$ si sono ottenuti i seguenti risultati.

Variables: $X = y'(s)_0, Y = y'(s)$

Equation: $y'(s) = 0.2431 + 1.0080 * y'(s)_0$

Adjusted R-Squared = 0.999955

Variables: $X = y'(s)_0, Y = p_x y''(s)$

Equation: $p_x y''(s) = -0.6584 + 1.0404 * y'(s)_0$

Adjusted R-Squared = 0.999991

Variables: $X = y'(s), Y = p_x y''(s)$

Equation: $p_x y''(s) = -0.9091 + 1.0321 * y'(s)$

Adjusted R-Squared = 0.999942

La tabella 6 riporta:

- gli spostamenti teorici $\Delta y'_{or}$, dati dalla differenza tra i valori $y'(0)_0$ di tabella 4 e i valori $y'(s)_0$ di tabella 5
- gli spostamenti $\Delta y'$, dati dalla differenza tra i valori $y'(0)$ di tabella 4 e i valori $y'(s)$ di tabella 5
- gli spostamenti $\Delta y''$, dati dalla differenza tra i valori $y''(0)$ di tabella 4 e i valori $y''(s)$ di tabella 5
- gli spostamenti $p\Delta y''$ riportati al sistema Ω_1 mediante la relazione 45
- il fattore di correzione $d(i) = 1 + m_i / 1 - m_i$
- gli spostamenti teorici corretti $\Delta y'_{or} / d(i)$
- gli spostamenti sperimentali corretti $\Delta y' / d(i)$;
- gli spostamenti corretti $p\Delta y'' / d(i)$

i	$\Delta y'_0$	$\Delta y'$	$\Delta y''$	$p_x \Delta y''$	d(i)	$\Delta y'_0/d$	$\Delta y'/d$	$p\Delta y''/d$
4	-7.79618	-7.9	-26	-6.49	1.11374	-7	-7.1	-5.83
3	-7.58849	-7.7	-25	-6.24	1.08407	-7	-7.1	-5.76
2	-7.38675	-7.7	-27	-6.74	1.05525	-7	-7.3	-6.39
1	-7.19075	-7.4	-28	-6.99	1.02725	-7	-7.2	-6.80
0	-7.00000	-7.3	-26	-6.49	1.00000	-7	-7.3	-6.49
-1	-6.81429	-7.2	-25	-6.24	0.97347	-7	-7.4	-6.41
-2	-6.63341	-6.5	-25	-6.24	0.94763	-7	-6.9	-6.58
-3	-6.45715	-6.6	-24	-5.99	0.92245	-7	-7.2	-6.49
-4	-6.28509	-7.1	-27	-6.74	0.89787	-7	-7.9	-7.51

Tabella 6. Spostamento dei punti di riflessione causati da una piastrella di spessore $s = 7$ mm.

Calcolando la regressione tra $p\Delta y''/d$, $\Delta y'/d$ e $\Delta y'_0/d$ si sono ottenuti i seguenti risultati.

Variables: $X = \Delta y'/d$, $Y = p\Delta y''/d$

Equation: $p\Delta y''/d = 2.3515 + 1.2160 \cdot \Delta y'/d$

Adjusted R-Squared = 0.386762

La figura 17 mostra l'andamento delle variazioni sopra indicate.

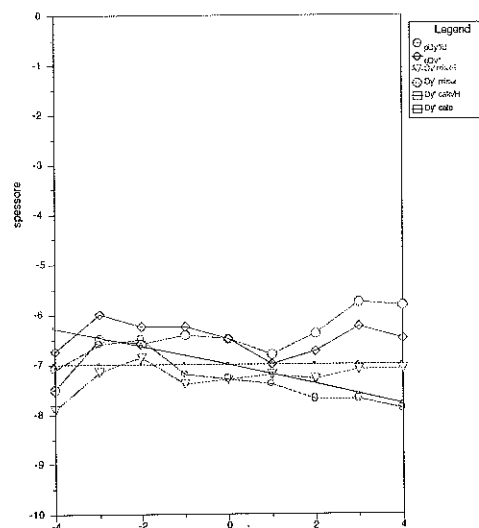


Figura 17. Valori teorici e sperimentali degli spostamenti determinati da una piastrella con spessore $s = 7$ mm.