



Consiglio Nazionale delle Ricerche

**Sviluppo di una procedura assistita da calcolatore  
per la valutazione dello strabismo  
Studio preliminare**

*Luciano Azzarelli, Edoardo Bozzi, Massimo Chimenti*

B4-38  
dic-1998

# Sviluppo di una procedura assistita da calcolatore per la valutazione dello strabismo

## Studio preliminare

*Luciano Azzarelli, Edoardo Bozzi, Massimo Chimenti*

Istituto di Elaborazione della Informazione – CNR, Pisa

### Sommario

L'esame dei movimenti oculari viene normalmente eseguito impiegando delle mire poste in maniera opportuna rispetto alla direzione di osservazione centrale: sia per la disposizione delle mire, sia per la determinazione della posizione dell'occhio si devono misurare degli spostamenti angolari. Nella descrizione che segue si esaminano alcuni problemi collegati ai due tipi di misure. In particolare si descrivono le relazioni ottico-geometriche che riguardano la formazione di mire su una superficie piana, la ripresa di superfici sferiche e la ripresa di immagini mediante uno specchio piano.

### Indice

Mire di riferimento.....	3
Schermo sferico.....	3
Schermo piano.....	8
Generazione di punti di mira sul piano.....	9
Coordinate angolari di punti di mira sul piano .....	10
Coordinate schermo.....	11
Generazione di punti sullo schermo .....	12
Coordinate angolari di punti sullo schermo.....	12
Rilevamento dei movimenti.....	15
Formazione delle immagini .....	15
Misure sulle immagini .....	16
Punto vincolato nel piano .....	16
Punto vincolato nello spazio .....	17
Simulazione.....	21
Formazione di immagini mediante uno specchio piano.....	26
Ripresa delle immagini speculari .....	29
Conclusioni .....	33

## Mire di riferimento

Le mire di riferimento possono essere disposte su una calotta sferica ad intervalli angolari costanti, vale a dire agli estremi di archi con lunghezza costante. In alternativa, le mire possono essere disposte su una superficie piana, in modo che gli angoli di vista siano eguali a quelli ottenuti osservando la calotta sferica. Di seguito si individuano quindi le coordinate delle mire su una superficie sferica e successivamente le coordinate su una superficie piana.

## Schermo sferico

Dato un sistema di riferimento  $\Omega$   $x,y,z$  si consideri una sfera di raggio  $r$  con centro nell'origine del sistema; i punti sulla superficie della sfera soddisfano l'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (1)$$

Si consideri un piano perpendicolare all'asse  $z$ , definito da:

$$z = z_0 \leq r \quad (2)$$

L'intersezione tra il piano e la sfera determina una circonferenza con centro sull'asse  $z$ , su un piano parallelo al piano  $xy$ ; i punti della circonferenza sono definiti dal sistema costituito dalle equazioni 1 e 2; si ha:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 - z_0^2 \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Si consideri ora un piano perpendicolare all'asse  $x$ , definito da:

$$x = x_0 \leq r \quad (4)$$

L'intersezione tra il piano e la sfera determina in questo caso una circonferenza con centro sull'asse  $x$ , su un piano parallelo al piano  $yz$ ; i punti della circonferenza sono definiti dal sistema costituito dalle equazioni 3 e 4; si ha:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y^2 + z^2 &= r^2 - x_0^2 \end{aligned} \quad (5)$$

I punti di intersezione tra due piani dei tipi suddetti e la sfera sono definiti dal sistema:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ x &= x_0 \\ z &= z_0 \end{aligned}$$

Il sistema ha soluzioni reali se  $x_0^2 + z_0^2 \leq r^2$ ; in questo caso per ciascuna intersezione si hanno due punti, le cui coordinate sono definite da:

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 \\
 y &= \pm \sqrt{r^2 - (x_0^2 + z_0^2)} \\
 z &= z_0
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

I punti della superficie di una sfera possono quindi essere individuati mediante una coppia di piani, ognuno dei quali sia perpendicolare ad un asse del sistema di riferimento.

Un punto della superficie della sfera può essere raggiunto da una posizione iniziale mediante due successive rotazioni. Si consideri il segmento  $r$ , corrispondente al raggio della sfera, collocato inizialmente sull'asse  $y$  del sistema di riferimento; si individua così il punto sulla superficie della sfera, avente le coordinate:

$$\begin{aligned}
 x &= 0 \\
 y &= r \\
 z &= 0
 \end{aligned}$$

Se  $r$  ruota intorno all'asse  $z$  di un angolo  $\varphi_1$  si ottiene il punto:

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin\varphi_1 \\
 y &= r \cos\varphi_1 \\
 z &= 0
 \end{aligned}$$

Ruotando ora  $r$  di un angolo  $\theta_1$  intorno all'asse  $x$  si ottiene il punto:

$  \begin{aligned}  x &= r \sin\varphi_1 \\  y &= r \cos\varphi_1 \cos\theta_1 \\  z &= r \cos\varphi_1 \sin\theta_1  \end{aligned}  $	(7)
--	-----

Al variare dell'angolo  $\theta$  l'estremità di  $r$  si sposta sulla circonferenza parallela al piano  $yz$ , definita da (vedi figura 1):

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin\varphi_1 = \text{costante} \\
 y^2 + z^2 &= r^2 \cos^2 \varphi_1
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

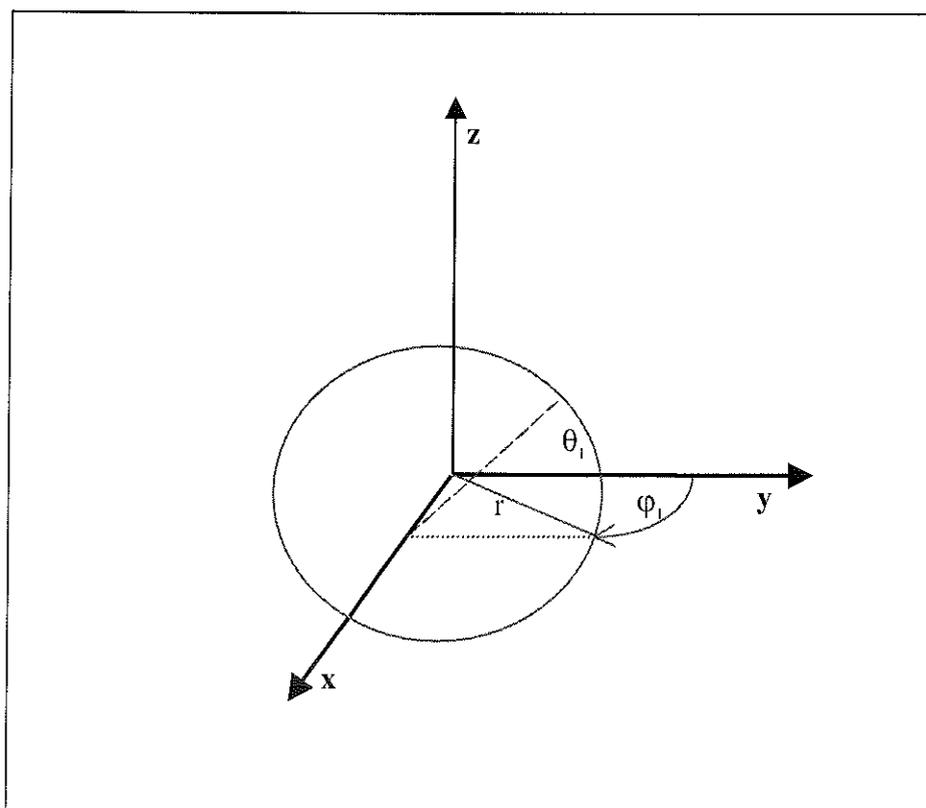


Figura 1. Individuazione dei punti su una sfera mediante una coppia di rotazioni  $\varphi_1, \theta_1$ .

Si supponga invece di ruotare il segmento  $r$  dalla posizione iniziale di un angolo  $\theta_2$  intorno all'asse  $x$ ; si ha:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= r \cos\theta_2 \\ z &= r \sin\theta_2 \end{aligned}$$

Ruotando  $r$  di un angolo  $\varphi_2$  intorno all'asse  $z$  si ottiene:

$\begin{aligned} x &= r \cos\theta_2 \sin\varphi_2 \\ y &= r \cos\theta_2 \cos\varphi_2 \\ z &= r \sin\theta_2 \end{aligned}$	(9)
---	-----

Al variare dell'angolo  $\varphi$  l'estremità di  $r$  si sposta sulla circonferenza parallela al piano  $xy$ , definita data (vedi figura 2):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \cos^2 \theta_2 \\ z &= r \sin\theta_2 = \text{costante} \end{aligned} \tag{10}$$

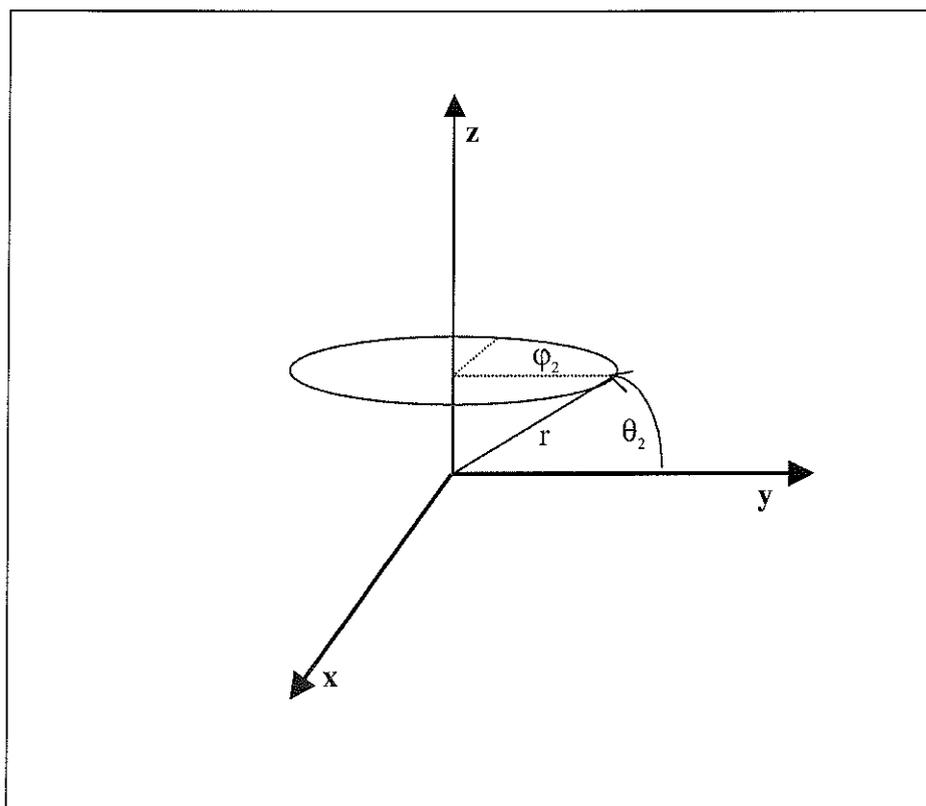


Figura 2. Individuazione dei punti su una sfera mediante una coppia di rotazioni  $\theta_2, \phi_2$ .

Le intersezioni tra le due circonferenze sono date dal sistema costituito dalle equazioni 8 e 10. Si hanno soluzioni se  $\sin^2\phi_i + \sin^2\theta_j \leq 1$ ; in questa ipotesi, considerando le circonferenze individuate rispettivamente dagli angoli  $\phi_i$  e  $\theta_j$ , per ciascuna intersezione si hanno due punti, le cui coordinate sono definite da:

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin\phi_i \\
 y &= \pm r \sqrt{1 - \sin^2\theta_j - \sin^2\phi_i} \\
 z &= r \sin\theta_j
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

I punti con la coordinata  $y > 0$  sono ottenuti prendendo il segno  $+$  nell'espressione 11. La figura 3 mostra un esempio grafico dei punti di mira calcolati mediante l'equazione 11.

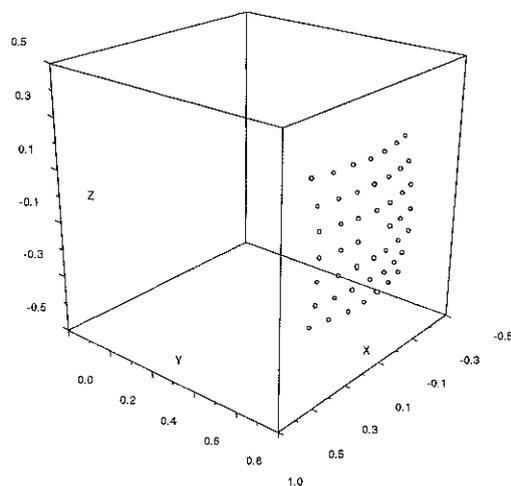


Figura 3. Disposizione dei punti su uno schermo sferico di raggio  $r = 1$ , ottenuti con incrementi angolari di  $5^\circ$  degli angoli  $\varphi_1$  e  $\theta_2$ .

### Schermo piano

Si considerino un piano  $\gamma$  normale all'asse  $y$ , definito da  $y = d$ , una sfera con centro in  $O$  e un fascio di rette con origine in  $O$ , passanti per la superficie della semisfera con  $y \geq 0$  (vedi figura 4).

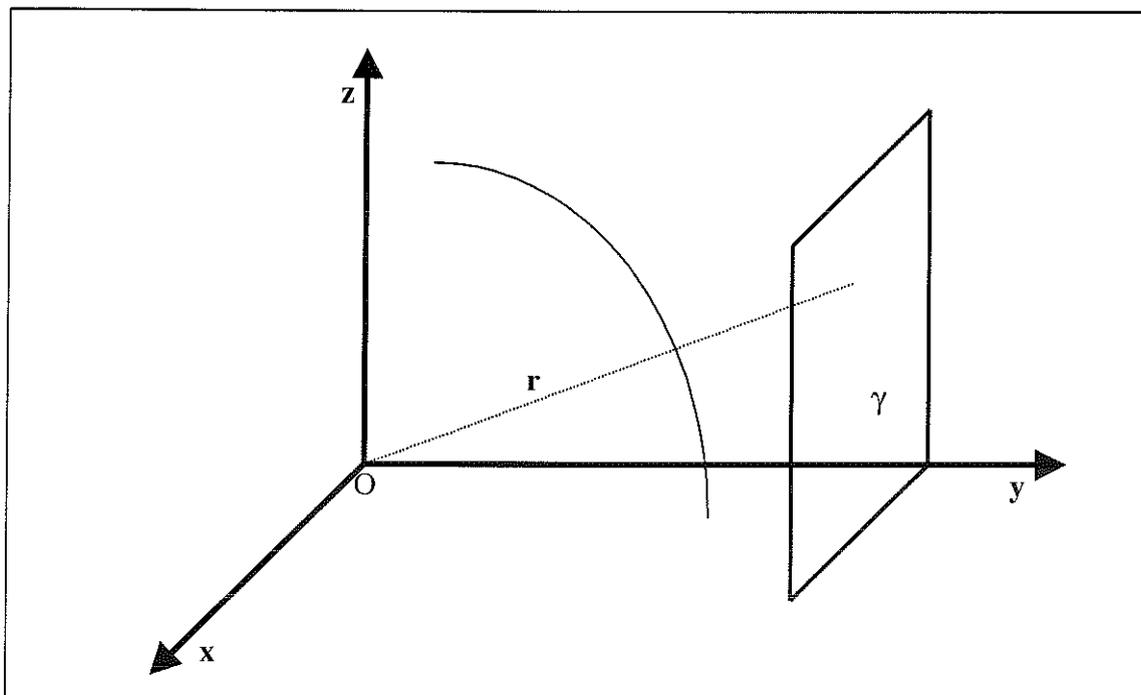


Figura 4. Intersezione dei raggi di una sfera con un piano perpendicolare all'asse  $y$ .

Si ha:

$$\frac{x - x_1}{x_1} = \frac{y - y_1}{y_1} = \frac{z - z_1}{z_1} \quad (12)$$

$$y = d$$

dove i punti  $x_1, y_1, z_1$  appartengono alla superficie della sfera definita da  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2$ .

Le coordinate  $x$  e  $z$  delle intersezioni tra il fascio di rette e il piano  $\gamma$  sono ricavabili svolgendo e semplificando le equazioni 12; si ottiene:

$$x = d \frac{x_1}{y_1} \quad (13)$$

$$z = d \frac{z_1}{y_1}$$

### Generazione di punti di mira sul piano

Le coordinate  $(x,y)$  dei punti sul piano  $\gamma$  possono essere legate in maniera biunivoca alla coppia di angoli usati per determinare i punti sulla sfera. Sostituendo in 13 le coordinate dei punti sulla superficie della sfera definite in 11, con  $y > 0$ , si ottengono le famiglie di curve generate mantenendo costante il valore di un angolo e variando l'altro angolo con continuità; si ha:

$$x = \frac{d \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi - \sin^2 \theta}}$$

$$z = \frac{d \sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi - \sin^2 \theta}}$$
(14)

E' possibile ottenere un insieme discreto di mire in posizioni definite da incrementi angolari costanti di  $\varphi$  e  $\theta$ ; in questo caso le equazioni 14 diventano:

$$x_{ij} = \frac{d \sin \varphi_i}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_i - \sin^2 \theta_j}}$$

$$z_{ij} = \frac{d \sin \theta_j}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_i - \sin^2 \theta_j}}$$
(15)

La figura 5 mostra graficamente il risultato ottenuto ponendo nelle equazioni 15  $\varphi_i = i \times 5^\circ$ ,  $\theta_j = j \times 5^\circ$ ; con  $i$  e  $j$  definiti dai valori  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ .

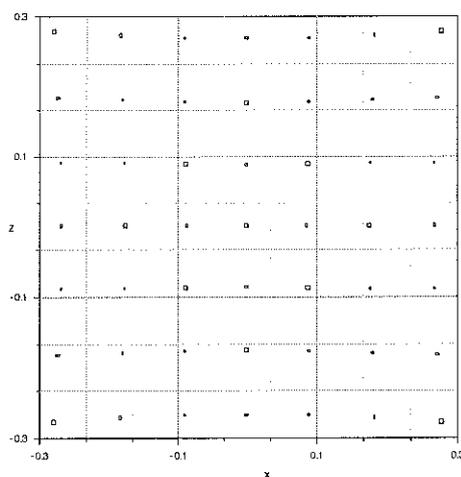


Figura 5. Esempio di generazione di punti di mira su uno schermo piano, con  $d = 1$ .

*Coordinate angolari di punti di mira sul piano*

Dal rapporto tra le due equazioni 14 si ottiene  $\frac{x}{z} = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}$ ; si ha quindi:

$$\sin\varphi = \frac{x}{z} \sin\theta \quad (16)$$

Sostituendo la (16) in (14) si ottiene:

$$x = \frac{d \frac{x}{z} \sin\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta - \frac{x^2}{z^2} \sin^2\theta}} \quad (17)$$

da cui si ricava:

$$z^2 - x^2 \sin^2\theta - z^2 \sin^2\theta = d^2 \sin^2\theta \quad (18)$$

e quindi:

$$\sin^2\theta = \frac{z^2}{d^2 + x^2 + z^2} \quad \sin\theta = \frac{\pm z}{\sqrt{d^2 + x^2 + z^2}} \quad (19)$$

Sostituendo la (19) in (16) si ottengono i valori trigonometrici di  $\varphi$  e  $\theta$  in funzione delle coordinate  $x$  e  $z$ :

$$\sin\varphi = \pm \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2 + z^2}} \quad (20)$$

$$\sin\theta = \pm \frac{z}{\sqrt{d^2 + x^2 + z^2}}$$

Misurando gli angoli con i versi mostrati nelle figure si deve prendere il segno + nelle equazioni (20). Gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$  associati ad un punto di coordinate  $x, z$  su un piano posto a distanza  $d$  dall'origine del sistema di riferimento sono dunque dati da:

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2 + z^2}}$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{z}{\sqrt{d^2 + x^2 + z^2}} \quad (21)$$

### Coordinate schermo

Gli assi dello schermo effettivamente impiegato per la generazione delle mire hanno orientamento e origine differenti da quelli usati per l'eq. 14 (vedi figura 6).

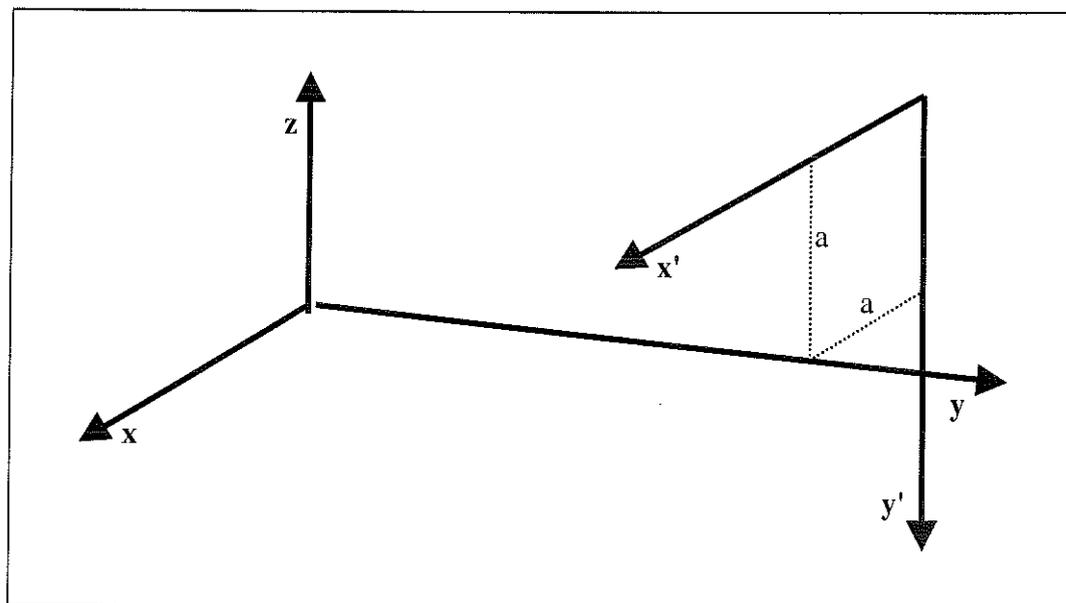


Figura 6. Trasformazione di coordinate planari.

Si hanno dunque le seguenti trasformazioni:

$$\begin{aligned}x' &= x + a \\y' &= -z + a\end{aligned}$$

dove  $a = x_m = z_m$  è la massima distanza dall'origine, ottenuta rispettivamente per  $\varphi = \varphi_m$ ,  $\theta = 0$  e  $\varphi = 0$ ,  $\theta = \theta_m$ ; si impone  $\varphi_m = \theta_m$ .

Sullo schermo si hanno N punti sui quali rappresentare l'escursione  $2x_m$  o  $2z_m$ ; si determina così il fattore di scala k nella trasformazione:

$$\begin{aligned}x'' &= kx' \\y'' &= ky'\end{aligned}$$

Si ha:

$$k = \frac{N}{2x_m} = \frac{N}{2z_m}$$

Le coordinate schermo sono dunque date da:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \frac{N}{2x_m} (x + x_m) = \frac{Nx}{2x_m} + \frac{N}{2} \\ y_{i,j} &= \frac{N}{2z_m} (-z + z_m) = \frac{-Nz}{2z_m} + \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

con  $i, j = 0, 1, \dots, N-1$ . Si ha:

$$x_m = z_m = \frac{d \sin \varphi_m}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_m}} \quad (23)$$

*Generazione di punti sullo schermo*

Sostituendo nelle equazioni 22 il parametro definito in 23 si ottiene:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \frac{N\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_m}}{2\sin \varphi_m} \times \frac{\sin \varphi_i}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_i - \sin^2 \theta_j}} + \frac{N}{2} \\ y_{i,j} &= \frac{N\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_m}}{2\sin \varphi_m} \times \frac{\sin \theta_j}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_i - \sin^2 \theta_j}} + \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (24)$$

Si possono costruire due insiemi di curve. Le proiezioni dei paralleli orizzontali sono ottenute mantenendo costante l'angolo  $\theta$ , che individua la curva, e facendo variare da 0 a N l'indice  $i$  dell'angolo  $\varphi$ ; le proiezioni dei paralleli verticali sono ottenute mantenendo costante l'angolo  $\varphi$  e facendo variare l'indice  $j$  dell'angolo  $\theta$ : ciò corrisponde a scambiare le coordinate schermo  $x_{i,j}$  e  $y_{i,j}$ .

*Coordinate angolari di punti sullo schermo*

Dato un punto sullo schermo gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$  sono ottenuti utilizzando le eq. 20, 22, 23. Si ha:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sin^{-1} \frac{(2x_{i,j} - N)\sin \varphi_m}{\sqrt{N^2 - N^2 \sin^2 \varphi_m + 4\sin^2 \varphi_m \left( x_{i,j}^2 + y_{i,j}^2 - Nx_{i,j} - Ny_{i,j} + \frac{N^2}{2} \right)}} \\ \theta &= \sin^{-1} \frac{(-2y_{i,j} - N)\sin \varphi_m}{\sqrt{N^2 - N^2 \sin^2 \varphi_m + 4\sin^2 \varphi_m \left( x_{i,j}^2 + y_{i,j}^2 - Nx_{i,j} - Ny_{i,j} + \frac{N^2}{2} \right)}} \end{aligned} \quad (25)$$

Semplificando e ponendo  $x_{i,j} = x$ ,  $y_{i,j} = y$  si ha:

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{(2x - N)\sin\varphi_m}{\sqrt{N^2 + \sin^2\varphi_m + (4x^2 + 4y^2 - 4Nx - 4Ny + N^2)}}$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{(2y - N)\sin\varphi_m}{\sqrt{N^2 + \sin^2\varphi_m + (4x^2 + 4y^2 - 4Nx - 4Ny + N^2)}}$$
(26)

## Rilevamento dei movimenti

Il rilevamento oggettivo della direzione di fissazione dell'occhio può essere schematizzato con la determinazione delle coordinate di un punto nello spazio oggetto a partire dal rilevamento delle coordinate del punto nello spazio immagine. Per comodità si considerano una sfera di raggio  $r$ , il cui centro coincide con l'origine di un sistema di riferimento  $\Omega$ , e un obiettivo, il cui asse ottico coincide con l'asse  $y$  di  $\Omega$ ; si determinano quindi le relazioni che legano le coordinate angolari di un generico punto sulla superficie della sfera alle coordinate spaziali della sua immagine.

## Formazione delle immagini

Dati un obiettivo di lunghezza focale  $f$ , e un segmento di lunghezza  $h_o$ , perpendicolare all'asse ottico dell'obiettivo e posto a distanza  $d$  dal fuoco, l'immagine prodotta è costituita da un segmento, anch'esso perpendicolare all'asse ottico, la cui dimensione  $h_i$  è data da:

$$h_i = h_o \frac{f}{d} \quad (27)$$

Si consideri un sistema di riferimento  $\Omega$  e si faccia coincidere l'asse ottico dell'obiettivo con un asse del sistema di riferimento: ad esempio, si consideri un sistema a due dimensioni  $\Omega$  ( $y$ ,  $z$ ) e l'asse ottico coincida con l'asse  $y$  (vedi figura 7). Se l'obiettivo è posto a distanza  $b$  dall'origine, la coordinata  $z_i$  dell'immagine di un punto  $p$  ( $y_o, z_o$ ) è data da:

$$z_i = z_o \frac{f}{d} \quad (28)$$

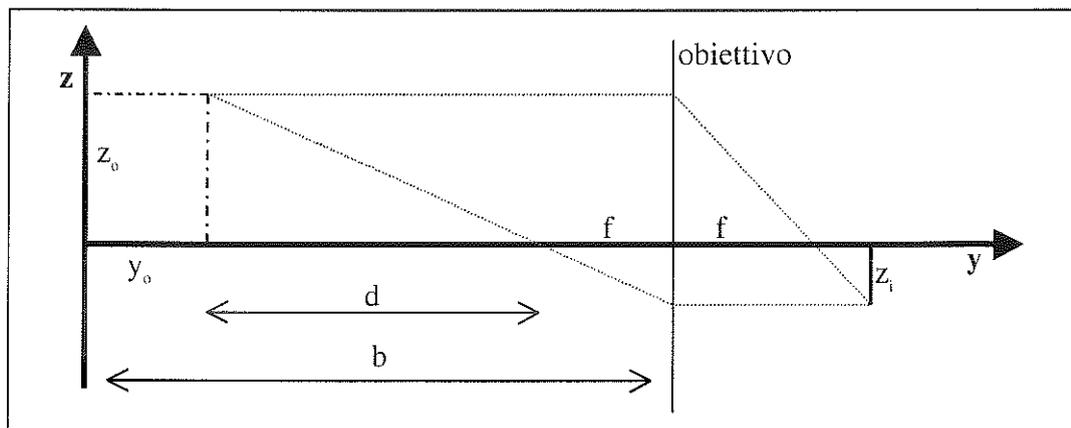


Figura 7. Metodo geometrico per la formazione di immagini in un piano.

### Misure sulle immagini

Poiché  $d = b - f - y_0$ , sostituendo questa espressione nella 28 si ottiene:

$$z_i = z_0 \frac{f}{b - f - y_0} \quad (29)$$

Dalla sola misura della coordinata  $z_i$  non è possibile ricavare il valore di  $z_0$  se  $y_0$  non è noto; lo stesso vale nel caso di un punto  $p$  in uno spazio a tre dimensioni. Se il punto  $p$  è vincolato, e quindi le sue coordinate sono tra loro legate da una relazione, è possibile determinare la posizione del punto in base alle misure eseguite sull'immagine di esso.

### Punto vincolato nel piano

Si consideri un punto  $p(y_0, z_0)$  appartenente ad una arco di cerchio di raggio  $r$  e determinato dall'angolo  $\theta$  tra l'asse  $y$  e il raggio  $r$ ; si ha (vedi figura 8):

$$\begin{aligned} z_0 &= r \sin\theta \\ d &= a + r(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

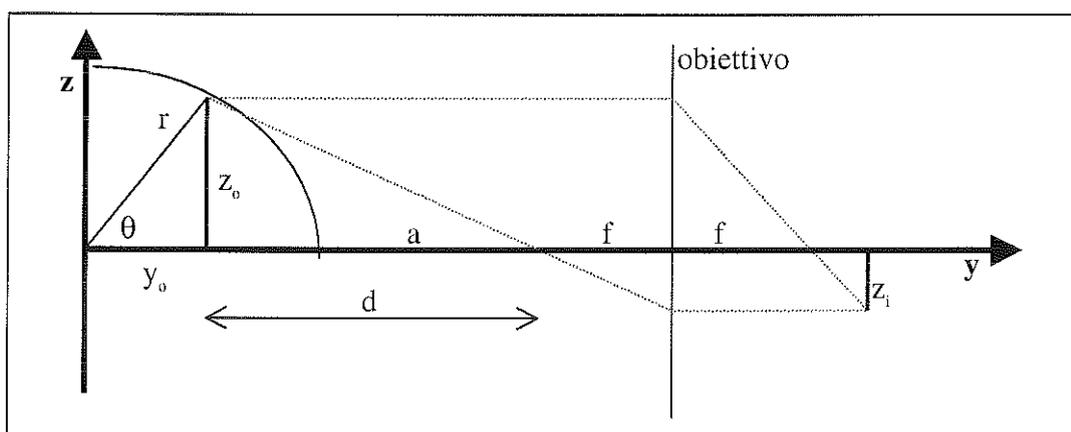


Figura 7. Formazione dell'immagine di un punto vincolato su un cerchio.

Sostituendo i suddetti valori nell'equazione 28 ottiene:

$$z_i = r \sin\theta \frac{f}{a + r(1 - \cos\theta)} \quad (30)$$

Fissati  $r$ ,  $a$ ,  $f$ , la dimensione dell'immagine dipende dall'angolo  $\theta$  in modo non lineare;  $z_i$  cresce al crescere di  $\theta$ , misurato in verso antiorario a partire dall'asse  $y$ .

Se l'escursione di  $\theta$  è limitata, il termine  $1 - \cos\theta$  può essere considerato nullo; ad esempio, per  $\theta = 15^\circ$  si ha  $\cos\theta = 0.966$ , e quindi l'approssimazione suddetta può essere considerata valida con un errore  $< 4\%$  nell'intervallo  $0 \leq \theta \leq 15^\circ$ . In questo caso si ha  $d \cong a$  e l'equazione 30 diventa:

$$z_i = \frac{f}{a} r \sin\theta = \frac{f}{a} z_0 \quad (31)$$

L'angolo  $\theta$  è dunque approssimativamente dato da:

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{a}{fr} z_i \right) \quad (32)$$

Per ricavare il valore di esatto di  $\theta$ , si utilizzano le seguenti relazioni trigonometriche:

$$\sin\theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad \cos\theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad (33)$$

Sostituendo nell'equazione 30 le trasformazioni definite in 33 si ottiene:

$$az_i + rz_i - rz_i \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = rf \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad (34)$$

L'angolo  $\theta$  è dunque dato da:

$$\theta = 2 \operatorname{atan} \frac{fr \pm \sqrt{f^2 r^2 - a(a + 2r)z_i^2}}{(a + 2r)z_i} \quad (35)$$

Nella espressione 35 si deve prendere il segno -.

#### *Punto vincolato nello spazio*

Si considerino un punto  $p(x_o, y_o, z_o)$ , appartenente ad una calotta sferica di raggio  $r$  con centro nell'origine di un sistema di riferimento  $\Omega$ , e un obiettivo con lunghezza focale  $f$ , posto sull'asse  $y$  di  $\Omega$  (vedi figura 9). Le dimensioni dei segmenti  $x_i$  e  $z_i$ , che costituiscono le immagini dei segmenti  $x_o$  e  $z_o$ , sono ricavabili utilizzando l'equazione 28; si ha:

$$x_i = x_o \frac{f}{d}$$

$$z_i = z_o \frac{f}{d} \quad (36)$$

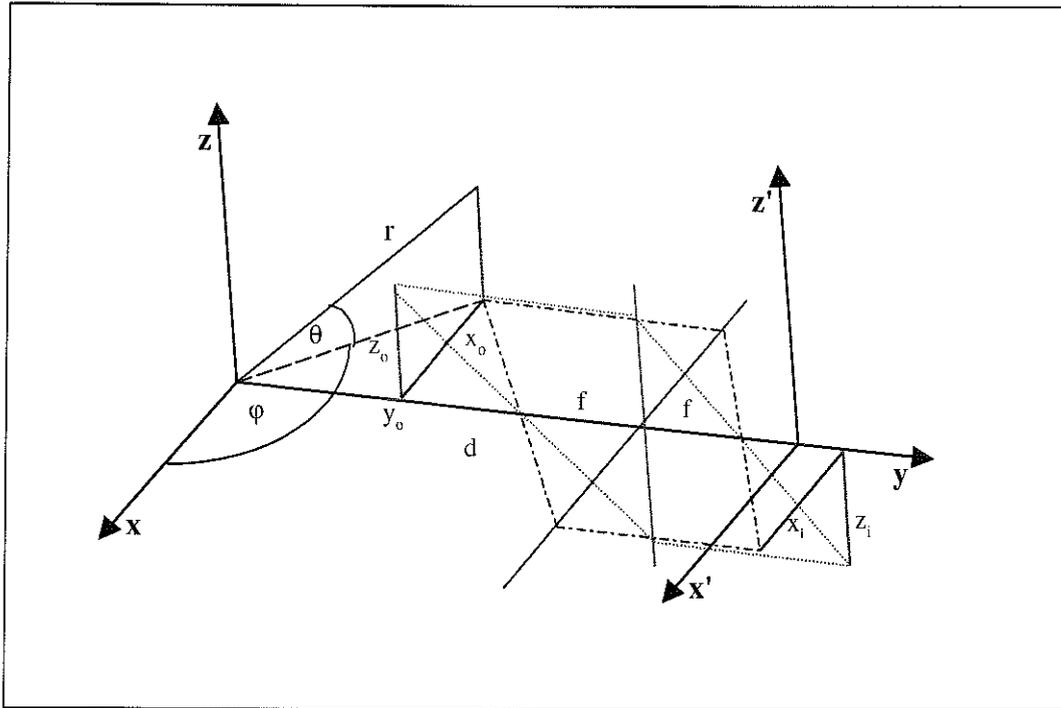


Figura 9. Formazione dell'immagine di un punto nello spazio tridimensionale.

I punti della superficie possono essere individuati mediante il valore del raggio e degli angoli  $\theta$  e  $\varphi$  mostrati in figura 10; in questo caso le coordinate di un punto sulla superficie della sfera sono definite dalle equazioni 9.

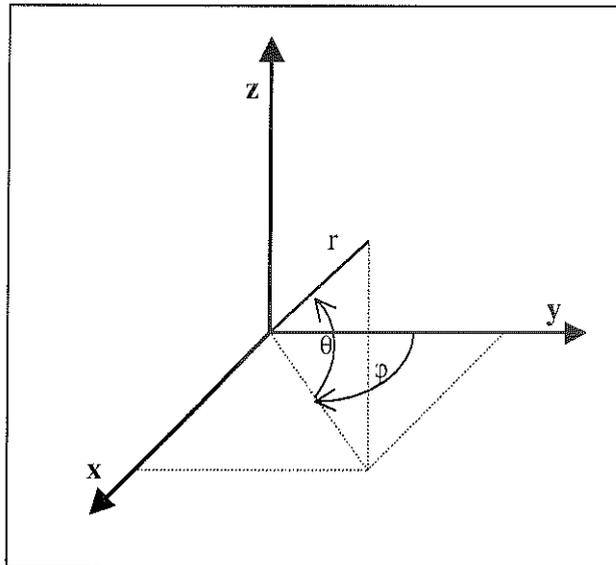


Figura 10. Individuazione dei punti su una sfera mediante una coppia di coordinate angolari.

Fissato l'angolo  $\theta$ , al variare di  $\varphi$  si ottengono i punti su una circonferenza di raggio  $r \cos \theta$ , con  $z$  costante: si ha quindi un parallelo sulla sfera, rispetto al piano equatoriale costituito dal piano  $xy$ . Invece, fissato l'angolo  $\varphi$ , al variare di  $\theta$  si ottengono i punti su una circonferenza

di raggio  $r$ , appartenente al piano passante per l'asse  $z$  e formante un angolo  $\varphi$  con l'asse  $y$ : si ha dunque un meridiano sulla superficie sferica. Si noti che per  $\varphi \neq 0$ , la rotazione di  $r$  avviene intorno all'asse  $x'$ , che giace sul piano  $xy$  ed è ruotato dell'angolo  $\varphi$  rispetto all'asse  $x$ . La figura 11 mostra un esempio grafico dei punti individuati con incrementi costanti degli angoli  $\theta$  e  $\varphi$ .

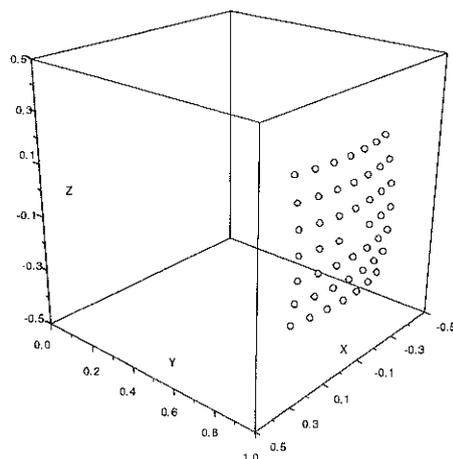


Figura 11. Disposizione dei punti su una sfera di raggio  $r = 1$ , ottenuti con incrementi angolari di  $5^\circ$  degli angoli  $\theta$  e  $\varphi$ .

Sostituendo le espressioni di  $x$ ,  $y$ ,  $z$  in funzione di  $\theta$  e  $\varphi$  e ponendo nelle equazioni 36  $d = a + r - y_0$  si ottiene:

$$x_i = r \cos\theta \sin\varphi \frac{f}{a + r(1 - \cos\theta \cos\varphi)}$$

$$z_i = r \sin\theta \frac{f}{a + r(1 - \cos\theta \cos\varphi)}$$
(37)

Le equazioni 37 consentono di determinare le coordinate di un punto nel piano immagine al variare degli angoli  $\varphi$  e  $\theta$ , essendo noti i valori dei parametri  $r$ ,  $a$  e  $f$ . Per piccoli valori di  $\theta$  e  $\varphi$ , il termine  $1 - \cos\theta \cos\varphi$  può essere considerato nullo; in questo caso si ha  $d \cong a$  e le equazioni 37 diventano:

$$x_i = r \cos\theta \sin\varphi \frac{f}{a} = \frac{f}{a} x_0$$

$$z_i = r \sin\theta \frac{f}{a} = \frac{f}{a} z_0$$
(38)

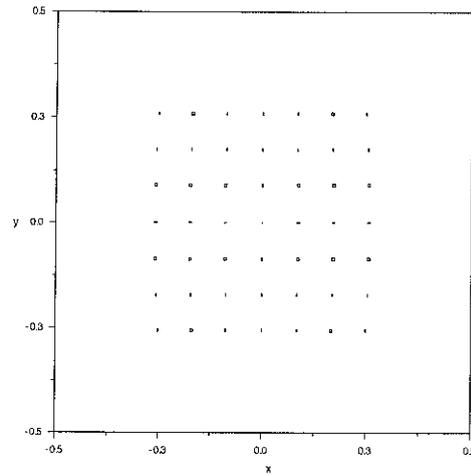


Figura 12. Immagine dei punti disposti su una superficie sferica nell'approssimazione  $d \cong a$ .

La figura 12 mostra l'immagine teorica dei punti su una superficie sferica, rappresentati in figura 11; i punti immagine sono stati calcolati mediante le equazioni 38, con  $r = f = a = 1$ . In questo caso, le coordinate dei punti sul piano sono date da (vedi equazioni 9 e 38):

$$x_i = \cos(i \times 5^\circ) \times \sin(j \times 5^\circ)$$

$$z_i = \sin(i \times 5^\circ)$$

con  $i, j = -3, -2, \dots, 3$ .

Nell'approssimazione suddetta, dalle equazioni 38 si ricavano le seguenti relazioni inverse:

$\theta \cong \sin^{-1} \left( \frac{a}{fr} z_i \right)$ $\varphi \cong \sin^{-1} \left( \frac{a}{fr \cos \theta} x_i \right) \cong \sin^{-1} \left( \frac{a}{fr} x_i \right)$	(39)
--	------

## Simulazione

Per verificare le relazioni determinate in precedenza è stata realizzata la mappa del reticolo di punti definiti da

$$x_i = k [\cos (i \times 5^\circ) \times \sin (j \times 5^\circ)]$$

$$z_i = k [\sin (i \times 5^\circ)]$$

dove  $k$  è un fattore di scala: in base alle considerazioni fatte in precedenza, la mappa piano corrisponde con buona approssimazione alla mappa sferica di punti posti ad intervalli angolari costanti di  $5^\circ$ . La mappa è stata ripresa con una telecamera, ponendo l'asse dell'obiettivo perpendicolare al foglio.

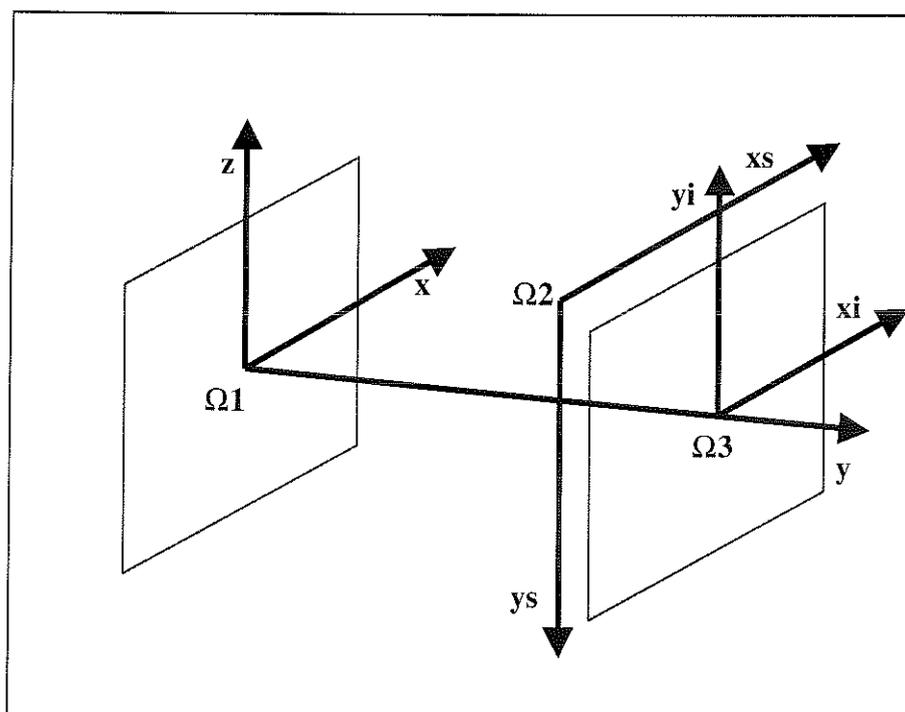


Figura 13. Sistemi di riferimento per l'acquisizione di immagini mediante telecamera.

I punti sulla mappa sono disegnati in base al sistema di riferimento  $\Omega_1(x,y,z)$  mostrato in figura 13: la coordinata  $z$  varia in funzione dell'angolo  $\theta$ , misurato positivamente nel verso delle  $z$  crescenti; la coordinata  $x$  dipende sia da  $\theta$  che dall'angolo  $\varphi$ , anch'esso misurato positivamente nel verso delle  $x$  crescenti. Sull'immagine digitale l'origine del sistema  $\Omega_2(x_s,y_s)$  coincide con l'angolo in alto a sinistra.

La figura 14 mostra l'immagine acquisita, definita da  $768 \times 576$  pixel. Mediante un algoritmo di blob analysis sono state ricavate le coordinate dei centroidi associati agli elementi del reticolo. E' stata quindi eseguita una trasformazione delle coordinate schermo, rispetto al sistema di riferimento  $\Omega_3(x_i,y_i)$  i cui assi sono concordi con gli assi  $x$  e  $z$  e la cui origine coincide con l'intersezione dell'asse  $y$  col piano immagine.



Figura 14. Immagine digitale del reticolo di punti.

Al fine di far coincidere il punto centrale del reticolo con l'origine del nuovo sistema di riferimento è stata eseguita la trasformazione:

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_s - x_0) \\ z_1 &= -(y_s - y_0) \end{aligned}$$

dove  $x_0, y_0$  sono le coordinate del centro del reticolo nel sistema  $\Omega_2$ . Usando le espressioni approssimate definite in 39 sono stati quindi calcolati gli angoli  $\theta$  e  $\varphi$  associati a ciascun punto del reticolo: i valori di  $\theta$  risultano esatti, nei limiti della precisione di misura, mentre i valori di  $\varphi$  differiscono dal valore teorico di meno di un grado.

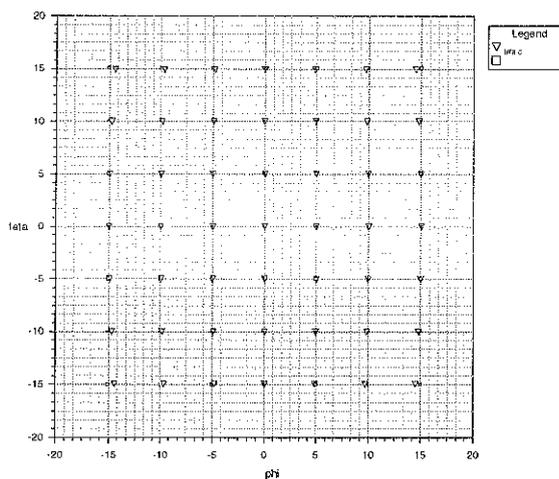


Figura 15. Valori degli angoli  $\theta$  e  $\varphi$  ricavati dall'analisi dell'immagine digitale mostrata in figura 13.

In una fase successiva della sperimentazione sono state acquisite le immagini di una mira circolare spostata con incrementi angolari costanti sulla superficie di una sfera. L'apparato sperimentale è costituito da una torretta rotante sul cui asse è montato un supporto verticale, il

cui asse individua l'asse z del sistema di riferimento  $\Omega_1$  definito in precedenza; sull'estremità superiore del supporto è incernierata un'asta mobile, il cui asse individua il raggio r di una sfera con centro sull'origine di  $\Omega_1$ ; le rotazioni della torretta corrispondono dunque alle variazioni dell'angolo  $\varphi$  indicato in figura 10, mentre le rotazioni dell'asta corrispondono a variazioni dell'angolo  $\theta$ .

Gli angoli  $\theta$  e  $\varphi$  sono stati variati con incrementi di  $5^\circ$  tra gli estremi  $-15^\circ$  e  $15^\circ$ ; per ciascuna coppia di valori degli angoli, mediante una telecamera il cui asse ottico coincideva approssimativamente col raggio r nella condizione  $\theta = \varphi = 0$  sono state acquisite le immagini della mira, costituita da un disco nero su un supporto bianco, fissato all'estremità dell'asta; la figura 16 mostra un esempio di acquisizione.

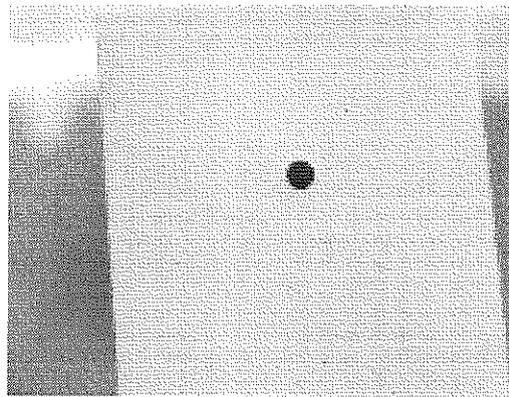


Figura 16. Immagine digitale della mira.

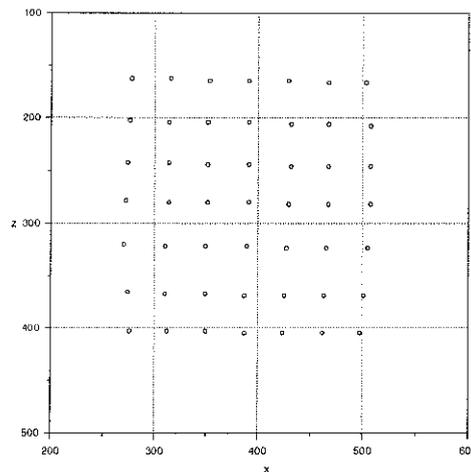


Figura 17. Mappa delle coordinate schermo dell'immagine di una mira circolare spostata su una superficie sferica con incrementi angolari costanti di  $5^\circ$ .

Le 49 immagini così ottenute sono state successivamente elaborate al fine di determinare le coordinate del centroide dell'immagine del disco. La figura 17 mostra la mappa dei risultati ottenuti; le coordinate sono riferite al sistema  $\Omega_2$ .

Al fine di calcolare gli angoli di rotazione della mira, si devono trasformare in unità metriche i valori di misura, espressi in pixel, e si devono inserire nella 39 i valori dei parametri che determinano l'ingrandimento dell'immagine rispetto all'oggetto.

Per convertire i valori di misura sull'immagine digitale nelle unità impiegate dal sistema di riferimento  $\Omega_3$ , si esegue una traslazione delle coordinate di misura in modo da far coincidere il centroide della mira individuata da  $\theta = \varphi = 0$  con l'origine del sistema di riferimento  $\Omega_3$  e si introduce il fattore di scala dipendente dalla dimensione del pixel sul piano immagine, che è data dalla dimensione degli elementi del trasduttore opto-elettronico della telecamera.

Nelle condizioni sperimentali impiegate si ha:

- distanza sfera - piano principale dell'obiettivo  $a \approx 600$  mm
- lunghezza focale dell'obiettivo  $f = 50$  mm
- raggio della sfera  $r \approx 42$  mm
- dimensione degli elementi del trasduttore  $p = 0.0082$  mm

E' stata quindi eseguita la trasformazione:

$$\begin{aligned} x_i &= (384 - x_s) \\ z_i &= (288 - y_s) \end{aligned}$$

Sono stati calcolati gli angoli di rotazione mediante la relazione:

$$\theta \cong \sin^{-1} \left( \frac{a}{fr} \times p \times z_i \right) \cong \sin^{-1} (0.0023 z_i)$$

$$\varphi \cong \sin^{-1} \left( \frac{a}{fr} \times p \times x_i \right) \cong \sin^{-1} (0.0023 x_i)$$

La figura 18 mostra la mappa dei risultati ottenuti.

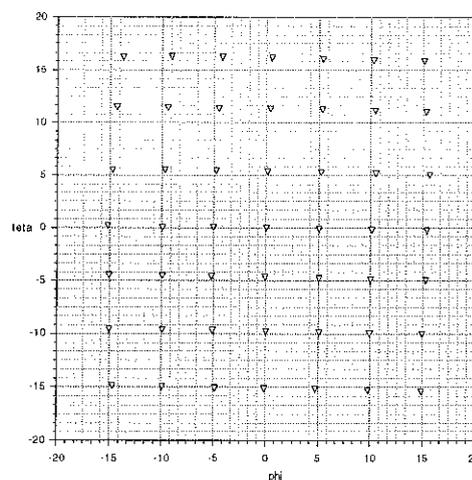


Figura 18. Angoli di rotazione della mira ricavati dall'analisi delle immagini acquisite.

## Ripresa dei movimenti oculari

La telecamera impiegata per la ripresa dei movimenti oculari eseguiti per l'osservazione di punti di mira su uno schermo non deve ovviamente costituire un ostacolo alla visione del soggetto in esame. Per soddisfare questa condizione si deve porre la telecamera al di fuori del campo di vista interessato dalla schermo; si può quindi porre la telecamera in posizione obliqua rispetto alla direzione di osservazione in condizioni di riposo, oppure si possono impiegare degli specchi semitrasparenti, posti in posizione opportuna.

## Formazione di immagini mediante uno specchio piano

La posizione dell'immagine virtuale di un oggetto prodotta da uno specchio piano viene determinata usando i principi dell'ottica geometrica: l'immagine  $p'$  di un punto oggetto  $p$  si trova infatti sulla retta passante per  $p$  e normale al piano dello specchio;  $p$  e  $p'$  sono equidistanti dal piano riflettente.

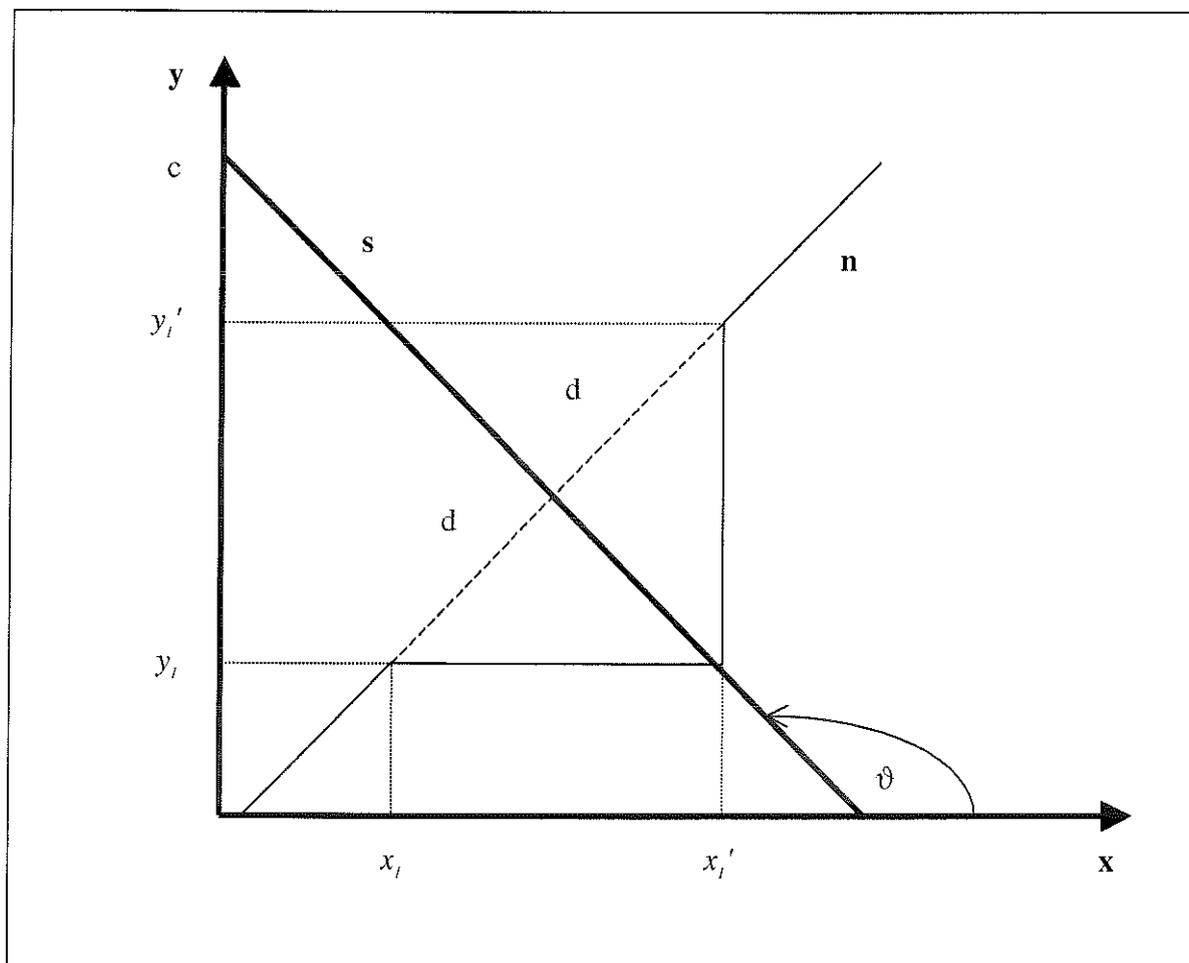


Figura 23. Coordinate del punto immagine prodotto da uno specchio piano.

Dato un sistema di riferimento  $\Omega$  si considerino un punto  $p_1$ , di coordinate  $x_1, y_1$ , e una retta  $s$ , di equazione  $y = mx + c$  (vedi figura 13). La retta  $n$ , perpendicolare a  $s$ , ha il coefficiente angolare:

$$m_n = -\frac{1}{m} \quad (40)$$

Il termine costante di n è ricavabile imponendo che la retta passi per  $p_1$ ; si ha:

$$y_1 = -\frac{x_1}{m} + c \quad (41)$$

Si ha quindi:

$$c_n = y_1 + \frac{x_1}{m} \quad (42)$$

Il punto di intersezione  $p_n$  tra le due rette è ottenuto risolvendo il sistema:

$$y = mx + c \quad (43)$$

$$y = -\frac{x}{m} + y_1 + \frac{x_1}{m}$$

Si ha dunque:

$$x_n = \frac{m}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) \quad (44)$$

$$y_n = \frac{m^2}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) + c$$

Le differenze tra le coordinate di  $p_n$  e  $p_1$  sono date da:

$$\Delta x = \frac{m}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) - x_1 \quad (45)$$

$$\Delta y = \frac{m^2}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) + c - y_1$$

Le stesse differenze si hanno tra le coordinate di  $p_1'$  e  $p_n$ ; si ha:

$$\Delta x = x_1' - \frac{m}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) \quad (46)$$

$$\Delta y = y_1' - \frac{m^2}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) - c$$

Eguagliando le differenze in x e y dei sistemi 45 e 46 si ottiene :

$$\frac{m}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) - x_1 = x_1' - \frac{m}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) \quad (47)$$

$$\frac{m^2}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) + c - y_1 = y_1' - \frac{m^2}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) - c_s$$

Le coordinate del punto immagine sono date da:

$$\begin{aligned}x_1' &= 2 \frac{m}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) - x_1 \\y_1' &= 2 \frac{m^2}{1+m^2} (y_1 + \frac{x_1}{m} - c) + 2c - y_1\end{aligned} \quad (48)$$

Si considerino due punti oggetto appartenenti all'asse x: il punto p(0,0) e il punto p(L,0). Sostituendo questi valori nelle equazioni 48 si ottengono le coordinate dei rispettivi punti immagine:

p'(0,0)

$$\begin{aligned}x_1' &= -2c \frac{m}{1+m^2} \\y_1' &= -2c \frac{m^2}{1+m^2} + 2c\end{aligned} \quad (49)$$

p'(L,0)

$$\begin{aligned}x_1' &= 2 \frac{m}{1+m^2} (\frac{L}{m} - c) - L \\y_1' &= 2 \frac{m^2}{1+m^2} (\frac{L}{m} - c) + 2c\end{aligned} \quad (50)$$

La distanza tra i due punti oggetto dipende dalle differenze tra le coppie di coordinate x e y; si ha:

$$d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = L^2 \quad (51)$$

In modo analogo, per i punti immagine si ha:

$$d'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 = (L - \frac{2L}{1+m^2})^2 + (-\frac{2Lm}{1+m^2})^2 = L^2 (\frac{1-m^2}{1+m^2})^2 + 4(\frac{m^2}{1+m^2})^2 = L^2 \quad (52)$$

L'immagine virtuale prodotta da uno specchio piano ha quindi la stessa dimensione dell'oggetto, indipendentemente dall'inclinazione dello specchio.

### Ripresa delle immagini speculari

Si considerino un oggetto, assimilabile ad un segmento di lunghezza  $L$ , ed un obiettivo impiegato per la ripresa di immagini. Si può imporre che l'asse ottico dell'obiettivo sia perpendicolare al segmento e passi per il centro di esso: si individua così il sistema di riferimento mostrato in figura 14.

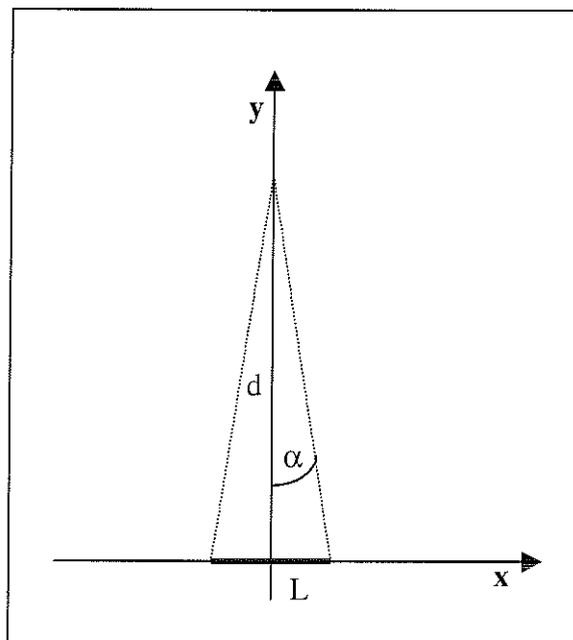


Figura 14. Sistema di riferimento  $xy$  individuato da un oggetto e dall'asse ottico di un obiettivo.

Se l'obiettivo è posto a distanza  $d$  da  $L$ , il campo di vista è definito dall'angolo di apertura  $\alpha$ ; si ha:

$$d \tan \alpha = L/2 \quad (53)$$

Si consideri uno specchio, individuato da una retta  $s$  nel piano di riferimento  $xy$  (vedi figura 15). In base alle considerazioni fatte in precedenza, la retta  $s$  risulta bisettrice tra la retta  $x$ , sulla quale giace il segmento oggetto  $L$ , e la retta  $r$ , sulla quale giace il segmento  $L'$ , che costituisce l'immagine virtuale di  $L$  (vedi angolo  $\beta$  in figura 15);  $L$  e  $L'$  hanno la stessa dimensione. Di conseguenza, se l'obiettivo viene posto nella posizione  $B$  con l'asse perpendicolare a  $L'$ , l'immagine reale così ottenuta è simile a quella ottenuta quando l'obiettivo viene posto nella posizione  $A$  con l'asse perpendicolare a  $L$ ; l'unica differenza è costituita dall'inversione destra-sinistra prodotta dalla riflessione sulla superficie speculare piana.

Se  $\theta$  è l'angolo tra l'asse  $x$  e la retta  $s$ , l'angolo tra l'asse  $x$  e l'asse ottico dell'obiettivo posto in  $B$  risulta:

$$\eta = \theta - \pi/2$$

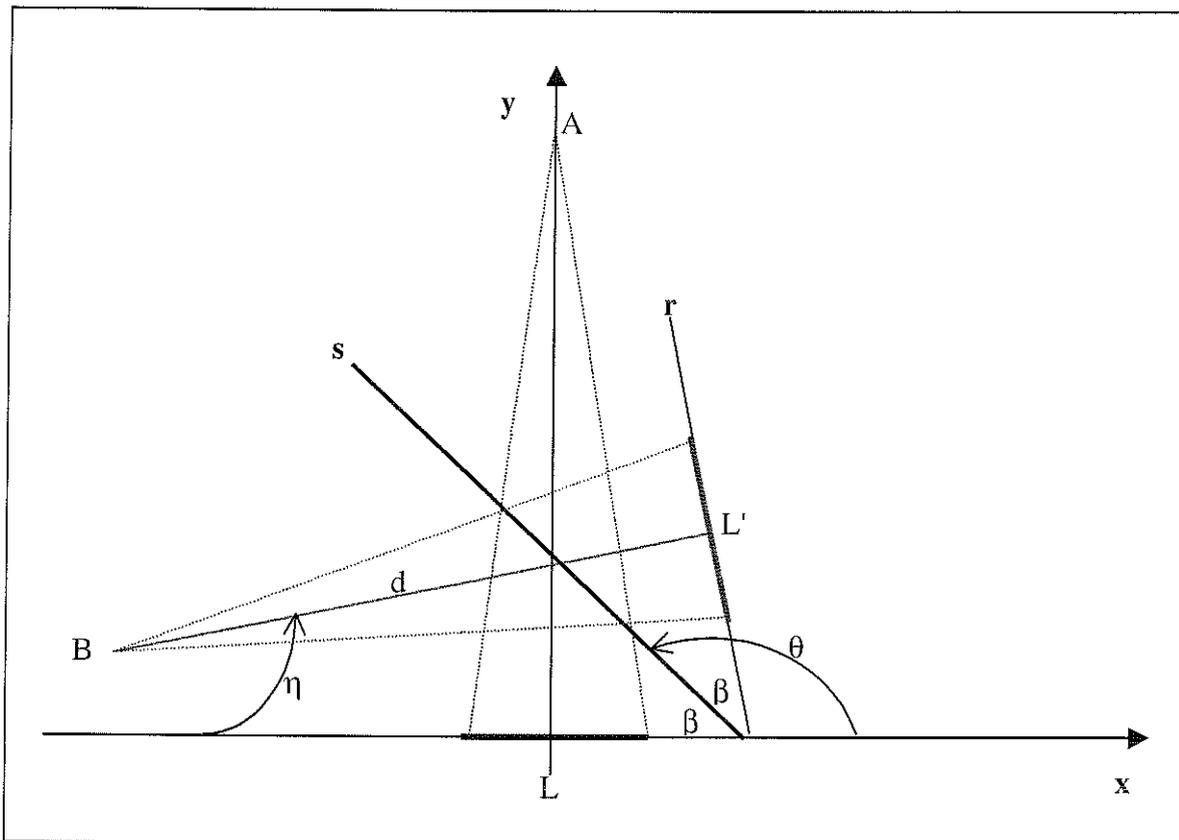


Figura 15. Relazioni geometriche considerate per la ripresa di un oggetto  $L$  e della sua immagine virtuale  $L'$  formata dallo specchio  $s$ .

## **Conclusioni**

Lo studio condotto ha mostrato che elaborando l'informazione contenuta in una singola immagine, se sono note le condizioni di ripresa è possibile determinare l'orientamento spaziale di un oggetto vincolato, in funzione di due angoli in un sistema di riferimento tridimensionale: in particolare è quindi possibile determinare la direzione di vista di un occhio, una volta che il sistema di misura è stato opportunamente tarato.

La sperimentazione svolta ha indicato che è possibile realizzare un dispositivo per la ripresa dei movimenti oculari, costituito da una coppia di telecamere, ciascuna delle quali inquadra un occhio, e da uno o due specchi, che consentano la visione delle mire di stimolazione al soggetto in esame. Le immagini riprese dalle telecamere possono essere elaborate mediante un calcolatore di tipo personal, corredato di una scheda per l'acquisizione di segnale video.