

Consiglio Nazionale delle Ricerche



ISTITUTO DI ELABORAZIONE DELLA INFORMAZIONE

PISA

ANALISI NUMERICA DI UNA DISEQUAZIONE
VARIAZIONALE LEGATA AL MOTO DI UN
FLUIDO ATTORNO AD UN OSTACOLO

Mario Arioli

Nota Interna B77-28

Luglio 1978

" ANALISI NUMERICA DI UNA DISEQUAZIONE VARIAZIONALE LEGATA
AL MOTO DI UN FLUIDO ATTORNO AD UN OSTACOLO "

Mario Arioli (*)

(*) Questo lavoro, estratto dalla tesi di laurea (Rel. Prof. A. Laratta)
è stato sviluppato presso l'Istituto di Elaborazione della Informazione
del C.N.R., Pisa.

Riassunto.

In un loro lavoro Brezis e Stampacchia ([1]) hanno dimostrato che il moto stazionario e irrotazionale di un fluido incomprimibile attorno ad un profilo alare si può ricondurre allo studio nel piano odografo della soluzione di una disequazione variazionale.

Questo lavoro è dedicato allo studio numerico di tale disequazione variazionale col metodo degli elementi finiti. Particolare attenzione è rivolta alla valutazione dell'errore che si commette nell'approssimare la disequazione variazionale con un'altra la cui soluzione è definita su un dominio limitato; alla maggiorazione dell'errore di discretizzazione, e al delicato problema di riportare la soluzione dal piano odografo al piano fisico.

Abstract.

In this paper we study the variational inequality which describes the steady flow of an incompressible fluid past a given profile from the numerical point of view.

Use is made of the finite element technique and some error estimates are given.

1. Impostazione del problema.

In questo paragrafo si descrive il problema fisico e la sua impostazione analitica. Si riassumono inoltre i risultati ottenuti da Brezis e Stampacchia ([1]), che verranno utilizzati nel seguito.

Sia \mathcal{P} un profilo strettamente convesso e simmetrico rispetto all'asse x , immerso in un fluido incomprimibile. Vogliamo studiare il moto irrotazionale e stazionario attorno al profilo \mathcal{P} , supponendo che la velocità $\underline{q}=(q_1, q_2)$ all'infinito abbia un valore uniforme q_∞ , e sia diretta come l'asse x .

Sfruttando la simmetria dell'ostacolo il problema può allora essere studiato nel dominio $G_+ = (\mathbb{R}^2 - \mathcal{P}) \cap \{y \geq 0\}$. Introducendo la trasformazione:

$$W(z) = -i \overline{\lg V(z)} = -\text{Arg } V(z) - i \lg |V(z)|$$

dove $z = x + iy \in G_+$, con $z \neq A$ e $z \neq B$ punti, rispettivamente, di impatto e di fuga (Fig. 1), e con $V(z) = q_1(x,y) - i q_2(x,y)$, le variabili fisiche (x,y) vengono mandate nelle variabili odografe (θ, σ) .

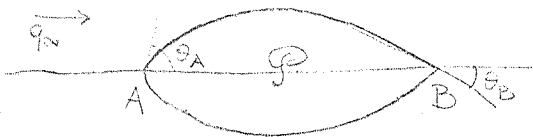


Fig. 1a - Piano fisico

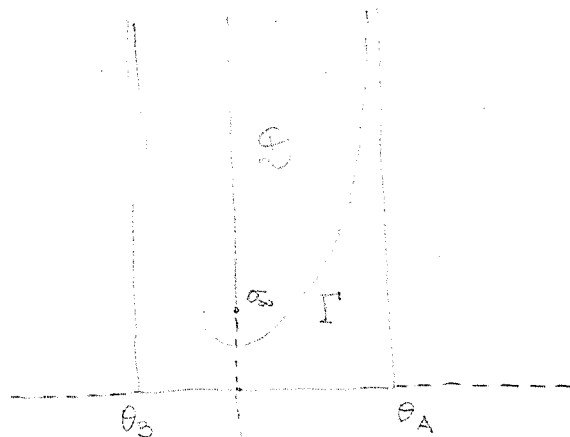


Fig. 1b - Piano odografo

Si dimostra in [1] che tale trasformazione odografa è biunivoca, e che la variabile θ coincide, sul profilo, con l'angolo formato dalla tangente, in un generico punto $P \in \partial \mathcal{P}_+$, con l'asse x ; mentre $\sigma = -\lg(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$.

La coordinata θ varia nell'intervallo (θ_B, θ_A) , dove θ_B e θ_A sono rispettivamente l'angolo di fuga e l'angolo di impatto. Sotto le opportune ipotesi di regolarità, $\partial \mathcal{P}_+ \in C^{2,\infty}$, il profilo $\partial \mathcal{P}_+$ può essere parametrizzato in θ :

$$P = (X(\theta), Y(\theta)) \in \partial \mathcal{P}_+ :$$

il raggio algebrico di curvatura $R(\theta)$ è allora individuato da:

$$(1;1) R(\theta) = - ((X'(\theta))^2 + (Y'(\theta))^2)^{1/2}$$

Introduciamo le seguenti notazioni :

$H = Y(0)$, altezza del profilo ;

$\sigma_\infty = -i \lg q_\infty$;

$\Gamma = W(\partial \mathcal{D}_+) = \{ \theta + i l(\theta) : \theta_B \leq \theta \leq \theta_A ; l(\theta) = -\lg |V(X(\theta) + i Y(\theta))| \}$, ;
dove $l(\theta) \in C^{1,\alpha}$ e $\lim_{\theta \rightarrow \theta_A} l(\theta) = +\infty = \lim_{\theta \rightarrow \theta_B} l(\theta)$;

$\mathcal{D} = \{ \theta + i\sigma : \sigma > l(\theta) ; \theta \in (\theta_B, \theta_A) ; \theta \neq 0 \} \cup \{ i\sigma : \sigma \in (l(0), \sigma_\infty) \}$;

$\Omega = \{ (\theta_B, \theta_A) \times (m, +\infty) \}$ con $m < \min_{\theta} l(\theta)$.

Poichè il problema fisico è perfettamente individuato dalla funzione di corrente $\psi(x,y)$, introduciamo una funzione, ad essa legata, nel piano odo-grafo :

Definizione 1;1 - Per ogni $\theta + i\sigma \in \mathcal{D}$ definiamo :

$$\tilde{\psi}(\theta, \sigma) = \psi(z)$$

dove z è l'unico punto in G_+ tale che $W(z) = \theta + i\sigma$.

La $\tilde{\psi}(\theta, \sigma)$ è non negativa, armonica in \mathcal{D} , nulla su $\overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D}$, inoltre $\tilde{\psi} \in C^0(\overline{\mathcal{D}})$ tranne che nel punto $(0, \sigma_\infty)$ dove è singolare.

Introduciamo allora, in analogia a [3] , la funzione :

$$(1.2) U(\theta, \sigma) = e^{-\sigma} \int_{l(\theta)}^{\sigma} e^s \tilde{\psi}(\theta, s) ds$$

In [1] vengono dimostrate le seguenti proprietà di $U(\theta, \sigma)$:

$$(1.3) U \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$$(1.4) \Delta U = - e^{-\sigma} R(\theta) , \quad U \in C^{2,\alpha} \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$$(1.5) U_\sigma = \tilde{\psi} - U \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$$(1.6) U_\theta = e^{-\sigma} \int_{l(\theta)}^{\sigma} e^s \tilde{\psi}_\theta(\theta, s) ds \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$$(1.7) \quad U = U_\theta = U_\sigma = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

$$(1.8) \quad U(0, \sigma) = H e^{-\sigma} \quad \sigma > \sigma_\infty$$

Estesa U a Ω ponendo $U = 0$ su $\Omega - \mathcal{D}$ si ha il teorema seguente :

Teorema 1.1 - Sia dato l'insieme convesso:

$$K = \{ V(\theta, \sigma) \in H_0^1(\Omega) : V \geq 0 \text{ in } \Omega ; V(0, \sigma) = H e^{-\sigma} \quad \sigma > \sigma_\infty \}$$

allora si ha che U è soluzione del problema :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \exists U \in K \\ a(U, V-U) = \int_{\Omega} \text{grad } U \cdot \text{grad}(V-U) \, d\theta \, d\sigma \geq \int_{\Omega} R(\theta) e^{-\sigma} (V-U) \, d\theta \, d\sigma \\ \forall V \in K \end{cases}$$

o, equivalentemente, del problema :

$$(1.10) \quad \min_K \int_{\Omega} [(\text{grad } U)^2 - 2 R(\theta) e^{-\sigma} U] \, d\theta \, d\sigma$$

Enunciamo infine alcuni lemmi di notevole utilità nel seguito :

Lemma 1.1 - Se $\sigma \uparrow +\infty$ allora si ha che $e^\sigma u(\theta, \sigma) \uparrow w(\theta)$ dove :

$$(1.11) \quad w(\theta) = \begin{cases} (x_A - X(\theta)) \sin \theta + Y(\theta) \cos \theta & \theta > 0 \\ (x_B - X(\theta)) \sin \theta + Y(\theta) \cos \theta & \theta < 0 \end{cases}$$

(x_A e x_B sono le ascisse dei punti A e B). In particolare sono verificate le relazioni :

$$(1.12) \quad w(\theta) \leq h$$

$$(1.13) \quad U(\theta, \sigma) \leq H e^{-\sigma} \quad \text{su } \mathcal{D}$$

Lemma 1.2 - Esiste una costante reale k tale che per ogni $(\theta, \sigma) \in \mathcal{D}$ con $\sigma > \sigma_\infty$ si ha :

$$\tilde{\Psi}(\theta, \sigma) \leq k e^{-2\sigma}$$

Lemma 1.3 - Sia $z = x + i y \in G_+$ e $w(z) = \theta + i \sigma \in \mathcal{D}$ allora si ha:

$$(1.14) \quad U(\theta, \sigma) = \tilde{\Psi}(\theta, \sigma) + e^{-\sigma} (x \sin \theta - y \cos \theta) - (X(\theta) \sin \theta - Y(\theta) \cos \theta)$$

2. Problema in un dominio limitato.

Introduciamo la famiglia $\{\Omega_T\} = \{(\theta_B, \theta_A) \times (m, T)\}$, con $T \geq \sigma_\infty + 1$, formata dai troncamenti del dominio Ω alle varie altezze T , e la corrispondente famiglia di convessi :

$$(2.1) \quad K_2^T = \{V \in H^1(\Omega_T) : V \geq 0; V(0, \sigma) = H e^{-\sigma} \sigma_\infty < \sigma < T; V(\theta, T) = w(\theta) e^{-T}; \\ V = 0 \text{ su } [(\theta_B, \theta_A) \times \{m\}] \cup [(\theta_B) \times (m, T)] \cup [(\theta_A) \times (m, T)] \}$$

(dove $w(\theta)$ è definita da (1.11)) .

Esiste allora una famiglia di distribuzioni $\{U_2^T \in K_2^T\}$ tale che , per ogni T , U_2^T è la soluzione della disequazione variazionale :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \exists U_2^T \in K_2^T \\ a_T(U_2^T, V - U_2^T) = \int_{\Omega_T} \text{grad } U_2^T \cdot \text{grad}(V - U_2^T) \, d\theta \, d\sigma \geq \int_{\Omega_T} R(\theta) e^{-\sigma} (V - U_2^T) \, d\theta \, d\sigma \\ \forall V \in K_2^T \end{cases}$$

In [1] si dimostra che per ogni T , U_2^T è una soprasoluzione per U in Ω_T .

Lemma 2.1 - Esiste una costante L indipendente da T tale che :

$$(2.3) \quad \|U_2^T\|_{H^1(\Omega_T)} \leq L$$

Dimostrazione.

Per ogni Ω_T si ha per la simmetria della forma bilineare $a_T(\cdot, \cdot)$ che U_2^T è la soluzione del problema di minimo :

$$(2.4) \quad \min_{K_2^T} \left\{ \int_{\Omega_T} (\text{grad } V)^2 - 2 R(\theta) e^{-\sigma} V \, d\theta \, d\sigma \right\}$$

Introduciamo allora la funzione positiva $F \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} F = w(\theta) e^{-\sigma} & \sigma \geq \sigma_\infty \\ F = w(\theta) e^{-\sigma} \frac{\sigma - m}{\sigma_\infty - m} & m \leq \sigma < \sigma_\infty \end{cases}$$

Per ogni T , F ristretta a Ω_T appartiene a K_2^T : quindi, poichè $R(\theta) < 0$ segue da (2.4) che :

$$\int_{\Omega_T} (\text{grad } U_2^T)^2 \, d\theta \, d\sigma \leq \int_{\Omega} (\text{grad } F)^2 - 2 R(\theta) e^{-\sigma} F \, d\theta \, d\sigma$$

$$(1.7) \quad U = U_\theta = U_\sigma = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

$$(1.8) \quad U(0, \sigma) = H e^{-\sigma} \quad \sigma > \sigma_\infty$$

Estesa U a Ω ponendo $U = 0$ su $\Omega - \mathcal{D}$ si ha il teorema seguente :

Teorema 1.1 - Sia dato l'insieme convesso:

$$K = \{ V(\theta, \sigma) \in H_0^1(\Omega) : V \geq 0 \text{ in } \Omega ; V(0, \sigma) = H e^{-\sigma} \quad \sigma > \sigma_\infty \}$$

allora si ha che U è soluzione del problema :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \exists U \in K \\ a(U, V-U) = \int_{\Omega} \text{grad } U \cdot \text{grad}(V-U) \, d\theta \, d\sigma \geq \int_{\Omega} R(\theta) e^{-\sigma} (V-U) \, d\theta \, d\sigma \\ \forall V \in K \end{cases}$$

o, equivalentemente, del problema :

$$(1.10) \quad \min_K \int_{\Omega} [(\text{grad } U)^2 - 2 R(\theta) e^{-\sigma} U] \, d\theta \, d\sigma$$

Enunciamo infine alcuni lemmi di notevole utilità nel seguito :

Lemma 1.1 - Se $\sigma \uparrow +\infty$ allora si ha che $e^\sigma u(\theta, \sigma) \uparrow w(\theta)$ dove :

$$(1.11) \quad w(\theta) = \begin{cases} (x_A - X(\theta)) \sin \theta + Y(\theta) \cos \theta & \theta > 0 \\ (x_B - X(\theta)) \sin \theta + Y(\theta) \cos \theta & \theta < 0 \end{cases}$$

(x_A e x_B sono le ascisse dei punti A e B). In particolare sono verificate le relazioni :

$$(1.12) \quad w(\theta) \leq \bar{h}$$

$$(1.13) \quad U(\theta, \sigma) \leq H e^{-\sigma} \quad \text{su } \mathcal{D}$$

Lemma 1.2 - Esiste una costante reale k tale che per ogni $(\theta, \sigma) \in \mathcal{D}$ con $\sigma > \sigma_\infty$ si ha :

$$\tilde{\Psi}(\theta, \sigma) \leq k e^{-2\sigma}$$

Lemma 1.3 - Sia $z = x + iy \in G_+$ e $w(z) = \theta + i\sigma \in \mathcal{D}$ allora si ha:

$$(1.14) \quad U(\theta, \sigma) = \tilde{\Psi}(\theta, \sigma) + e^{-\sigma} (x \sin \theta - y \cos \theta) - (X(\theta) \sin \theta - I(\theta) \cos \theta)$$

il che implica la tesi .

Dimostriamo ora il seguente teorema :

Teorema 2.1 - Esiste una costante Θ reale, indipendente da T tale che :

$$(2.5) \quad \| U_2^T - U \|_{H^1(\Omega_T)} \leq \Theta (e^{-3T/2} + e^{-T} + e^{-T/2})$$

Dimostrazione .

Fissiamo un numero "b" positivo in modo tale che $\delta = \Omega_{T+b} - \Omega_T$ abbia misura unitaria .

Indicheremo , per semplicità , nel seguito con U_2 la soluzione del problema (2.2), relativo al convesso K_2^{T+b} .

Definiamo allora le seguenti funzioni :

$$\tilde{U}_2 = \begin{cases} U_2 & \text{su } \Omega_{T+b} \\ w(\theta) e^{-\sigma} & \text{su } \Omega - \Omega_{T+b} \end{cases}$$

$$\tilde{U} = \begin{cases} U & \text{su } \Omega_T \\ U + g(\theta, \sigma) & \text{su } \delta \end{cases}$$

dove :

$$(2.6) \quad g(\theta, \sigma) = (w(\theta) e^{-\sigma} - U(\theta, \sigma)) \frac{\sigma - T}{b}$$

In primo luogo, dalla definizione del convesso K , si ha che $\tilde{U}_2 \in K$. Daltronde si ha che $\tilde{U} \in K_2^{T+b}$, poichè, per la regolarità fin sul bordo delle funzioni $w(\theta)$ e $U(\theta, \sigma)$, (entrambe $C^{1, \infty}$) ristrette ai domini $\delta \cap \{\theta > 0\}$ e $\delta \cap \{\theta < 0\}$, la funzione positiva $g(\theta, \sigma)$ è prolungabile in $H^1(\Omega_{T+b})$ a valore nullo su tutto Ω_{T+b} .

Consideriamo ora :

$$(2.7) \quad a_{\Omega_{T+b}}(U_2, \tilde{U} - U_2) \geq \int_{\Omega_{T+b}} R(\theta) e^{-\sigma} (\tilde{U} - U_2) d\theta d\sigma$$

$$(2.8) \quad a(U, \tilde{U}_2 - U) \geq \int_{\Omega} R(\theta) e^{-\sigma} (\tilde{U}_2 - U) d\theta d\sigma$$

Sommando e integrando per parti (per la regolarità delle derivate prime)

sfruttando la (1.1), le (1.3)-(1.8) e il Lemma 1.2, si ha, ponendo $s = \max(-R(\theta))$:

$$a_{T+b}(U_2 - U, U_2 - U) \leq H(\theta_A - \theta_B) \{ k e^{-\gamma(T+b)} + s e^{-2(T+b)} \} + s e^{-T} \int_{\delta} g \, d\theta \, d\sigma + \|U_2\|_{H^1(\delta)} \|g\|_{H^1(\delta)}$$

Ricordando che $g \leq H e^{-\sigma}$ su δ , si ha per la coercività e il Lemma 2.1:

$$(2.9) \quad \|U_2 - U\|_{H^1(\Omega_{T+b})}^2 \leq Q_1 e^{-3T} + Q_2 e^{-2T} + Q_3 \|g\|_{H^1(\delta)}$$

con Q_1, Q_2, Q_3 costanti indipendenti da T .

Dimostriamo ora che la norma H^1 della funzione g è infinitesima: dalla formula (2.6) e dalle proprietà (1.3)-(1.8) si deduce l'esistenza delle costanti, indipendenti da T , D_1 e D_2 , tali che:

$$(2.10) \quad \|g\|_{1,\delta} \leq D_1 (e^{-3T} + e^{-2T}) + D_2 e^{-T} \left(\int_{\Omega - \Omega_T} (\text{grad } U)^2 \, d\theta \, d\sigma \right)^{1/2} + \int_{\Omega - \Omega_T} (\text{grad } U)^2 \, d\theta \, d\sigma$$

Introducendo la funzione regolare $\xi_n(\sigma) = \xi_0(\sigma - n)$ dove $\xi_0(\sigma)$ è definita da:

$$\begin{cases} \xi_0(\sigma) = 0 & \sigma \geq T+1 \\ \xi_0(\sigma) = 1 & \sigma < T \end{cases}$$

Per mezzo di una integrazione per parti e sfruttando le (1.3)-(1.8), si ha:

$$\int_{\mathcal{D}_n(\Omega - \Omega_T)} (\text{grad } U)^2 \xi_n \, d\theta \, d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}_n(\Omega - \Omega_T)} U^2 |\Delta \xi_n| \, d\theta \, d\sigma + \int_{\mathcal{D}_n\{\sigma=T\}} U \psi \, d\theta$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ha, per la regolarità di ξ_0 :

$$(2.11) \quad \int_{\mathcal{D}_n(\Omega - \Omega_T)} (\text{grad } U)^2 \, d\theta \, d\sigma \leq \frac{1}{2} H^2(\theta_A - \theta_B) \|\xi_0\|_{L^\infty} e^{-2T} + kH(\theta_A - \theta_B) e^{-3T}$$

allora dalla (2.9) e da (2.10), (2.11) segue la tesi.

3. Approssimazione con gli elementi finiti .

Nel paragrafo precedente si è dimostrato che la soluzione U può essere approssimata sul dominio $\Omega_{\mathbb{T}}$ dalla soluzione $U_2^{\mathbb{T}}$, della disequazione variazionale (2.2) .

Tale $U_2^{\mathbb{T}}$ è soluzione di un problema di frontiera libera e quindi nell'insieme :

$$E = \{ \zeta : U_2^{\mathbb{T}}(\zeta) > 0 \} \subset \Omega_{\mathbb{T}}$$

soddisfa , in particolare , le relazioni :

$$\begin{cases} -\Delta U_2^{\mathbb{T}} = \hat{G} & \text{in } E \\ U_2^{\mathbb{T}} = J & \text{su } \partial E \cap \Omega_{\mathbb{T}} \end{cases}$$

con $\hat{G}(\theta, \sigma)$ e $J(\theta, \sigma)$ opportune funzioni legate ai dati del problema (2.2) .

Poichè $U_2^{\mathbb{T}} \geq U$, la frontiera libera di E deve essere a distanza strettamente positiva dal punto di singolarità $(0, \sigma_{\infty})$: possiamo quindi applicare a $U_2^{\mathbb{T}}$ alcuni risultati classici ([7],[9]) che ci assicurano che :

$$U_2^{\mathbb{T}} \in H^{(s/2)-\eta} \quad 0 < \eta < 1/2 .$$

L'ordine di regolarità della $U_2^{\mathbb{T}}$ consiglia di procedere all'approssimazione con una tecnica agli elementi finiti di tipo lineare.

Sia ora $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una famiglia di triangolazioni per $\Omega_{\mathbb{T}}$: per ogni triangolazione \mathcal{T}_h e per ogni $t_h \in \mathcal{T}_h$ siano:

$$\rho(t_h) = \text{diametro di } t_h$$

$$\mu(t_h) = \text{diametro del cerchio inscritto in } t_h$$

$$|h| = \max_{t_h \in \mathcal{T}_h} \mu(t_h)$$

supponiamo inoltre, che esistano delle costanti c_1 e c_2 positive e indipendenti da \mathcal{T}_h tali che:

$$\rho(t_h) \leq c_1 \mu(t_h) \quad \text{e} \quad |\rho(t_h)| \geq c_2 |h| .$$

Alle funzioni appartenenti al convesso $K_2^{\mathbb{T}}$ viene imposto su $\partial\Omega_{\mathbb{T}}$ un dato non omogeneo : nel seguito questo verrà denotato globalmente con $f(\theta, \sigma)$. Introduciamo allora :

$$V_h = \{ v_h : v_h \in C^0(\Omega_T) ; v_h|_{t_h} \in (POL)_1 \quad \forall t_h \in \mathcal{T}_h \}$$

$$K_h = \{ v_h : v_h \in V_h ; v_h \geq 0 \text{ in } \Omega_T ; v_h|_{\partial\Omega_T} = f_I \}$$

dove $(POL)_1$ è l'insieme di tutti i polinomi in due variabili di grado minore o eguale a 1, e f_I è l'interpolata lineare di f (ricordiamo che f è non nulla sui segmenti $(\theta_B, \theta_A) \times \{T\}$ e $\{0\} \times (\sigma_\infty, T)$: su di essi f_I coincide con le interpolate lineari, rispettivamente, di $w(\theta)e^{-T}$, $He^{-\sigma}$).

Il problema discretizzato è allora il seguente:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \exists u_h \in K_h \\ a_T(u_h, v_h - u_h) \geq \int_{\Omega_T} R(\theta) e^{-\sigma} (v_h - u_h) \, d\theta \, d\sigma \\ \forall v_h \in K_h \end{cases}$$

Tale disequazione variazionale ammette una e una sola soluzione.

Dimostriamo ora, con tecniche analoghe a quelle usate in [4] [6] il seguente teorema:

Teorema 3.1 - Per ogni h , $0 < h < 1$, esiste una costante M , indipendente da h , tale che:

$$(3.2) \quad \|U_2^T - u_h\|_{H^1(\Omega_T)} \leq M h^{(1/2) - \epsilon} \quad (0 < \epsilon \leq 1/2)$$

Dimostrazione.

Indichiamo con (\cdot, \cdot) il prodotto scalare in $L^2(\Omega_T)$ e con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualità in $(H^1(\Omega_T))'$. Allora u_h e U_2^T soddisfano le:

$$a_T(U_2^T, U_2^T - v) \leq (R(\theta) e^{-\sigma}, U_2^T - v) \quad \forall v \in K_2^T$$

$$a_T(u_h, u_h - v_h) \leq (R(\theta) e^{-\sigma}, u_h - v_h) \quad \forall v_h \in K_h$$

sommando le due disequazioni e sottraendo a ambo i membri $(a_T(U_2^T, u_h) + a_T(u_h, U_2^T))$ si ha:

$$\begin{aligned} a_T(U_2^T - u_h, U_2^T - u_h) &\leq (R(\theta) e^{-\sigma}, U_2^T - v + u_h - v_h) - a_T(U_2^T, U_2^T - v + u_h - v_h) + \\ &\quad + a_T(U_2^T - u_h, U_2^T - v_h) \end{aligned}$$

Definiamo ora $-\Delta U_2^T \in H^{(-1/2)-\epsilon}(\Omega_T)$ come il funzionale associato alla forma $a_T(\cdot, \cdot) : a_T(U, V) = \langle -\Delta U, V \rangle$. Usando le proprietà di continuità e coercività della forma $a_T(\cdot, \cdot)$ si ha allora :

$$\begin{aligned} \nu \|U_2^T - u_h\|_{H^1(\Omega_T)}^2 &\leq \|R(\theta)e^{-\sigma} + \Delta U_2^T\|_{H^{(-1/2)-\epsilon}(\Omega_T)} \|U_2^T - v_h\|_{H^{(1/2)+\epsilon}(\Omega_T)} \\ &\quad + C^\# \|U_2^T - u_h\|_{H^1(\Omega_T)} \|U_2^T - v_h\|_{H^1(\Omega_T)} \end{aligned}$$

ma, poichè ([4]) si ha :

$$C^\# \|U_2^T - u_h\|_{H^1} \|U_2^T - v_h\|_{H^1} \leq \frac{\nu}{2} \|U_2^T - u_h\|_{H^1}^2 + \frac{(C^\#)^2}{2} \|U_2^T - v_h\|_{H^1}^2$$

si può concludere che :

$$(3.3) \quad \|U_2^T - u_h\|_{H^1(\Omega_T)}^2 \leq C_1 \|U_2^T - v_h\|_{H^1(\Omega_T)}^2 + C_2 \|R(\theta)e^{-\sigma} + \Delta U_2^T\|_{H^{(-1/2)-\epsilon}(\Omega_T)} \left\{ \|U_2^T - v_h\|_{H^{(1/2)+\epsilon}(\Omega_T)} + \|u_h - v\|_{H^1(\Omega_T)} \right\}$$

per ogni $v_h \in K_h$ e per ogni $V \in K_2^T$, con C_1 e C_2 costanti indipendenti da h .

Poichè l'interpolata lineare di U_2^T , $(U_2^T)_I \in (POL)_1$, appartiene a K_h si ha, da [2] e [8], ponendo $v_h = (U_2^T)_I$ e ricordando che $U_2^T \in H^{(3/2)-\epsilon}$, che:

$$(3.4) \quad \|U_2^T - (U_2^T)_I\|_{H^1(\Omega_T)} \leq C_3 h^{(1/2)-\epsilon} ; \|U_2^T - (U_2^T)_I\|_{H^{(1/2)+\epsilon}(\Omega_T)} \leq C_4 h^{1-2\epsilon}$$

con C_3 e C_4 costanti indipendenti da h .

Al fine di maggiorare $\|u_h - v\|_{H^1}$ costruiamo una $V \in K_2^T$ che nei nodi della triangolazione assuma gli stessi valori di u_h .

Notiamo che u_h non appartiene al convesso K_2^T in quanto non assume su tutto $\partial\Omega_T$ il valore $f(\theta, \sigma)$ richiesto.

Denotiamo allora con $t_{h,n}$, $n = 1, \dots, N$, i triangoli che hanno un lato contenuto nella frontiera di Ω_T (la triangolazione può essere tale che ogni triangolo non abbia più di un lato in comune con la frontiera) : su ciascun $t_{h,n}$ risolviamo allora il seguente problema:

$$(3.5) \begin{cases} \Delta z_{h,n} = 0 & \text{in } t_{h,n} \\ z_{h,n} = u_h - f & \text{su } \partial t_{h,n} \cap \partial \Omega_T \\ z_{h,n} = 0 & \text{su } \partial t_{h,n} \cap \Omega_T \end{cases}$$

Allora la funzione \tilde{V} definita da :

$$(3.6) \begin{cases} \tilde{V} = u_h|_{t_{h,n}} - z_{h,n} & \text{su } t_{h,n} \\ \tilde{V} = u_h & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a K_2^T (infatti $z_{h,n} \in H^1(t_{h,n})$ e $\tilde{V}|_{\partial t_{h,n} \cap \Omega_T} = u_h|_{\partial t_{h,n} \cap \Omega_T}$)

Valutiamo allora la norma :

$$(3.7) \|u_h - V\|_{H^1(\Omega_T)}^2 = \sum_{t_{h,n}} \|z_{h,n}\|_{H^1(t_{h,n})}^2$$

Indichiamo, ora, con τ il triangolo di vertici $((0,0);(1,0);(0,1))$,

con ρ il diametro di $t_{h,n}$ e con $\text{tr}(z_{h,n})$ la traccia di $z_{h,n}$.

Maggioriamo la norma $\|z_{h,n}\|_{H^1}$ con la norma della traccia, valutando, per omotetia su τ , le costanti H^1 :

$$\begin{aligned} \|z_{h,n}\|_{H^1(t_{h,n})}^2 &\leq C_5 \|z_{h,n}\|_{H^1(\tau)}^2 \leq C_6 \|\text{tr}(z_{h,n})\|_{H^{1/2}(\partial\tau)}^2 \leq C_7 \|\text{tr}(z_{h,n})\|_{H^1(\partial\tau)}^2 \\ &\leq C_8 |\text{tr}(z_{h,n})|_{1,\partial\tau}^2 \leq C_9 \rho |\text{tr}(z_{h,n})|_{1,\partial t_{h,n} \cap \partial\Omega_T}^2 \end{aligned}$$

dove C_5, C_6, C_7, C_8, C_9 sono costanti indipendenti da h .

Per le proprietà della triangolazione, si ha allora da (3.7) che:

$$\|u_h - \tilde{V}\|_{H^1(\Omega_T)}^2 \leq C_9 c_1 h \|f - f_I\|_{1,\partial\Omega_T}^2$$

Poichè $f \in H^2(\partial\Omega_T)$, si ha da ([2], [8]) che:

$$\|f - f_I\|_{H^1(\partial\Omega_T)}^2 \leq C_{10} h^2, \quad C_{10} \text{ costante indipendente da } h,$$

quindi si ha :

$$(3.8) \|u_h - V\|_{H^1(\Omega_T)} \leq C_{11} h^{3/2}, \quad C_{11} \text{ costante indipendente da } h.$$

Da (3.3), (3.4), (3.8) segue allora la tesi. \blacksquare

Nella dimostrazione precedentemente data si sfrutta pesantemente la regolarità del dato al bordo $f(\theta, \sigma)$: così facendo , si ottiene con facilità la maggiorazione dell'errore cercata. D'altra parte , data la scarsa regolarità della soluzione U_2^T , se si utilizzano tecniche di approssimazione con elementi finiti di tipo lineare , si presume che non si possa ottenere una maggiorazione migliore.

4. Ritorno nel piano fisico .

Il problema della lettura nel piano fisico dei risultati ottenuti, comporta la necessità di costruire numericamente l'inversa della trasformazione odografa. In questo paragrafo si propongono due tecniche di inversione : la prima basata sulle formule analitiche che danno la trasformazione inversa , la seconda ricavata dal Lemma 1.3 .

Negli esperimenti numerici condotti si è preferito l'utilizzo della prima tecnica per ragioni di semplicità.

Nella definizione della trasformazione odografa data nel paragrafo 1 , è stata introdotta la funzione olomorfa $V(z)$: tale funzione ammette in $\mathbb{R}^2 - \mathcal{P}$ la primitiva $\Phi(z)$ ([1]) .

Si ha allora, dalla definizione di $W(z)$, trasformazione odografa:

$$(4.1) \quad \frac{d\Phi}{dz} = V(z) = e^{-(\sigma + i\theta)}$$

Da qui si ricava immediatamente:

$$(4.2) \quad dz = e^{\sigma + i\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta \right)$$

Dalle proprietà differenziali di Φ e da (4.1) si ha :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} &= \tilde{\Psi}_{\theta+i} \tilde{\Psi}_{\sigma} = (U_{\sigma\theta} - U_{\theta}) + i (U_{\sigma\sigma} - U_{\sigma}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= -\tilde{\Psi}_{\sigma+i} \tilde{\Psi}_{\theta} = -(U_{\sigma\sigma} - U_{\sigma}) + i (U_{\sigma\theta} - U_{\theta}) \end{aligned}$$

Infine sostituendo in (4.2) le (4.3) e sfruttando la (1.4) si ottiene:

$$(4.4) \quad dz = (\cos \theta + i \sin \theta) \frac{d}{d\sigma} \{ e^{\sigma} (U_{\theta} + i U_{\sigma}) \} d\sigma + (\cos \theta + i \sin \theta) R(\theta) d\theta + e^{\sigma} \frac{d}{d\theta} \{ (\cos \theta U_{\theta} - \sin \theta U_{\sigma}) + i (\sin \theta U_{\theta} + \cos \theta U_{\sigma}) \} d\theta$$

Integrando la (4.4) lungo le linee su cui θ è costante , e prendendo come primo estremo di integrazione il punto di intersezione tra $\theta = \text{cost.}$ e Γ si hanno le due formule :

$$\begin{cases} x - X(\theta) = e^{\sigma} (\cos \theta U_{\theta} - \sin \theta U_{\sigma}) \\ y - Y(\theta) = e^{\sigma} (\cos \theta U_{\sigma} + \sin \theta U_{\theta}) \end{cases}$$

Ogni linea di livello, $\tilde{\Psi}$ uguale a costante è la trasformata della corrispondente linea di corrente $\Psi(z)$ uguale a costante; tale linea di livello può inoltre essere parametrizzata in θ :

$$(4.5) \quad \sigma = \sigma(\theta)$$

Per ogni $\bar{\theta}$ fissato si individua un $\bar{\sigma}$ sulla curva (4.5); $\bar{\theta}$ e $\bar{\sigma}$ determinano a loro volta per la biunivocità di $W(z)$, la direzione e il modulo della velocità nel punto (\bar{x}, \bar{y}) . Dal Lemma 1.3 e da (1.14) si può ricavare che $(\bar{\theta}, \bar{\sigma})$ e (\bar{x}, \bar{y}) sono legati dalla relazione:

$$(4.6) \quad \bar{y} = \bar{x} \operatorname{tg} \bar{\theta} + (U_{\sigma}(\bar{\theta}, \bar{\sigma}) e^{\bar{\sigma}} / \cos \bar{\theta}) + Y(\bar{\theta}) - X(\bar{\theta}) \operatorname{tg} \bar{\theta} .$$

La retta nel piano fisico individuata dalla (4.6) fissando $\bar{\theta}, \bar{\sigma}$ passerà per il punto (\bar{x}, \bar{y}) : inoltre la sua direzione coincide con quella della velocità in (\bar{x}, \bar{y}) .

Si può allora dedurre che tale retta è tangente nel punto (\bar{x}, \bar{y}) alla linea di corrente corrispondente alla curva (4.5). Tale linea di corrente può allora essere ricostruita come inviluppo della famiglia di rette ricavata da (4.6):

$$(4.7) \quad y = x \operatorname{tg}(\theta) + c(\theta, \sigma(\theta)) .$$

Numericamente questo suggerisce, una volta trovata la soluzione approssimata, di riportare un certo numero delle rette (4.7) nel piano fisico, ottenendo così una approssimazione lineare della linea di corrente corrispondente.

5. Esperimenti numerici .

Il problema discretizzato (3.1) è equivalente al problema di minimo:

$$(5.1) \quad \min_{K_h} \left\{ \int_{\Omega_T} (\text{grad } u_h)^2 - 2 R(\theta) e^{-\sigma} u_h \quad d\theta d\sigma \right\}$$

a sua volta esprimibile come :

$$(5.2) \quad \min_{K_h} \left\{ \sum_{t_h \in \mathcal{T}_h} \left(\int_{t_h} [(\text{grad } u_h)^2 - 2 R(\theta) e^{-\sigma} u_h] \Big|_{t_h} \quad d\theta d\sigma \right) \right\}$$

Questa seconda formula è stata ricondotta a un problema di programmazione quadratica, specificando le espressioni delle u_h in funzione dei valori nodali della soluzione.

Tale problema di programmazione quadratica è stato risolto facendo ricorso a una tecnica di ultrarilassamento esposta in [5].

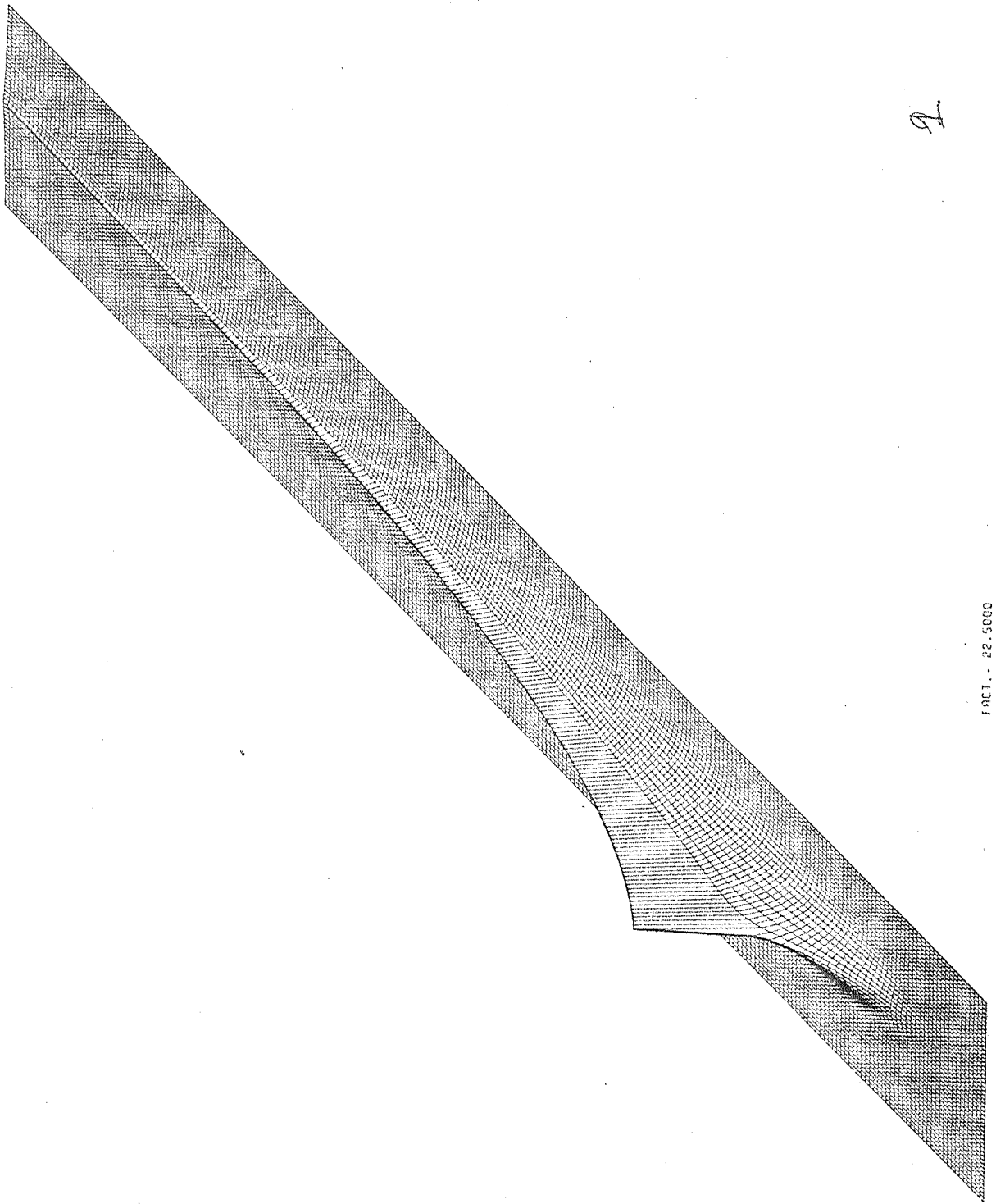
Riportiamo infine alcuni esperimenti numerici eseguiti nel caso in cui l'ostacolo sia costituito da un arco di cerchio di raggio unitario, e la velocità q_∞ del fluido sia a sua volta unitaria .

Nella Fig. 2 è riportata la soluzione $U_{2\pi}^T$ del problema (2.2), nella Fig. 3 alcune curve di livello della $U_{2\pi}^T$, nella Fig. 4 la soluzione $\tilde{\Psi}$ sul dominio troncato, nella Fig. 5 alcune curve di livello della $\tilde{\Psi}$, nel caso in cui l'ostacolo sia una semicirconferenza.

Nella Fig. 6, infine, sono riportate delle linee di livello ottenute nel caso che l'ostacolo sia un arco di cerchio : i punti sulla figura indicano alcuni dei valori calcolati .

BIBLIOGRAFIA

- 1 H. BREZIS - G. STAMPACCHIA, The hodograph method in fluid-dynamics in the light of variational inequalities, Arch. Rational Mech. Anal. 61 (1976), 1-18.
- 2 I. BABUSKA, Error-bound for finite element method, Numer. Math. 16 (1971), 322-333.
- 3 C. BAIOCCHI, Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica, Ann. Mat. Pura Appl. (IV) XCII (1972), 107-127.
- 4 F. BREZZI - G. SACCHI, A finite element approximations of variational inequality related to hydraulics, Calcolo 13 (1976), 257-273.
- 5 C. W. CRYER, The solution of quadratic programming using systematic overrelaxation, SIAM J. Control 9 (1971), 385-392.
- 6 R. FALK, Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities, Math. Comp. 28 (1974), 963-971.
- 7 R. S. LEHMAN, Developments at an analytic corner of solutions of elliptic partial differential equations, J. Math. Mech. 8 (1959), 727-760.
- 8 G. STRANG - G. J. FIX, An analysis of the finite element method, (1973), Prentice Hall, New York.
- 9 W. WASOW, Asymptotic development of the solution of Dirichlet's problem at analytic corners, Duke Math. J. 24 (1957), 47-56.



7

FACT. - 22.5000

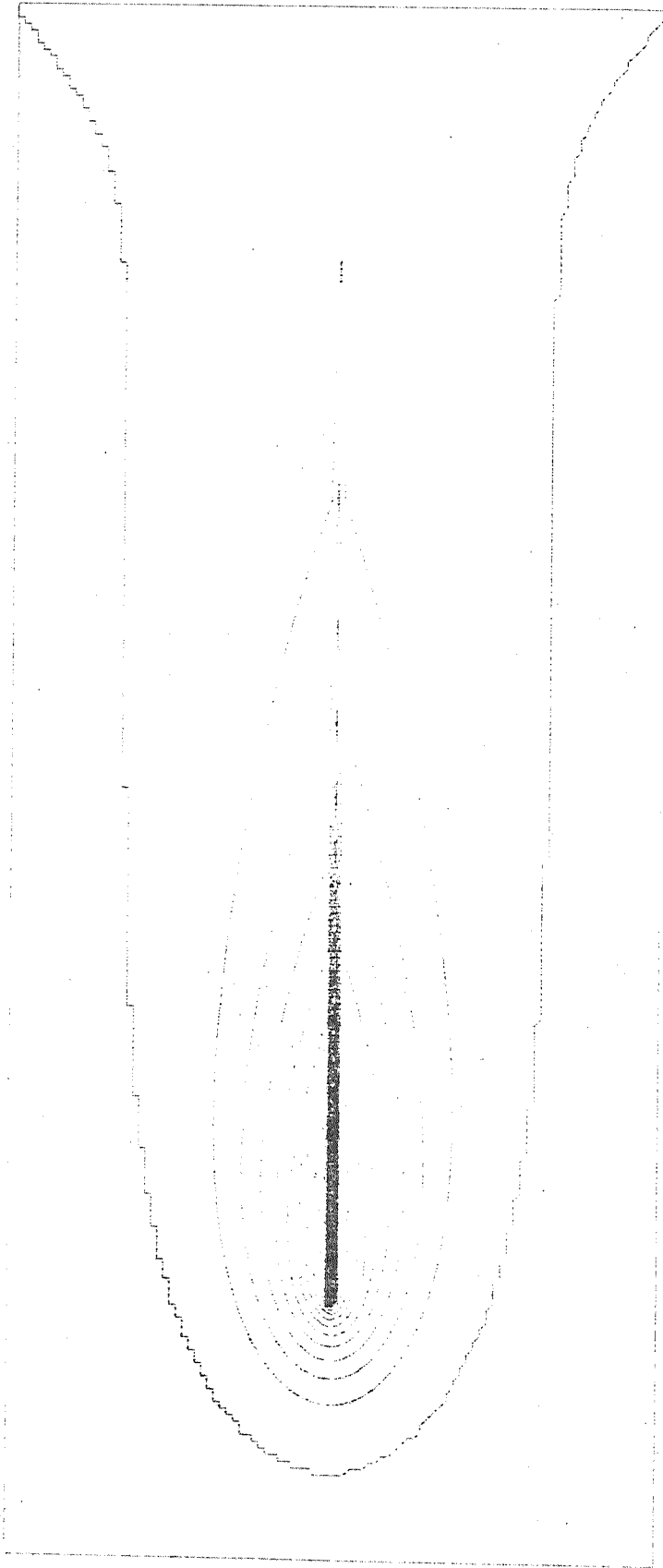


FIG. 3

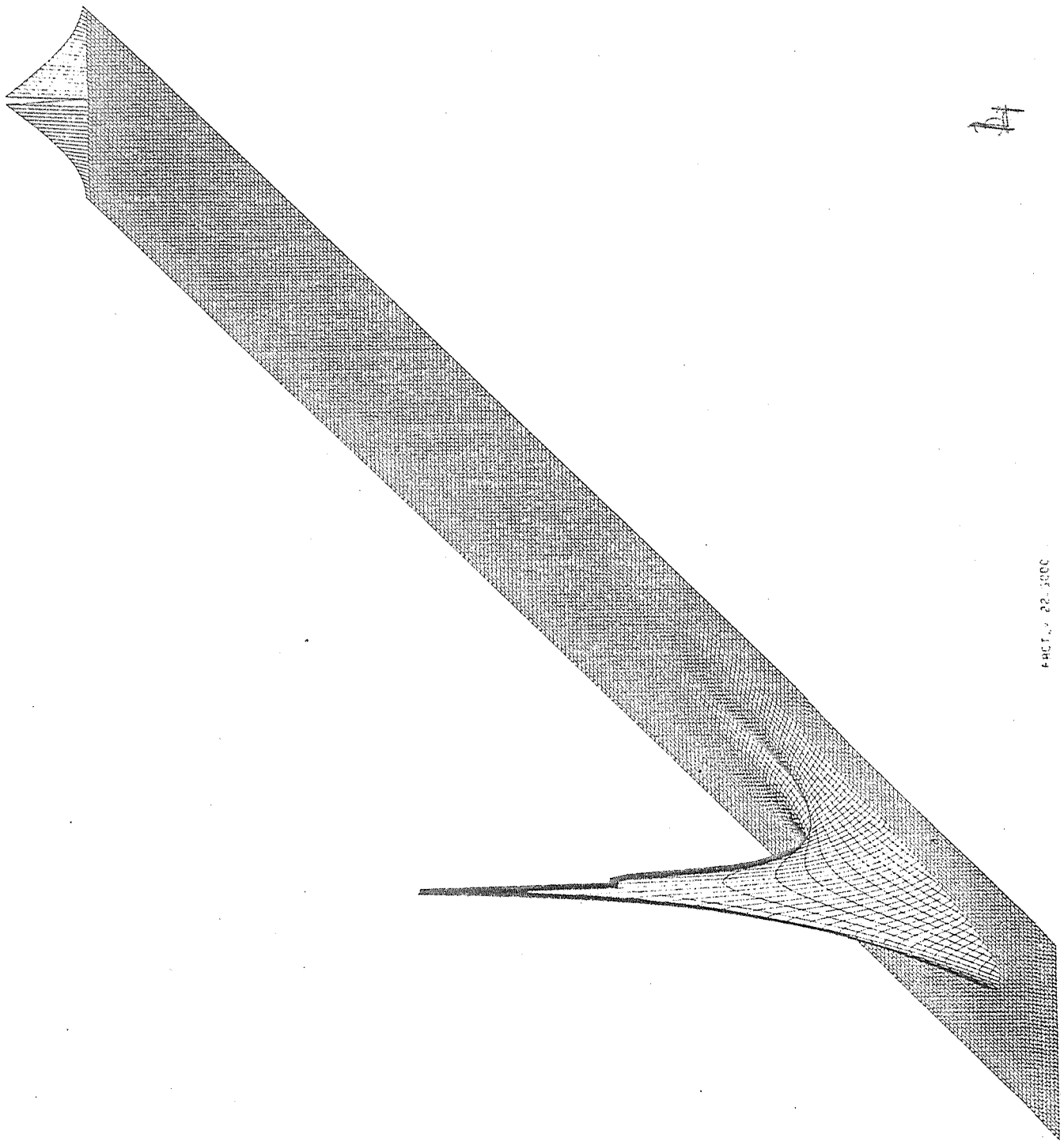


FIG. 1. P. 2. 1900

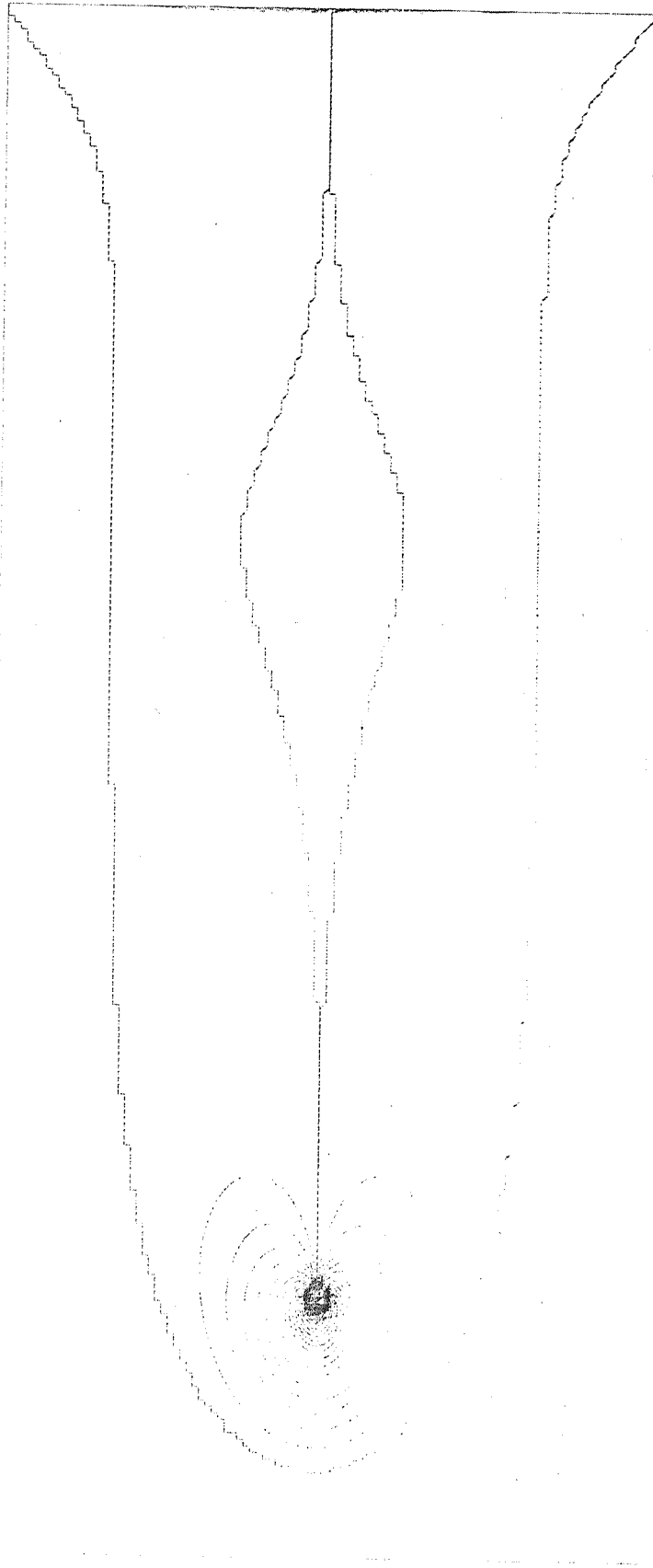


FIG. 5

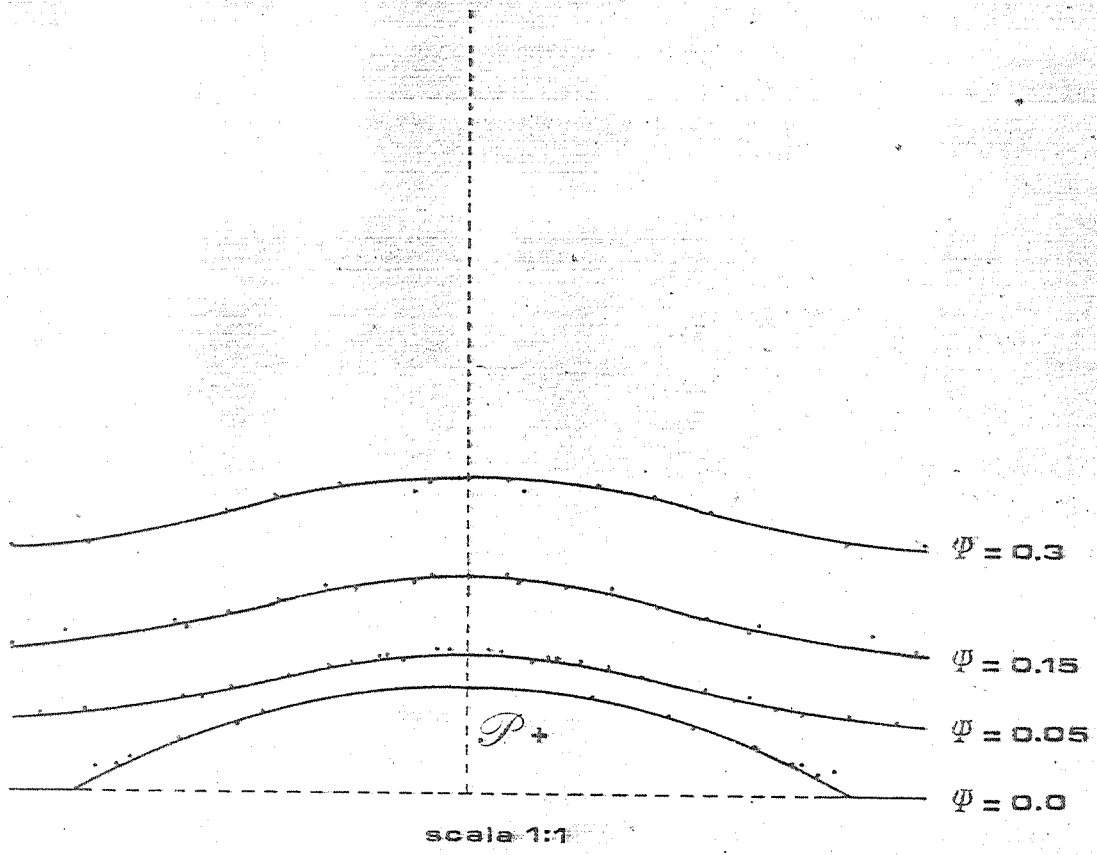


Fig. 6