



Consiglio Nazionale delle Ricerche

## **Analisi dinamica di antiche costruzioni in muratura**

*S. Degl'Innocenti, M. Lucchesi, C. Padovani,  
A. Pagni, G. Pasquinelli, N. Zani*

Report CNUCE-B4-2000-001

**CNUCE**

**Pisa**

# Analisi dinamica di antiche costruzioni in muratura

S. Degl'Innocenti, M. Lucchesi, C. Padovani,  
G. Pasquinelli, A. Pagni, N. Zani

Rapporto CNUCE-B4-2000-001

## 1 Introduzione

In questo lavoro è descritta l'attività svolta dal gruppo *Meccanica dei Materiali e delle Strutture* del CNUCE nel periodo 1 gennaio '98 - 31 dicembre '99, nell'ambito del progetto "Analisi dinamica di antiche costruzioni in muratura" Regolamento CEE 2081/93 - Obiettivo 2 Azione 3.2 - Servizi Tecnologici (contratto di ricerca stipulato con Caribel Programmazione S.r.l. il 23 febbraio 1998).

Gli obiettivi di questo progetto sono la formulazione di modelli di comportamento meccanico di costruzioni in muratura soggette a carichi variabili nel tempo e la realizzazione di un programma di calcolo agli elementi finiti per l'analisi dinamica non lineare che consenta di determinare il grado di stabilità dei monumenti e la loro risposta a vibrazioni di varia natura, e valutare infine l'efficacia degli interventi di mantenimento, consolidamento e adeguamento antisismico.

Il progetto è motivato dalla mancanza di programmi di calcolo che permettano di valutare l'efficacia degli interventi di restauro e consolidamento sui beni architettonici soggetti a carichi dinamici. La maggior parte dei programmi di calcolo disponibili per l'analisi strutturale di costruzioni in muratura non modella adeguatamente il comportamento del materiale la cui risposta a trazione è molto diversa da quella a compressione e l'uso di questi programmi può condurre a risultati che non sono realistici. Si è quindi costretti a mutuare i criteri di intervento da normative studiate per la realizzazione di opere recenti e prive dei valori estetici e storici che connotano un bene culturale.

Nel corso degli ultimi anni il gruppo *Meccanica dei Materiali e delle Strutture* del CNUCE ha sviluppato nel NOSA, un programma di calcolo agli elementi finiti per l'analisi strutturale, i sottoprogrammi necessari all'analisi statica di costruzioni in muratura. In particolare, è stato formulato ed implementato nel NOSA un legame costitutivo elastico non lineare che tiene conto della debole resistenza a trazione  $\sigma^t$  e della limitata resistenza a compressione  $\sigma^c$  delle murature. Il programma di calcolo è stato usato per studiare alcuni monumenti di importanza storica e architettonica, tra i quali il battistero del duomo

di Volterra, l'arco scenico del teatro Goldoni di Livorno, l'arsenale mediceo, la ciminiera dei Vecchi Macelli di Pisa e la cattedrale di Noto. Nello studio dell'arsenale mediceo per valutare la risposta della struttura ad azioni sismiche è stata condotta un'analisi statica equivalente.

Nel corso di questo progetto si è ampliato il codice NOSA inserendo i sottoprogrammi necessari per analisi dinamiche. Si è deciso di utilizzare l'equazione costitutiva dei materiali non resistenti a trazione ( $\sigma^t = 0$ ,  $\sigma^c = +\infty$ ) per modellare il comportamento dinamico delle murature. Per quanto riguarda la soluzione del problema dinamico è necessario effettuare un'integrazione diretta delle equazioni del moto, poiché il metodo di sovrapposizione modale non può essere applicato a causa delle non linearità dell'equazione costitutiva adottata. Per integrare nel tempo il sistema di equazioni differenziali ordinarie ottenuto discretizzando la struttura con elementi finiti è stato implementato nel codice NOSA il metodo di Newmark e si è adeguato al caso dinamico lo schema di Newton-Raphson, già utilizzato nell'analisi statica, per la soluzione del sistema algebrico non lineare ottenuto ad ogni passo di integrazione nel tempo. Sono state scritte le routines necessarie per effettuare analisi dinamiche di strutture piane (in particolare si sono considerati elementi *plane stress* a otto nodi e elementi *plane strain* a quattro e otto nodi) e di strutture tridimensionali (elementi *brick* a otto e venti nodi, elementi assialsimmetrici a quattro e otto nodi, elementi guscio sottile a otto nodi). Inoltre, è possibile considerare sia masse distribuite che concentrate, e tenere conto di forze d'attrito. Per quanto riguarda la gestione delle condizioni iniziali e al contorno, è possibile assegnare spostamenti iniziali e/o velocità iniziali anche non uniformi e forze applicate, spostamenti e accelerazioni imposte dipendenti dal tempo.

## 2 I materiali non resistenti a trazione

L'equazione costitutiva dei materiali *masonry-like* si basa essenzialmente su tre ipotesi: elasticità infinitesima, non resistenza a trazione e un postulato di normalità. Per una trattazione più dettagliata di questo argomento si rimanda a [1], [2], [3] e [4]; qui ci limitiamo a riportare alcuni elementi essenziali.

Indichiamo con  $Sym^+$  e  $Sym^-$  i coni convessi di  $Sym$  costituiti rispettivamente dai tensori semidefiniti positivi e semidefiniti negativi

$$Sym^+ = \{ \mathbf{A} \in Sym \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} \geq 0 \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \}, \quad (1)$$

$$Sym^- = \{ \mathbf{A} \in Sym \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} \leq 0 \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \}. \quad (2)$$

Siano  $\mathbf{T} \in Sym$  il tensore degli sforzi di Cauchy e  $\mathbf{E} \in Sym$  il tensore della deformazione infinitesima. Supponiamo che  $\mathbf{E}$  sia la somma di una parte elastica  $\mathbf{E}^e$  e di una parte anelastica  $\mathbf{E}^a$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^a, \quad (3)$$

e che  $\mathbf{T}$  dipenda linearmente ed isotropicamente da  $\mathbf{E}^e$

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}[\mathbf{E}^e], \quad (4)$$

dove

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (5)$$

In (5) gli scalari  $\mu$  e  $\lambda$  sono i moduli di Lamé del materiale,  $\mathbb{I}$  è l'identità del quarto ordine e  $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}[\mathbf{A}] = tr(\mathbf{A})\mathbf{I}, \forall \mathbf{A} \in Lin$ . In particolare il tensore del quarto ordine  $\mathbb{C}$  è simmetrico e definito positivo in vista delle disuguaglianze soddisfatte da  $\mu$  e  $\lambda$ ,

$$\mu > 0, \quad \lambda \geq 0. \quad (6)$$

Finalmente richiediamo che  $\mathbf{T}$  sia semidefinito negativo

$$\mathbf{T} \in Sym^-, \quad (7)$$

e che  $\mathbf{E}^a$  sia semidefinito positivo ed ortogonale a  $\mathbf{T}$ ,

$$\mathbf{E}^a \in Sym^+, \quad (8)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^a = 0. \quad (9)$$

Il vettore  $\mathbf{b}(x, t)$  è la *forza di volume* in  $(x, t)$ . Il campo di *forze di superficie* associato a  $\mathbf{T}$  è il campo vettoriale  $\mathbf{t}$  definito in ogni punto regolare  $x \in \partial\mathcal{B}$  dalla relazione

$$\mathbf{t}(x, t) = \mathbf{T}(x, t)\mathbf{n}(x), \quad (14)$$

dove  $\mathbf{n}(x)$  è il versore della normale esterna a  $\partial\mathcal{B}$  in  $x$ .

Dato un processo dinamico  $[\mathbf{u}, \mathbf{T}, \mathbf{b}]$  indichiamo con

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 dv \quad (15)$$

l'*energia cinetica* e

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} dv \quad (16)$$

la *potenza dello sforzo*, dove  $\mathbf{E}$  è la deformazione corrispondente a  $\mathbf{u}$ .

*Teorema delle potenze spese.* Sia  $[\mathbf{u}, \mathbf{T}, \mathbf{b}]$  un processo dinamico, allora

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} da + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dv = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} dv + \dot{K}. \quad (17)$$

Questo teorema asserisce che la potenza delle forze di superficie e delle forze di volume è uguale alla somma della potenza dello sforzo e della derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica. In particolare se

$$\dot{\mathbf{u}}(\cdot, 0) = \dot{\mathbf{u}}(\cdot, \tau), \quad (18)$$

allora da (17) segue che

$$\int_0^\tau \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} da dt + \int_0^\tau \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dv dt = \int_0^\tau \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} dv dt, \quad (19)$$

cioè, quando il campo di velocità iniziale e finale coincidono, allora il lavoro fatto dalle forze esterne è uguale al lavoro fatto dal campo di tensione.

Il sistema fondamentale di equazioni di campo che descrivono il moto di un corpo elastico non resistente a trazione consiste nella *relazione di congruenza*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T), \quad (20)$$

nell'*equazione costitutiva*

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}), \quad (21)$$

e nell'*equazione del moto*

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}}. \quad (22)$$

$\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{b}$  sono i campi di spostamento, deformazione, tensione e forze di volume definiti su  $\mathcal{B} \times (0, t_0)$ , dove  $(0, t_0)$  è un assegnato intervallo di tempo e  $\rho$  è il campo di densità su  $\mathcal{B}$ .

Un *processo ammissibile* è una terna  $p = [\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}]$  con le seguenti proprietà:

- 1)  $\mathbf{u}$  è un moto ammissibile,
- 2)  $\mathbf{E}$  è un campo tensoriale simmetrico continuo su  $\mathcal{B} \times [0, t_0)$ ,
- 3)  $\mathbf{T}$  è un campo di sforzo ammissibile dipendente dal tempo.

Una terna  $p = [\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}]$  è un *processo elastico* (su  $\overline{\mathcal{B}}$ ) corrispondente alle forze di volume  $\mathbf{b}$  se  $p$  è un processo ammissibile che soddisfa le relazioni (20), (21) e (22). La coppia  $[\mathbf{b}, \mathbf{t}]$  con  $\mathbf{t}$  definito in (14) è il *sistema di forze esterne* per  $p$ .

Se  $[\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}]$  è un processo elastico corrispondente alle forze di volume  $\mathbf{b}$ , allora per ogni  $t \in (0, t_0)$ ,  $[\mathbf{u}(\cdot, t), \mathbf{E}(\cdot, t), \mathbf{T}(\cdot, t)]$  è uno stato elastico corrispondente a  $\mathbf{b}(t) - \rho\ddot{\mathbf{u}}(t)$ .

Dato un processo elastico, l'*energia totale* è la funzione

$$\mathcal{U} = K + U, \quad (23)$$

definita su  $[0, t_0)$  dove  $K$  è definita in (15) e  $U$  è l'*energia di deformazione*

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \, dv. \quad (24)$$

Poichè in vista dell'equazione costitutiva

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}^e = \mathbf{C}[\mathbf{E}^e] \cdot \mathbf{E}^e \geq 0, \quad (25)$$

l'energia di deformazione, come l'energia cinetica, è non negativa.

Osserviamo inoltre che tenendo conto di (11) da (24) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}) \cdot \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{E} \cdot D_E \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E})[\dot{\mathbf{E}}]) \, dv = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}) \cdot \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}} \cdot D_E \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E})[\mathbf{E}]) \, dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}) \cdot \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}} \cdot \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E})) \, dv = \int_{\mathcal{B}} (\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}) \cdot \dot{\mathbf{E}}) \, dv; \end{aligned} \quad (26)$$

pertanto la derivata rispetto al tempo dell'energia di deformazione è uguale alla potenza dello sforzo. Questo risultato, unitamente al teorema delle potenze spese implica il seguente teorema.

*Teorema della potenza e dell'energia.* Sia  $[\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}]$  un processo elastico corrispondente al sistema di forze esterne  $[\mathbf{b}, \mathbf{t}]$ . Allora

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, da + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dv = \dot{U}, \quad (27)$$

dove  $\mathcal{U}$  è l'energia totale.

In particolare, se  $[\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}]$  un processo elastico corrispondente al sistema di forze esterne  $[\mathbf{b}, \mathbf{t}]$  e

$$\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{su } \mathcal{B}, \quad \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{su } \partial\mathcal{B}, \quad (28)$$

allora l'energia totale è costante, cioè

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(0), \quad t \in [0, t_0]. \quad (29)$$

In realtà la condizione (29) è raramente verificata; ad esempio, è noto che nel caso di vibrazioni longitudinali di una trave in muratura si ha la formazione di un'onda d'urto a partire dal tempo  $t = 0$ , accompagnata da una perdita di energia meccanica [7].

Un'altra interessante conseguenza del teorema della potenza e dell'energia è la seguente,

$$\int_0^\tau \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} da \, dt + \int_0^\tau \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dv \, dt = \mathcal{U}(\tau) - \mathcal{U}(0). \quad (30)$$

Il membro sinistro di (30) è il lavoro fatto nell'intervallo  $[0, \tau]$ . Se lo stato iniziale  $[\mathbf{u}(\cdot, 0), \mathbf{E}(\cdot, 0), \mathbf{T}(\cdot, 0)]$  è uno stato di riposo indeformato, cioè se

$$\mathbf{E}(\cdot, 0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{u}}(\cdot, 0) = \mathbf{0}, \quad (31)$$

allora

$$\mathcal{U}(0) = 0. \quad (32)$$

Pertanto da (30), unitamente al fatto che  $\mathcal{U}(\tau) \geq 0$ , si ottiene

$$\int_0^\tau \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} da \, dt + \int_0^\tau \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dv \, dt \geq 0, \quad (33)$$

e quindi il lavoro fatto partendo da uno stato di riposo indeformato è sempre non negativo.

Il problema dinamico per un corpo non resistente a trazione consiste nel determinare un processo elastico  $[\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}]$  corrispondente alle forze di volume  $\mathbf{b}$  che soddisfa le *condizioni iniziali*

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{su } \mathcal{B}, \quad (34)$$

e le condizioni al bordo

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{su } \mathcal{S}_1 \times (0, t_0), \quad (35)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{s} \quad \text{su } \mathcal{S}_2 \times (0, t_0), \quad (36)$$

dove  $S_1$  e  $S_2$  sono due porzioni disgiunte di  $\partial\mathcal{B}$ , con  $S_1 \cup S_2 = \partial\mathcal{B}$ . Un processo elastico siffatto è detto *soluzione* del problema dinamico. Con questa formulazione l'unicità della soluzione del problema non è garantita neanche in termini di sforzo, come invece avviene nel caso statico. Per ovviare a questo inconveniente si introduce uno sforzo viscoso, grazie al quale si recupera l'unicità del campo di spostamento, di deformazione e di sforzo [8].

Supponiamo ora che lo sforzo  $\mathbf{T}$  sia la somma di una *parte elastica*  $\mathbf{T}^e$

$$\mathbf{T}^e = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}), \quad (37)$$

con  $\widehat{\mathbf{T}}$  la funzione che ad ogni  $\mathbf{E} \in Sym$  associa lo sforzo definito in (10) e di una *parte viscosa*

$$\mathbf{T}^v = \mathbb{V}[\dot{\mathbf{E}}], \quad (38)$$

dove  $\mathbb{V}$  è un tensore del quarto ordine detto *tensore di viscosità* con le seguenti proprietà

$$\mathbb{V}[\mathbf{L}] = \mathbb{V}[\mathbf{L}^T] = \mathbb{V}[\mathbf{L}]^T, \quad \mathbf{L} \in Lin, \quad (39)$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbb{V}[\mathbf{L}] \geq c_V \|\mathbf{D}\|^2, \quad \mathbf{L} \in Lin, \quad (40)$$

con  $\mathbf{D}$  parte simmetrica di  $\mathbf{L}$ . Ci limiteremo qui a considerare tensori di viscosità isotropi

$$\mathbb{V} = 2\nu\mathbb{I} + \varsigma\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (41)$$

con

$$\nu > 0, \quad 2\nu + 3\varsigma > 0. \quad (42)$$

Una terna  $p = [\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}]$  è un *processo viscoelastico* (su  $\overline{\mathcal{B}}$ ) corrispondente alle *forze di volume*  $\mathbf{b}$  se  $p$  è un processo ammissibile che soddisfa le relazioni (20), (22) e l'equazione costitutiva

$$\mathbf{T} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}) + \mathbb{V}(\dot{\mathbf{E}}). \quad (43)$$

Nella definizione di processo ammissibile lo stato di sforzo deve essere semidefinito negativo, in questo caso, in cui si adotta il legame (43) questa condizione viene rimossa. La coppia  $[\mathbf{b}, \mathbf{t}]$  con  $\mathbf{t}$  definito in (14) è il *sistema di forze esterne* per  $p$ .

### 3 Il metodo numerico

Sia  $\mathbf{w}$  un campo vettoriale tale che  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  su  $S_1 \times (0, t_0)$ , da (22) e (36) segue che ad ogni istante  $t$  deve essere verificata la condizione di equilibrio dinamico

$$\int_B \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV + \int_B \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \, dV = \int_B \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{S_2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{w} \, dS. \quad (44)$$

Poichè  $\mathbf{T}$  dipende non linearmente da  $\mathbf{E}$ , si deve considerare anche la seguente equazione incrementale

$$\int_B \dot{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV + \int_B \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \, dV = \int_B \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{S_2} \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{w} \, dS, \quad (45)$$

da cui, tenendo conto di (43), segue che

$$\int_B (D_E \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E})[\dot{\mathbf{E}}] + \mathbb{V}[\ddot{\mathbf{E}}]) \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV + \int_B \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \, dV = \int_B \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{S_2} \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{w} \, dS. \quad (46)$$

Applicando il metodo degli elementi finiti, usando tecniche standard, l'equazione incrementale (46) viene trasformata nel sistema non lineare di evoluzione

$$K\dot{\mathbf{u}} + C\ddot{\mathbf{u}} + M\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, \quad (47)$$

dove  $\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$  sono rispettivamente le velocità e le accelerazioni dei nodi della griglia e  $\ddot{\mathbf{u}}$  sono le derivate temporali delle accelerazioni nodali. La matrici di rigidità  $K$ , di smorzamento  $C$  e di massa  $M$  sono ottenute dalle relazioni

$$c \cdot K\dot{\mathbf{u}} = \int_B D_E \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E})[\dot{\mathbf{E}}] \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV, \quad (48)$$

$$c \cdot C\ddot{\mathbf{u}} = \int_B \mathbb{V}[\ddot{\mathbf{E}}] \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV, \quad (49)$$

$$c \cdot M\ddot{\mathbf{u}} = \int_B \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \, dV, \quad (50)$$

con  $\{c\}$  vettore dei valori nodali del campo  $\mathbf{w}$  e finalmente

$$c \cdot \mathbf{f} = \int_B \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{S_2} \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{w} \, dS. \quad (51)$$

Nel NOSA il calcolo di  $C$  è condotto assumendo  $\mathbb{V} = \alpha_1 \mathbb{C}$ , con  $\alpha_1$  costante non negativa. In effetti, in accordo con l'ipotesi di Rayleigh,  $C$  ha l'espressione più generale  $C = \alpha_0 M + \alpha_1 K^e$ , dove  $M$  è la matrice di massa,  $K^e$  è la matrice di rigidità elastica, calcolata a partire dai moduli elastici  $\mu$  e  $\lambda$  e  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  sono quantità non negative. Il sistema di evoluzione (47) deve essere integrato nel tempo per ottenere, spostamenti, velocità e accelerazioni nodali. Si assume che l'equazione (44) valga in corrispondenza di  $t$ , e che quindi al tempo  $t$  il corpo sia in equilibrio dinamico; successivamente si assegna un incremento di carico  $\{\Delta f\}$  definito mediante la relazione

$$c \cdot \Delta f = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{b}(t + \Delta t) - \mathbf{b}(t)) \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\mathcal{S}_2} (\mathbf{s}(t + \Delta t) - \mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{w} \, dS, \quad (52)$$

quindi si risolve il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie

$$K(u_t) \Delta u + C \Delta \dot{u} + M \Delta \ddot{u} = \Delta f. \quad (53)$$

Per risolvere il sistema (53) si ricorre al metodo di Newmark [9]. Siano  $u_t$ ,  $\dot{u}_t$  e  $\ddot{u}_t$  rispettivamente gli spostamenti, le velocità e le accelerazioni nodali al tempo  $t$ , per le analoghe quantità relative al tempo  $t + \Delta t$  si fanno le seguenti ipotesi

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1 - \delta)\dot{u}_t + \delta\ddot{u}_{t+\Delta t}]\Delta t, \quad (54)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t\Delta t + [(\frac{1}{2} - \alpha)\ddot{u}_t + \alpha\ddot{u}_{t+\Delta t}]\Delta t^2, \quad (55)$$

con  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\delta = \frac{1}{2}$ . Dalle relazioni (54)-(55) si ricavano le velocità e le accelerazioni al tempo  $t + \Delta t$  in funzione dello spostamento  $u_{t+\Delta t}$ ,

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(u_{t+\Delta t} - u_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_t - \frac{1 - 2\alpha}{2\alpha}\ddot{u}_t, \quad (56)$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}(u_{t+\Delta t} - u_t) + \frac{\alpha - \delta}{\alpha}\dot{u}_t + \frac{2\alpha - \delta}{2\alpha}\Delta t\ddot{u}_t. \quad (57)$$

Da (56) e (57) si calcolano  $\Delta \dot{u}$  e  $\Delta \ddot{u}$  in funzione dell'incognita  $\Delta u$ ,

$$\Delta \ddot{u} = \ddot{u}_{t+\Delta t} - \ddot{u}_t = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\Delta u - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_t - \frac{1}{2\alpha}\ddot{u}_t, \quad (58)$$

$$\Delta \dot{u} = \dot{u}_{t+\Delta t} - \dot{u}_t = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\Delta u - \frac{\delta}{\alpha}\dot{u}_t + \frac{2\alpha - \delta}{2\alpha}\Delta t\ddot{u}_t, \quad (59)$$

quindi si sostituiscono le relazioni appena determinate in (53), ottenendo un sistema nell'incognita  $\Delta u$ ,

$$W(u_t) \Delta u = \Delta f + C \left( \frac{\delta}{\alpha}\dot{u}_t - \frac{2\alpha - \delta}{2\alpha}\Delta t\ddot{u}_t \right) + M \left( \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_t + \frac{1}{2\alpha}\ddot{u}_t \right), \quad (60)$$

con

$$W(u_t) = K(u_t) + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} C + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} M. \quad (61)$$

Descriviamo ora brevemente l'algoritmo implementato nel NOSA. Consideriamo le seguenti quantità relative alla  $i$ -esima iterazione del  $j$ -esimo incremento di carico, corrispondente al tempo  $t + \Delta t$ :

$$u_{t+\Delta t}^{(i)}, \quad (62)$$

è il vettore degli spostamenti nodali,

$$W(u_{t+\Delta t}^{(i)}), \quad (63)$$

è la matrice del sistema ,

$$g_{t+\Delta t}^{(i)}, \quad (64)$$

è il vettore dei carichi nodali equivalenti ai carichi incrementali assegnati se  $i = 0$ , e ai ai carichi residui se  $i \geq 1$ . Supponiamo di avere calcolato in corrispondenza del tempo  $t + \Delta t$  lo spostamento  $u_{t+\Delta t}^{(i)}$ , la matrice  $W(u_{t+\Delta t}^{(i)})$  e i carichi nodali equivalenti  $g_{t+\Delta t}^{(i)}$  corrispondenti alla  $i$ -esima iterazione; in particolare  $g_{t+\Delta t}^{(i)}$  coincide con il membro destro di (60) se  $i = 1$ . Si risolve allora il sistema

$$W(u_{t+\Delta t}^{(i)}) \Delta u_{t+\Delta t}^{(i)} = g_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (65)$$

per determinare lo spostamento

$$u_{t+\Delta t}^{(i+1)} = u_{t+\Delta t}^{(i)} + \Delta u_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (66)$$

relativo alla  $i + 1$ -esima iterazione. Si calcolano quindi le velocità  $\dot{u}_{t+\Delta t}^{(i+1)}$ , le accelerazioni  $\ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i+1)}$ , il tensore degli sforzi  $\sigma_{t+\Delta t}^{(i+1)}$  (nei punti di Gauss degli elementi), la derivata dello sforzo rispetto alla deformazione e il vettore dei carichi residui  $g_{t+\Delta t}^{(i+1)}$

$$g_{t+\Delta t}^{(i+1)} = f_t + \Delta f - \sum_{e=1}^N \int_{V^e} B^T \sigma_{t+\Delta t}^{(i+1)} dV^e - M \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i+1)}. \quad (67)$$

In (67) la matrice  $B$  lega gli spostamenti nodali alle deformazioni nei punti di Gauss dell'elemento, e  $f_t$  è il vettore dei carichi nodali equivalenti relativi al tempo  $t$ . Si passa quindi al controllo di convergenza; se la disequaglianza

$$\frac{\|g_{t+\Delta t}^{(i+1)}\|}{\|f_t + \Delta f\|} \leq \xi_c \quad (68)$$

è verificata si passa all'incremento di carico successivo  $j+1$ , altrimenti si ripetono tutte le operazioni precedenti a partire dalla soluzione del sistema (65).

## 4 Il codice agli elementi finiti NOSA

Il NOSA redatto in linguaggio FORTRAN, dispone di elementi isoparametrici a quattro e otto nodi per stati piani di deformazione, stati piani di sforzo e problemi assialsimmetrici, e di elementi a otto e venti nodi per analisi tridimensionali. Per lo studio delle volte sono disponibili due elementi guscio non conformi; il primo a otto nodi, è formulato in base all'ipotesi di Kirchhoff-Love mentre il secondo, a quattro nodi, tiene conto degli effetti deformativi del taglio [10].

La libreria dei materiali, oltre ai materiali elastici lineari, comprende materiali elastici non lineari con debole resistenza a trazione e limitata resistenza a compressione, utilizzati per lo studio di costruzioni in muratura.

Nel corso di questo progetto sono state implementate le *routines* necessarie allo studio della dinamica dei corpi non resistenti a trazione. Per consentire al codice NOSA la soluzione di problemi dinamici è stata necessaria sia la redazione di *routines* completamente nuove, sia la modifica di *routines* già esistenti. Per integrare nel tempo il sistema di equazioni differenziali ordinarie ottenuto discretizzando la struttura da esaminare in elementi finiti, è stato implementato il metodo di Newmark e si è adeguato al caso dinamico lo schema di Newton-Raphson, già utilizzato nell'analisi statica, per la soluzione del sistema algebrico non lineare ottenuto ad ogni passo di integrazione nel tempo.

Il metodo è stato implementato per tutti gli elementi disponibili nel codice e consente di considerare sia masse distribuite che concentrate e di tenere conto delle forze di attrito. Per quanto riguarda la gestione delle condizioni iniziali e al contorno, è prevista la possibilità di assegnare spostamenti iniziali e/o velocità iniziali anche non uniformi e forze applicate, spostamenti e accelerazioni imposte dipendenti dal tempo.

### Routines già presenti nel NOSA e opportunamente modificate per l'analisi dinamica

**PSTRES**, è la routine principale del programma e gestisce tutte le operazioni del programma, in particolare gestisce i parametri per l'integrazione nel tempo del sistema (60).

**CONTRL**, legge le schede parametro del programma. Sono state aggiunte alla routine le istruzioni necessarie al riconoscimento e all'interpretazione delle seguenti schede parametro relative alla dinamica:

**DYNAMIC** definisce i parametri necessari all'attivazione di tutte le routine della dinamica,

**VISCOSITY** definisce i parametri necessari all'attivazione dello smorzamento viscoso,

**DIST LOADS** è stata modificata questa scheda già esistente per permettere un'eventuale ridefinizione dei carichi durante una corsa di restart.

**CORE1**, alloca in memoria le risorse necessarie per soddisfare alle richieste fatte nella fase precedente; in particolare calcola la lunghezza massima dell'area di memoria di lavoro in cui vanno inserite alcune variabili elementali.

**INPUT**, legge le schede di modello che definiscono la struttura: topologia, coordinate, condizioni iniziali, condizioni al bordo. Sono state aggiunte alla routine le istruzioni necessarie al riconoscimento e all'interpretazione delle seguenti schede:

**INITIAL DISPLACEMENTS** definisce gli spostamenti iniziali dei nodi della griglia,

**INITIAL VELOCITIES**, definisce le velocità iniziali dei nodi della griglia,

**DAMPING** definisce i coefficienti di attrito legati alla matrice di massa e alla matrice di rigidità necessari per la costruzione della matrice di smorzamento,

**DYNAMIC CONDITIONS** specifica i parametri necessari per l'integrazione nel tempo,

**FIXED ACCELERATIONS** definisce le accelerazioni imposte per ogni grado di libertà dei nodi della griglia durante i vari incrementi di tempo,

**MASSES** definisce le eventuali masse concentrate associate ad ogni grado di libertà nodale.

**CORE**, alloca in memoria le risorse necessarie per oddisfare le richieste della fase precedente; precisamente calcola gli indirizzi di memoria e le massime dimensioni delle variabili presenti nel *common/SIZE*, le dimensioni delle aree di memoria del *common/LSIZE* per ciascuno dei diversi tipi di elementi presenti nella griglia. Inoltre la **CORE** verifica che l'area totale di memoria sia sufficiente per lo svolgimento del programma.

**INITA**, inizializza alcune matrici; sono state aggiunte le istruzioni necessarie all'azzeramento di opportune grandezze relative alla dinamica.

**INCREM**, gestisce gli incrementi di carico; sono state aggiunte le istruzioni necessarie alla gestione delle accelerazioni imposte variabili nel tempo.

**LOAD**, legge le schede che definiscono l'incremento di carico e gestisce la riduzione dei carichi assegnati alla struttura a carichi nodali equivalenti. Sono state aggiunte le istruzioni necessarie al riconoscimento e alla interpretazione della scheda seguente

**DYNAMIC CHANGE** questa scheda permette di cambiare dopo qualsiasi incremento i parametri per l'integrazione nel tempo, in particolare il passo temporale.

**FRONT**, risolve il sistema che fornisce gli spostamenti incrementali, calcola gli spostamenti totali e le reazioni vincolari; per la risoluzione del sistema (60) è stato adottato il metodo frontale.

**STRS3M**, calcola le componenti delle tensioni e delle deformazioni in ogni punto di Gauss nel caso di elementi tridimensionali; inoltre gestisce il calcolo dello sforzo viscoso in presenza di attrito viscoso interno e il calcolo delle forze nodali elementari interne.

**STRSMS**, calcola le componenti delle tensioni e delle deformazioni in ogni punto di Gauss nel caso di elementi di tipo *plane stress*; inoltre gestisce il calcolo dello sforzo viscoso in presenza di attrito viscoso interno e il calcolo delle forze nodali elementari interne.

**STRSMS**, calcola le componenti delle tensioni e delle deformazioni in ogni punto di Gauss nel caso di elementi di tipo *plane strain*; inoltre gestisce il calcolo

dello sforzo viscoso in presenza di attrito viscoso interno e il calcolo delle forze nodali elementali interne.

**STRAXM**, calcola le componenti delle tensioni e delle deformazioni in ogni punto di Gauss nel caso di elementi assialsimmetrici; inoltre gestisce il calcolo dello sforzo viscoso in presenza di attrito viscoso interno e il calcolo delle forze nodali elementali interne.

**SPLSHM**, calcola le componenti delle tensioni e delle deformazioni in ogni punto di Gauss nel sistema di riferimento locale nel caso di elementi di tipo guscio; inoltre gestisce il calcolo dello sforzo viscoso in presenza di attrito viscoso interno e il calcolo delle forze nodali elementali interne.

**PRNTR**, stampa i dati di output del programma; la stampa può essere effettuata alla fine di ogni incremento di tempo oppure alla fine di ogni iterazione; alla routine sono state aggiunte le istruzioni necessarie alla stampa di tutte le grandezze relative alla dinamica.

**POSTMF**, scrive i risultati delle analisi su file di disco per scopi di post-processing; scrive la connettività degli elementi, le coordinate dei nodi, gli spostamenti nodali, le velocità nodali, le accelerazioni nodali, i carichi nodali e le reazioni vincolari. Quindi, all'interno di un ciclo sugli elementi, scrive le deformazioni e gli sforzi; alla routine sono state aggiunte le istruzioni necessarie alla scrittura su file di disco delle grandezze relative alla dinamica.

**RESINC**, legge da file di disco i risultati ottenuti in una corsa precedente; alla routine sono state aggiunte le istruzioni necessarie alla lettura di tutti i parametri relativi alla dinamica.

**SAVINC**, scrive i risultati dell'analisi effettuata su un'apposita unità disco per l'eventuale esecuzione successiva di una corsa di restart; alla routine sono state aggiunte le istruzioni necessarie alla scrittura su disco di tutti i parametri relativi alla dinamica.

**AGG**, aggiorna i dati a convergenza avvenuta; sono state aggiunte le istruzioni necessarie all'aggiornamento dei valori delle velocità, delle accelerazioni e degli spostamenti.

Sono inoltre state modificate le seguenti aree di COMMON:

Common/CNTR: in questo common sono inserite le variabili che controllano lo svolgimento del programma.

Common/SIZE: in questo common sono memorizzati i puntatori agli arrays relativi alle aree di lavoro,

Common/LSIZE: in questo common sono definite le dimensioni massime delle aree di memoria necessarie per gli arrays elementali.

### Routines di nuova implementazione

**STIFD**, gestisce il calcolo del sistema (60) attraverso le chiamate alle routines STIFXD, STIFAD, STIF3DD, STIFSHD.

**STIFXD**, calcola la matrice  $W$  del sistema (60) nel caso di elementi assialsimmetrici.

**STIFAD**, calcola la matrice  $W$  del sistema (60) nel caso di elementi piani.  
**STIF3DD**, calcola la matrice  $W$  del sistema (60) nel caso di elementi tridimensionali.

**STIFSHD**, calcola la matrice  $W$  del sistema (60) nel caso di elementi di tipo guscio.

Nelle routines **STIFAD**, **STIFSHD**, **STIF3DD**, **STIFXD** vengono calcolate le matrici di rigidezza  $K$ , di massa  $M$  e di smorzamento  $C = \alpha_0 M + \alpha_1 K$ , con  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  coefficienti di attrito viscoso.

**RGTD**, riceve in input dalla **FRONT** le matrici di massa, di rigidezza e di smorzamento precedentemente calcolate nella **STIF**, il vettore dei carichi nodali calcolato nella **INCREM** e il vettore delle forze interne precedentemente calcolato; con queste quantità calcola il membro destro del sistema (60).

**ACCEL**, calcola le velocità e le accelerazioni nodali dell'incremento corrente e della iterazione corrente.

**CONVERD**, valuta, ad ogni iterazione, il raggiungimento della convergenza. È stato implementato sia il criterio di convergenza (68) che il seguente criterio

$$\frac{\|\delta u\|_\infty}{\|du\|_\infty} < TOL, \quad (69)$$

dove  $du$  è il vettore spostamento relativo all'incremento corrente,  $\delta u$  è il vettore spostamento relativo all'iterazione e  $TOL$  è un parametro di controllo di tolleranza. In questo modo si considera raggiunta la convergenza quando il massimo spostamento dell'ultima iterazione è piccolo rispetto al massimo spostamento incrementale.

**DISPIVAR**, permette l'assegnazione di spostamenti dipendenti dal tempo.

**ACCVAR**, permette l'assegnazione di accelerazioni dipendenti dal tempo.

Sono state inoltre aggiunte le seguenti aree di **COMMON**

**Common/DYNA**, questo common contiene i parametri per la gestione degli incrementi di tempo.

**Common/DYNAC**, questo common contiene i parametri per la gestione della convergenza.

Per consentire l'utilizzo del **NOSA** è stato redatto un manuale d'uso allegato alla presente relazione (*The finite element code NOSA, User's manual*, compiled by the Materials and Structural Mechanics team - Istituto CNUCE, 1999).

## 5 Applicazioni

In questa sezione è descritta l'attività di validazione e verifica del codice di calcolo agli elementi finiti sviluppato nel corso del progetto. Questa attività è divisa in due fasi. Nella prima fase sono stati confrontati i risultati numerici ottenuti con NOSA con la soluzione esplicita di alcuni semplici problemi per i quali è stato possibile integrare l'equazione del moto in forma chiusa. I primi due esempi considerati riguardano le vibrazioni longitudinali di una trave incastrata costituita da un materiale elastico lineare, soggetta ad una forzante dipendente dal tempo, in assenza e in presenza di smorzamento viscoso [11]. Successivamente sono state prese in esame una corona circolare soggetta ad uno stato piano di tensione [12] e una trave incastrata agli estremi, di cui sono state studiate le vibrazioni longitudinali [7], entrambe costituite da un materiale non resistente a trazione.

Nella seconda fase dell'attività di validazione è stato innanzi tutto eseguito un confronto tra le vibrazioni longitudinali di una trave elastica e quelle di una trave non resistente a trazione, entrambe in presenza di viscosità. Quindi è stato preso in esame un arco su piedritti soggetto ad una accelerazione alla base dei piedritti. Finalmente è stato simulato il comportamento di una serie di archi dell'arsenale mediceo di Pisa, in presenza di un sisma. I dati relativi alla geometria dell'arsenale sono stati forniti dalla Soprintendenza di Pisa.

## 5.1 Trave incastrata soggetta a forzante dipendente dal tempo

Consideriamo una trave rettilinea di lunghezza  $L$ , avente densità di massa  $\bar{m}$  e rigidezza flessionale  $EI$  [10]. Supponendo che la trave sia incastrata in  $x = 0$ , sia soggetta ad una forza orizzontale  $N$  costante rispetto al tempo  $t$  e alla posizione  $x$ , e ad un carico verticale  $p(x, t)$ . Indicato con  $v(x, t)$  lo spostamento trasversale, vogliamo determinare la soluzione dell'equazione del moto

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p, \quad (70)$$

con le condizioni iniziali

$$v(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (71)$$

Le condizioni al bordo di incastro in  $x = 0$  richiedono che sia

$$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0, \quad (72)$$

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L, t) = 0, \quad EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L, t) + N \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (73)$$

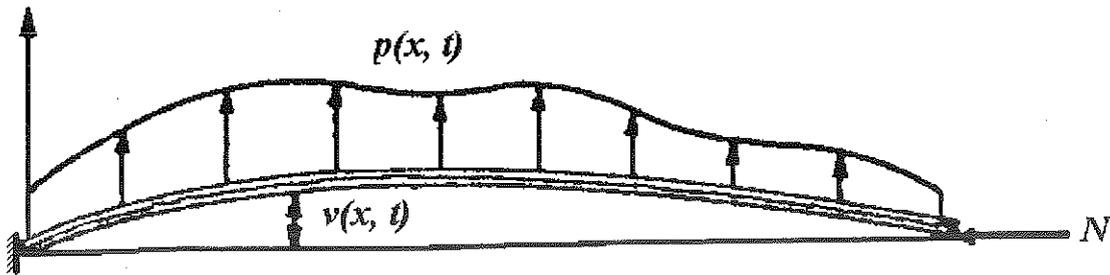


Figura 1. Trave.

Con lo scopo di effettuare un'analisi della risposta dinamica della trave, consideriamone innanzi tutto le vibrazioni libere e valutiamo i modi e le frequenze di vibrazione. Supponiamo che la soluzione  $v$  dell'equazione del moto sia della forma

$$v(x, t) = \phi(x)Y(t), \quad (74)$$

cioè si suppone che i moti di vibrazione libera consistano di una forma costante  $\phi(x)$ , la cui ampiezza  $Y(t)$  varia con il tempo. Da (70) con  $p = 0$ , tenendo conto di (74) si ottiene

$$EI\phi^{iv}Y + N\phi''Y + \bar{m}\phi\ddot{Y} = 0, \quad (75)$$

da cui, dividendo per  $\phi Y$ , si ricava

$$EI\frac{\phi^{iv}}{\phi} + N\frac{\phi''}{\phi} = -\bar{m}\frac{\ddot{Y}}{Y} = \bar{C} = \bar{m}\omega^2, \quad (76)$$

e, finalmente

$$EI\phi^{iv}(x) + N\phi''(x) - \bar{m}\omega^2\phi(x) = 0, \quad (77)$$

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2Y(t) = 0. \quad (78)$$

La soluzione di (78) è

$$Y(t) = \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \sin \omega t + Y(0) \cos \omega t; \quad (79)$$

per la soluzione di (77), posto

$$g^2 = \frac{N}{EI}, \quad \alpha^4 = \frac{\bar{m}\omega^2}{EI}, \quad (80)$$

si suppone che  $\phi(x) = Ce^{sx}$ , da cui si ricava

$$(s^4 + g^2s^2 - \alpha^4)Ce^{sx} = 0, \quad (81)$$

e finalmente

$$s^4 + g^2s^2 - \alpha^4 = 0. \quad (82)$$

Le soluzioni dell'equazione (82) sono

$$s = \pm \varepsilon, \quad s = \pm i\delta, \quad (83)$$

con

$$\varepsilon = \sqrt{\sqrt{\frac{g^4}{4} + \alpha^4} - \frac{g^2}{2}}, \quad (84)$$

$$\delta = \sqrt{\sqrt{\frac{g^4}{4} + \alpha^4} + \frac{g^2}{2}}. \quad (85)$$

Pertanto  $\phi$  ha l'espressione

$$\phi(x) = D_1 \sin \delta x + D_2 \cos \delta x + D_3 \sinh \varepsilon x + D_4 \cosh \varepsilon x; \quad (86)$$

le costanti  $D_i$  devono essere calcolate in modo da soddisfare (72) e (73) che equivalgono alle condizioni

$$\phi(0) = 0, \quad (87)$$

$$\phi'(0) = 0, \quad (88)$$

$$\phi''(L) = 0, \quad (89)$$

$$EI\phi'''(L) + N\phi'(L) = 0. \quad (90)$$

Da (87) e (88) si ricava

$$D_4 = -D_2, \quad D_3 = -\frac{\delta}{\varepsilon}D_1; \quad (91)$$

affinche' il sistema di equazioni (89)-(90) abbia una soluzione ( $D_1, D_2$ ) diversa da zero,  $\varepsilon$  e  $\delta$  devono soddisfare l'equazione trascendente

$$(\varepsilon^4 + \delta^4) \cos \delta L \cosh \varepsilon L + (\varepsilon^3 \delta - \varepsilon \delta^3) \sin \delta L \sinh \varepsilon L + 2\varepsilon^2 \delta^2 = 0 \quad (92)$$

con il vincolo

$$\varepsilon^2 + g^2 = \delta^2. \quad (93)$$

Per  $\varepsilon$  e  $\delta$  che soddisfano (92) e (93) si ha  $D_2 = -\kappa D_1$ , con

$$\kappa = \frac{\delta^2 \sin \delta L + \varepsilon \delta \sinh \varepsilon L}{\delta^2 \cos \delta L + \varepsilon^2 \cosh \varepsilon L}, \quad (94)$$

pertanto (86) diventa

$$\phi(x) = D_1 \left( \sin \delta x - \frac{\delta}{\varepsilon} \sinh \varepsilon x + \kappa (\cosh \varepsilon x - \cos \delta x) \right). \quad (95)$$

Calcolate le infinite soluzioni  $(\varepsilon_n, \delta_n)$  dell'equazione (92) e ricavati da (85) i valori di  $\alpha_n$  e finalmente da (80)<sub>2</sub> le quantità  $\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$ , si ottengono le soluzioni  $\phi_n(x)$  dell'equazione (86) con i vincoli (87)-(90). Le funzioni  $\phi_n(x)$  soddisfano le seguenti condizioni di ortogonalità,

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, \quad n \neq m, \quad (96)$$

$$\int_0^L (EI\phi_n^{iv}(x) + N\phi_n''(x))\phi_m(x)dx =$$

$$= \bar{m}\omega_n^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0, \quad n \neq m. \quad (97)$$

Torniamo adesso a considerare l'equazione delle vibrazioni forzate (70). Per effettuare un'analisi di sovrapposizione modale è necessaria una trasformazione dalle coordinate geometriche di spostamento alle coordinate normali o ampiezze modali; questa trasformazione è espressa dalla relazione

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)Y_i(t), \quad (98)$$

in base alla quale ogni spostamento della trave può essere ottenuto sovrappo-  
nendo i modi di vibrazione  $\phi_i(x)$  di opportuna ampiezza  $Y_i(t)$ . Le condizioni di  
ortogonalità (96) e (97) consentono di disaccoppiare le equazioni del moto. Sos-  
tituendo (98) in (70), moltiplicando per  $\phi_n$ , integrando rispetto ad  $x$ , tenendo  
conto di (96) e (97), si ottiene che  $Y_n$  deve soddisfare l'equazione differenziale  
ordinaria

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2 M_n Y_n(t) = P_n(t), \quad (99)$$

dove

$$M_n = \bar{m} \int_0^L \phi_n^2(x)dx, \quad (100)$$

e

$$P_n(t) = \int_0^L p(x, t)\phi_n(x)dx. \quad (101)$$

Quando, come nel caso che abbiamo esaminato,  $p$  è un carico di entità  $P_0$   
concentrato in  $x = L$ , per ogni tempo  $t$ , allora  $Y_n$  ha l'espressione

$$Y_n(t) = \frac{P_0\phi_n(L)}{M_n\omega_n^2} (1 - \cos\omega_n t). \quad (102)$$

In Figura 2 è riportato l'andamento dello spostamento verticale in  $x = L$ , in  
funzione del tempo, per  $t \in [0, 0.3]$ ; la linea continua rappresenta la soluzione  
analitica, calcolata tenendo conto di (102) e considerando i soli primi cinque  
modi di vibrazione, la linea tratteggiata è la soluzione numerica ottenuta usando

il codice agli elementi finiti NOSA. La figura è stata ottenuta in corrispondenza dei seguenti valori dei parametri,

$$L = 5 \text{ m}, \quad \text{sezione } 0.1 \times 0.1 \text{ m}^2, \quad (103)$$

$$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad I = 8.33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4, \quad (104)$$

$$\rho = 8000 \text{ Kg/m}^3, \quad \bar{m} = 80 \text{ Kg/m}, \quad (105)$$

$$N = 10000 \text{ N}, \quad P_0 = 1000 \text{ N}. \quad (106)$$

La trave è stata discretizzata usando 805 elementi *plane stress* a otto nodi.

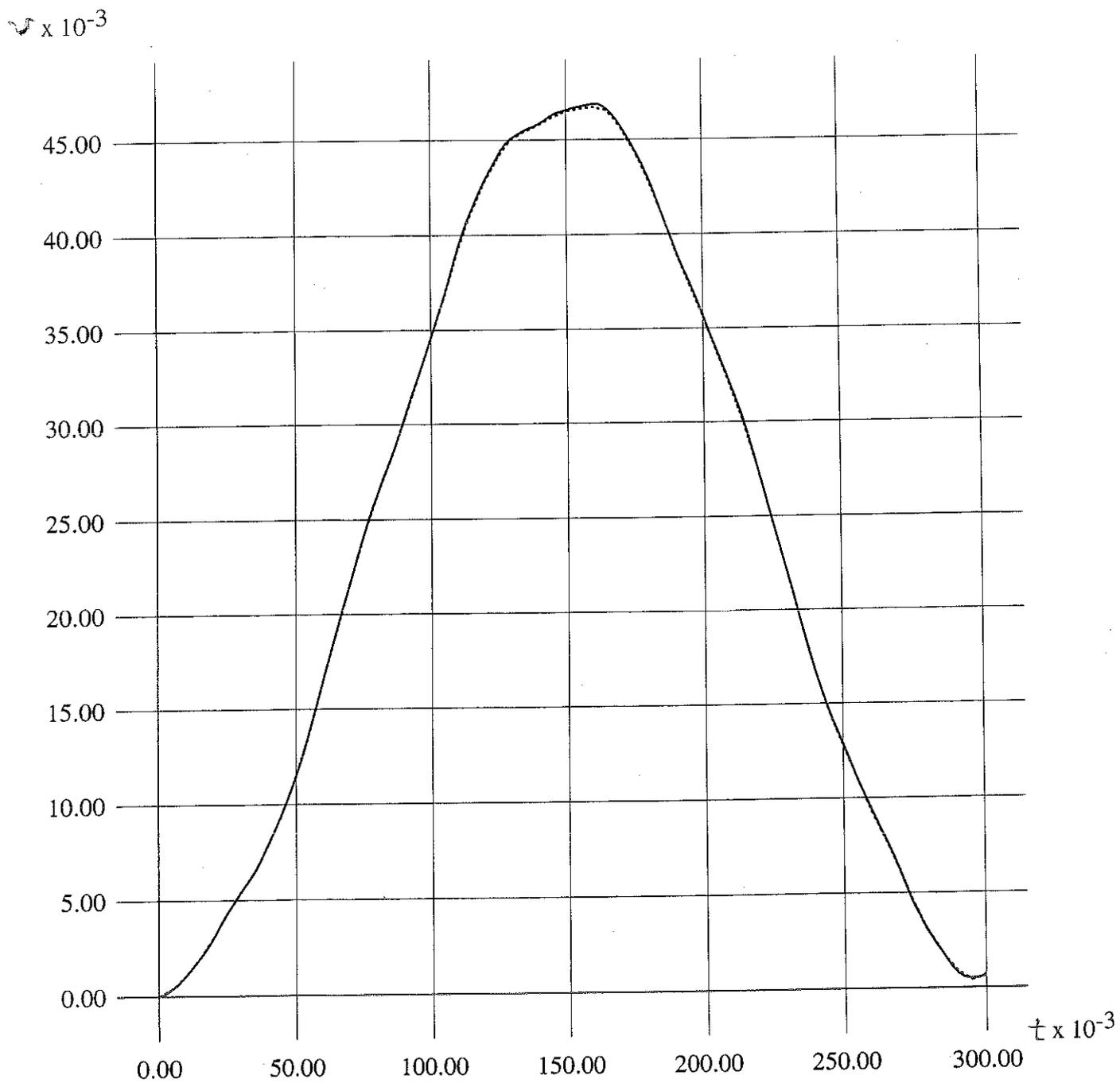


Figura 2. Spostamento trasversale  $v(L,t)$  al variare di  $t \in [0, 0.3]$ .

## 5.2 Trave incastrata soggetta a forzante dipendente dal tempo in presenza di viscosità

Consideriamo ancora le vibrazioni trasversali di una trave incastrata soggetta ad un carico verticale  $p(x, t)$ , con  $N = 0$ , in presenza di smorzamento viscoso. Prendiamo in esame due tipi di smorzamento: una resistenza viscosa agli spostamenti trasversali della trave  $c(x)$  e una resistenza viscosa alla deformazione del materiale costituente la trave  $c_s$  [11]. L'equazione delle vibrazioni trasversali è

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial t} + \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial v}{\partial t} = p, \quad (107)$$

con le condizioni iniziali (71) e al contorno (72) e (73). Consideriamo le vibrazioni libere della trave, cioè consideriamo le soluzioni dell'equazione (107) con  $p = 0$ . Se assumiamo che per  $v$  valga la decomposizione (74), da (107) si ricava

$$EI \phi^{iv} Y + c_s I \phi^{iv} \dot{Y} + c \phi \dot{Y} + \bar{m} \phi \ddot{Y} = 0, \quad (108)$$

e dividendo per  $\phi Y$ ,

$$\frac{\phi^{iv}}{\phi} + \frac{c_s}{E} \frac{\phi^{iv}}{\phi} \frac{\dot{Y}}{Y} + \frac{c}{EI} \frac{\dot{Y}}{Y} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}}{Y} = 0. \quad (109)$$

Da (109) si deduce che le funzioni  $\phi$  e  $Y$  devono soddisfare le equazioni differenziali ordinarie

$$\phi^{iv} - \alpha^4 \phi = 0, \quad (110)$$

$$\frac{\alpha^4 EI}{\bar{m}} Y + \left( \frac{c}{\bar{m}} + \frac{c_s I}{\bar{m}} \alpha^4 \right) \dot{Y} + \ddot{Y} = 0. \quad (111)$$

La soluzione di (110) per la trave incastrata è

$$\phi(x) = A_1 \left( \sin \alpha x - \sinh \alpha x + \frac{\sin \alpha L + \sinh \alpha L}{\cos \alpha L + \cosh \alpha L} (\cosh \alpha x - \cos \alpha x) \right), \quad (112)$$

in cui le frequenze di vibrazione  $\alpha L$  della trave incastrata sono le soluzioni dell'equazione trascendente

$$1 + \cos \alpha L \cosh \alpha L = 0. \quad (113)$$

Come nel caso precedente, supponiamo che la soluzione dell'equazione (107) sia (98), dove  $\phi_i$  ha l'espressione (112) con  $\alpha = \alpha_i$ ,  $i$ -esima soluzione di (113) e le funzioni  $Y_i$  devono essere opportunamente determinate. Si può provare che le funzioni  $\phi_i$  soddisfano le condizioni di ortogonalità (96) e (97). Posto

$$c = a_0 m, \quad (114)$$

e

$$c_s = a_1 E, \quad (115)$$

da (107), tenendo conto delle proprietà di ortogonalità dei modi di vibrazione  $\phi_i$ , si ricava l'equazione differenziale che deve soddisfare l' $n$ -esima funzione  $Y_n$ ,

$$M_n \ddot{Y}_n + (a_0 + a_1 \omega_n^2) M_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 M_n Y_n = P_n, \quad (116)$$

dove

$$\omega_n^2 = \alpha_n^4 \frac{EI}{m}. \quad (117)$$

La Figura 3 mostra l'andamento dello spostamento  $v(L, t)$ , per  $t \in [0, 0.50]$ ; la linea continua corrisponde alla soluzione analitica (sono stati calcolati solo i primi 5 modi), la linea tratteggiata è la soluzione numerica ottenuta con il NOSA. I valori dei parametri sono quelli dell'esempio precedente, con  $N = 0$ , inoltre

$$a_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad a_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}. \quad (118)$$

Anche in questo caso la trave è stata discretizzata con 805 elementi *plane stress* a otto nodi.

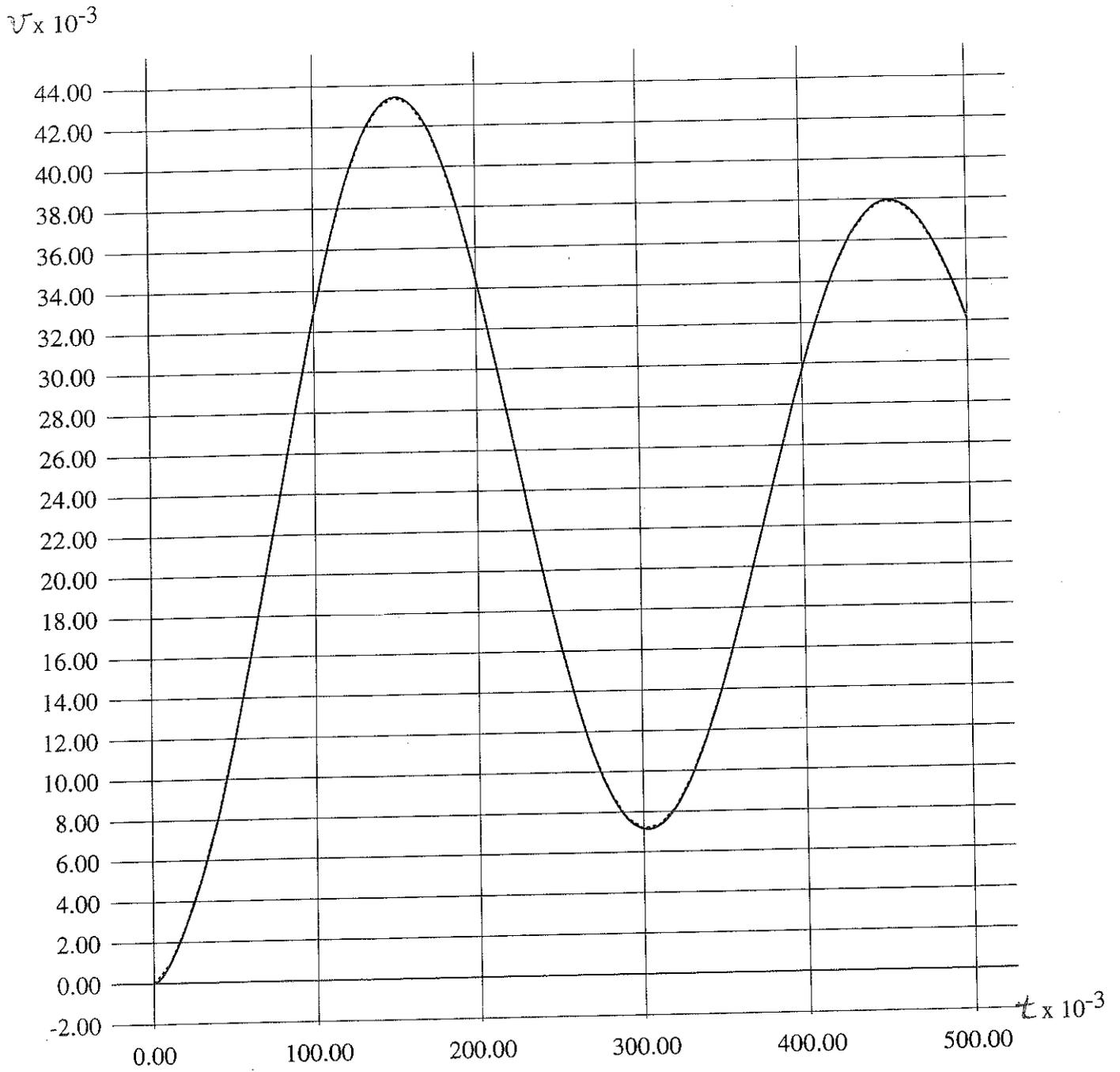


Figura 3. Spostamento trasversale  $v(L, t)$  al variare di  $t \in [0, 0.5]$ .

### 5.3 La corona circolare

Consideriamo una corona circolare di raggio interno  $a$  e raggio esterno  $b$ , costituita da un materiale non resistente a trazione, soggetta ad uno stato piano di tensione. Restringiamo la nostra attenzione ai campi di sforzo diagonali rispetto al sistema di riferimento polare mostrato in figura, aventi componenti  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  e determiniamo la classe di campi di sforzo caratterizzati dalla condizione

$$\sigma_\theta = 0. \quad (119)$$

In vista di (119) l'equazione di moto è

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (120)$$

dove  $u$  denota lo spostamento radiale. Dall'equazione costitutiva discende che la deformazione anelastica deve essere tale che

$$\varepsilon_r^a = 0, \quad \varepsilon_\theta^a \geq 0, \quad (121)$$

pertanto si ha

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta^e = \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^a = \frac{u}{r} - \varepsilon_\theta^a, \quad (122)$$

e quindi, supponendo che il rapporto di Poisson  $\nu$  sia nullo,

$$\sigma_r = E\varepsilon_r = E \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (123)$$

dove  $E$  è il modulo di Young della muratura. L'equazione di moto può essere così riscritta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (124)$$

dove si è posto  $\alpha^2 = \frac{E}{\rho}$ . Cerchiamo adesso le soluzioni di (124) della forma

$$u(r, t) = f(r)g(t), \quad (125)$$

dove  $f$  e  $g$  sono funzioni tali che

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = \kappa f, \quad (126)$$

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = \frac{\kappa}{\alpha^2} g. \quad (127)$$

L'equazione (126) può essere così riscritta

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} - \kappa r^2 f = 0, \quad (128)$$

introducendo la variabile adimensionale

$$s = \frac{r}{a}, \quad (129)$$

(128) a sua volta diventa

$$s^2 \frac{d^2 f}{ds^2} + s \frac{df}{ds} - a^2 \kappa s^2 f = 0. \quad (130)$$

Per

$$\kappa = -\frac{1}{a^2}, \quad (131)$$

(130) è un'equazione di Bessel di ordine zero, la cui soluzione è

$$f(s) = \beta J_0(s) + \delta Y_0(s), \quad (132)$$

dove  $\beta, \delta \in \mathbb{R}$ ,

$$J_0(s) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m s^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}, \quad (133)$$

$$Y_0(s) = \frac{2}{\pi} \left[ (\gamma + \ln(\frac{s}{2})) J_0(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m H_m s^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \right], \quad (134)$$

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}, \quad (135)$$

e  $\gamma$  è la costante di Eulero-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow +\infty} (H_m - \ln m) \simeq 0.5772. \quad (136)$$

Per quanto riguarda (127) si ha

$$g(t) = \xi \cos(\frac{1}{a\alpha} t) + \eta \sin(\frac{1}{a\alpha} t), \quad (137)$$

con  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ .

La soluzione dell'equazione (124) è pertanto

$$u(r, t) = [\xi \cos(\frac{1}{a\alpha} t) + \eta \sin(\frac{1}{a\alpha} t)] [\beta J_0(\frac{r}{a}) + \delta Y_0(\frac{r}{a})]; \quad (138)$$

se richiediamo che la velocità iniziale sia nulla,

$$\dot{u}(r, 0) = 0, \quad (139)$$

(138) diventa

$$u(r, t) = \xi \cos\left(\frac{1}{a\alpha}t\right) \left[ \beta J_0\left(\frac{r}{a}\right) + \delta Y_0\left(\frac{r}{a}\right) \right], \quad (140)$$

corrispondente alla condizione iniziale

$$u(r, 0) = \xi \left[ \beta J_0\left(\frac{r}{a}\right) + \delta Y_0\left(\frac{r}{a}\right) \right]. \quad (141)$$

Da (140), derivando rispetto a  $r$ , si ricava l'espressione della deformazione radiale

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{\xi}{a} \cos\left(\frac{1}{a\alpha}t\right) \left[ \beta \frac{dJ_0\left(\frac{r}{a}\right)}{ds} + \delta \frac{dY_0\left(\frac{r}{a}\right)}{ds} \right], \quad (142)$$

e quindi dello sforzo radiale

$$\sigma_r(r, t) = E \frac{\xi}{a} \cos\left(\frac{1}{a\alpha}t\right) \left[ \beta \frac{dJ_0\left(\frac{r}{a}\right)}{ds} + \delta \frac{dY_0\left(\frac{r}{a}\right)}{ds} \right]. \quad (143)$$

Da (143) si ricavano le condizioni al bordo

$$\sigma_r(a, t) = E \frac{\xi}{a} \cos\left(\frac{1}{a\alpha}t\right) \left[ \beta \frac{dJ_0(1)}{ds} + \delta \frac{dY_0(1)}{ds} \right], \quad (144)$$

$$\sigma_r(b, t) = E \frac{\xi}{a} \cos\left(\frac{1}{a\alpha}t\right) \left[ \beta \frac{dJ_0\left(\frac{b}{a}\right)}{ds} + \delta \frac{dY_0\left(\frac{b}{a}\right)}{ds} \right]. \quad (145)$$

Il problema è stato risolto numericamente nell'intervallo di tempo  $[0, \frac{T}{4}]$ , con  $T = 2\pi a\alpha$ , usando il codice NOSA imponendo le condizioni iniziali (139), (141) e le condizioni al bordo (144) e (145), con i seguenti valori delle costanti

$$a = 1 \text{ m}, \quad b = 2 \text{ m}, \quad \rho = 2000 \text{ Kg/m}^3, \quad E = 5000 \text{ MPa}, \\ \xi = 10^{-3}, \quad \eta = 0, \quad \beta = 1, \quad \delta = 0.$$

In particolare

$$\alpha^2 = 4.10^{-7} \text{ s}^2/\text{m}^2,$$

da cui si ricava

$$T \simeq 3.9 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Nelle figure 4, 5 e 6, 7, 8 e 9, 10, 11 e 12 è riportato rispettivamente l'andamento dello spostamento radiale, dello sforzo radiale e della deformazione anelastica circonferenziale in funzione del raggio  $r \in [a, b]$ , relativamente ai tempi  $t = 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ,  $t = 0.50 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ , e  $t = 0.75 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ . La linea continua e quella tratteggiata rappresentano, rispettivamente, la soluzione esplicita precedentemente calcolata e quella numerica ottenuta con il codice NOSA. Un quarto di corona circolare è stata discretizzata usando 192 elementi *plane stress* a otto nodi.

$u \times 10^{-6}$

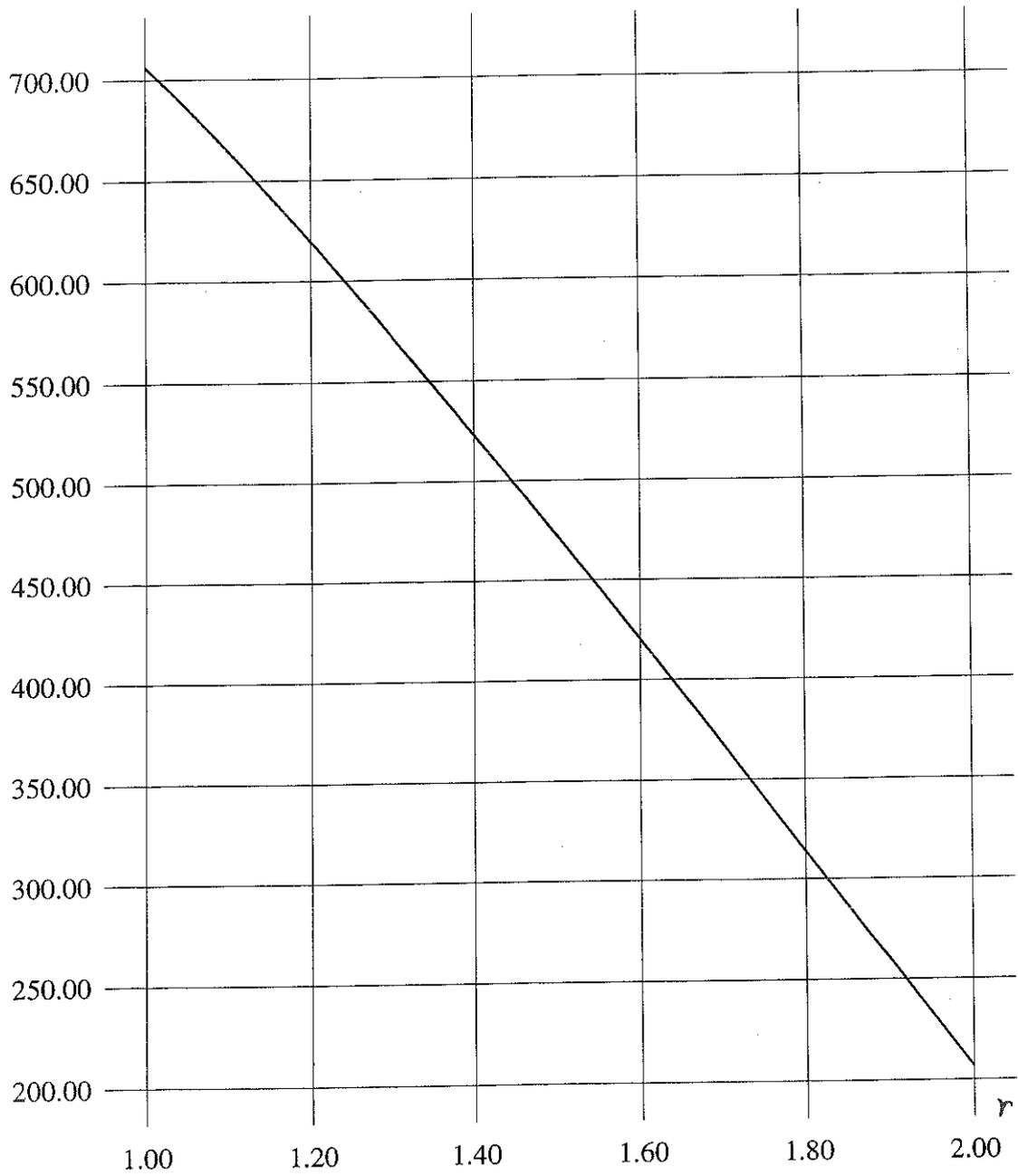


Figura 4. Spostamento radiale  $u(r, 0.25 \cdot 10^{-3})$  vs.  $r \in [a, b]$ .

$u \quad \times 10^{-6}$

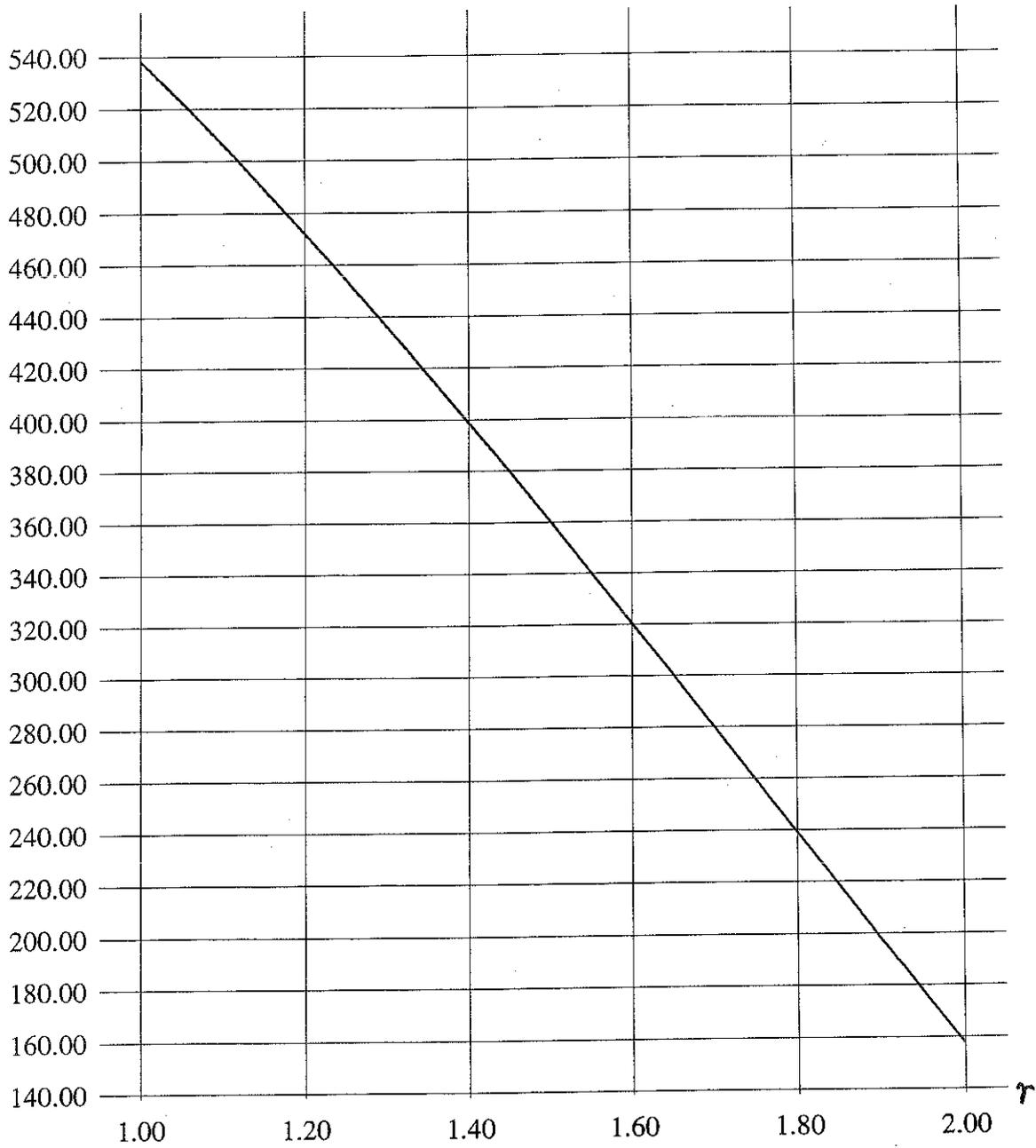


Figura 5. Spostamento radiale  $u(r, 0.5 \cdot 10^{-3})$  vs.  $r \in [a, b]$ .

$u \times 10^{-6}$

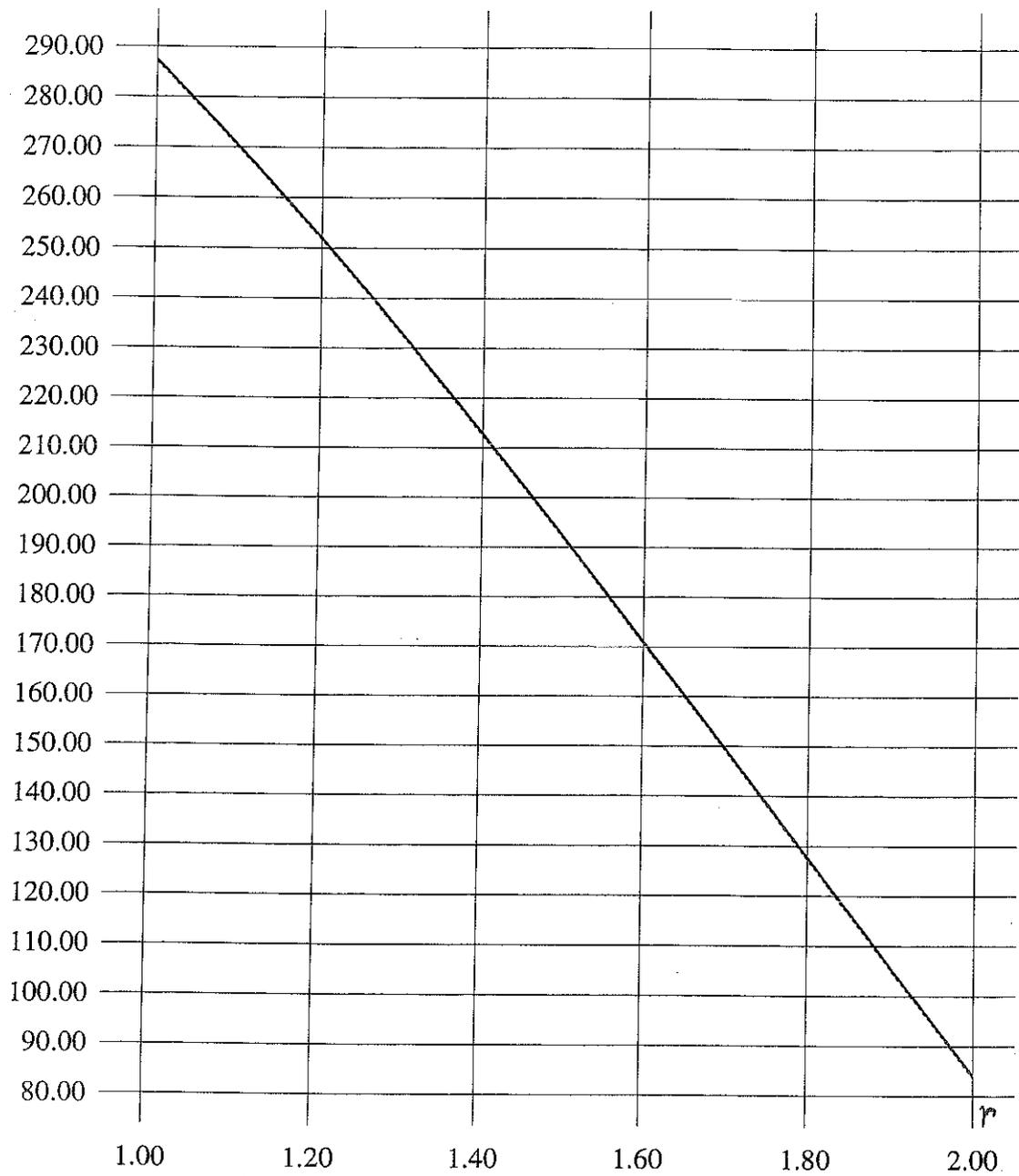


Figura 6. Spostamento radiale  $u(r, 0.75 \cdot 10^{-3})$  vs.  $r \in [a, b]$ .

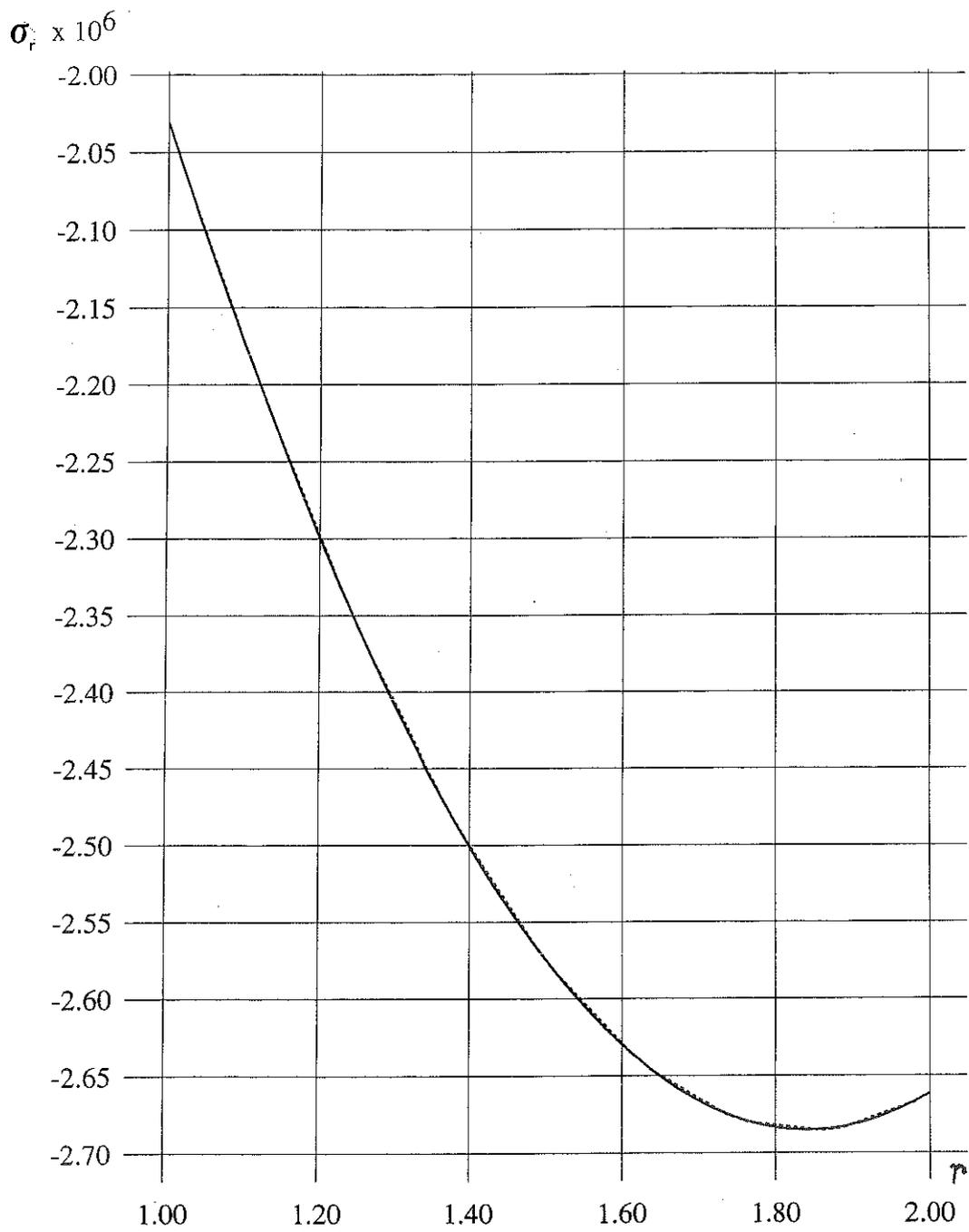


Figura 7. Sforzo radiale  $\sigma_r(r, 0.25 \cdot 10^{-3})$  vs.  $r \in [a, b]$ .

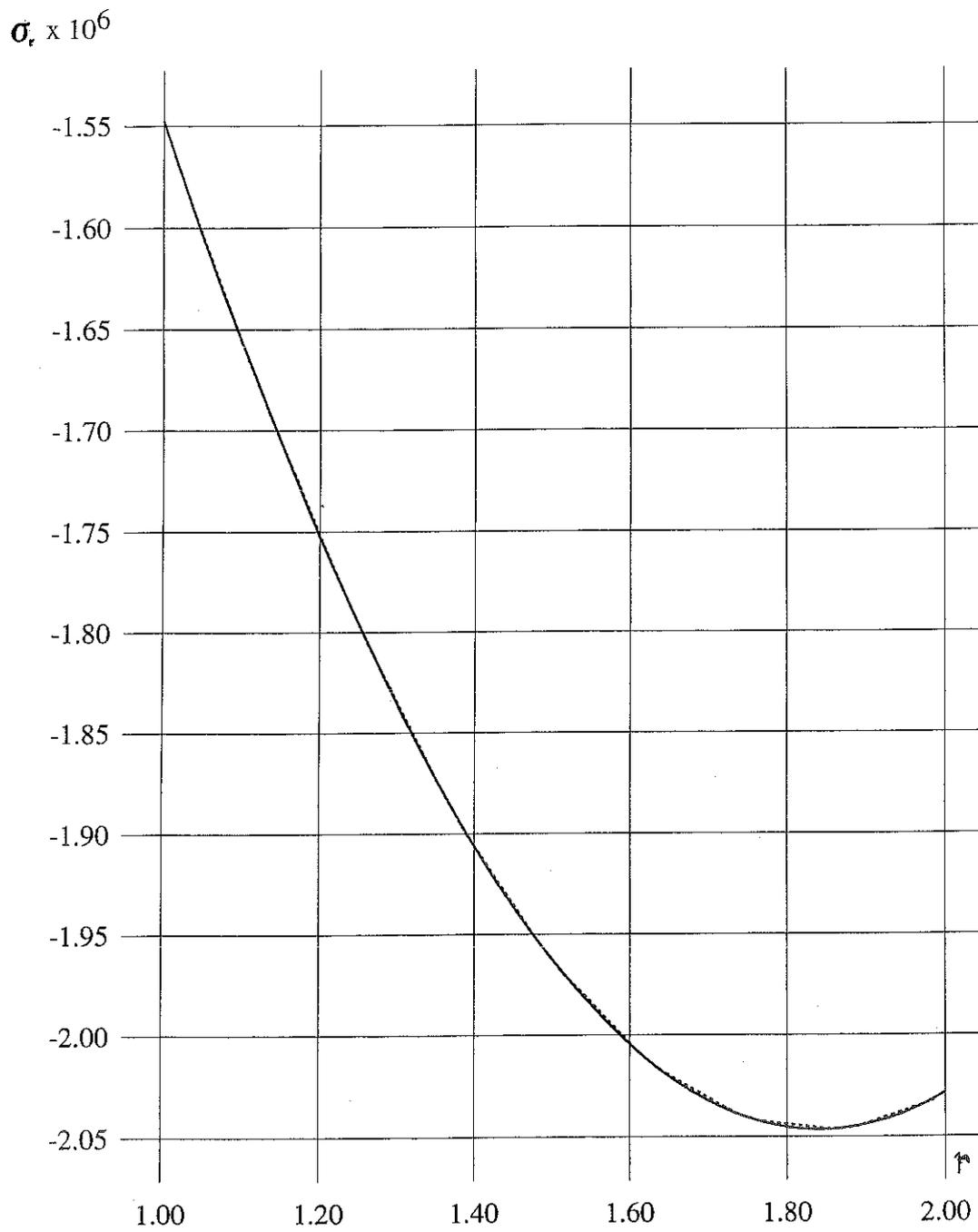


Figura 8. Sforzo radiale  $\sigma_r(r, 0.5 \cdot 10^{-3})$  vs.  $r \in [a, b]$ .

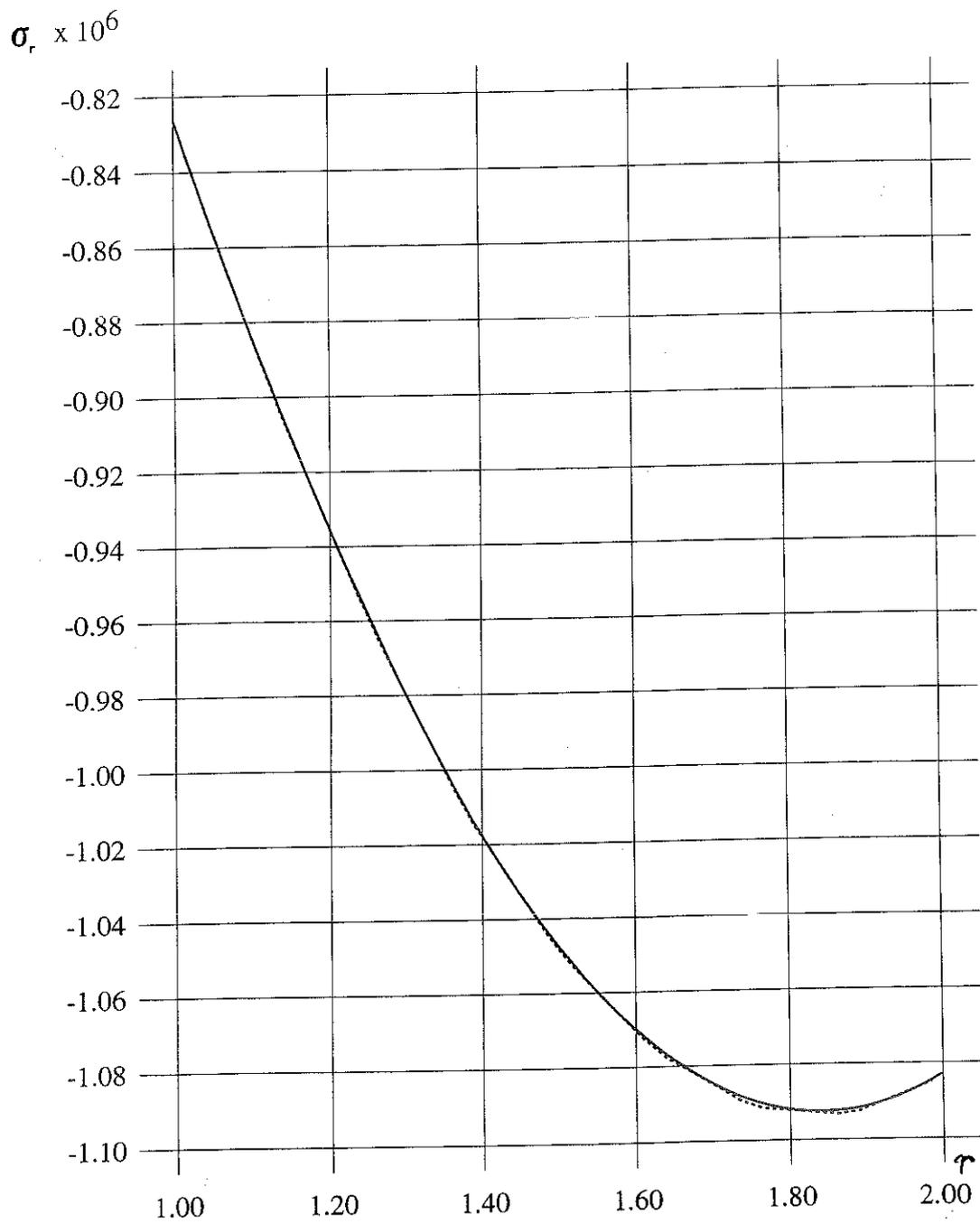


Figura 9. Sforzo radiale  $\sigma_r(r, 0.75 \cdot 10^{-3})$  vs.  $r \in [a, b]$ .

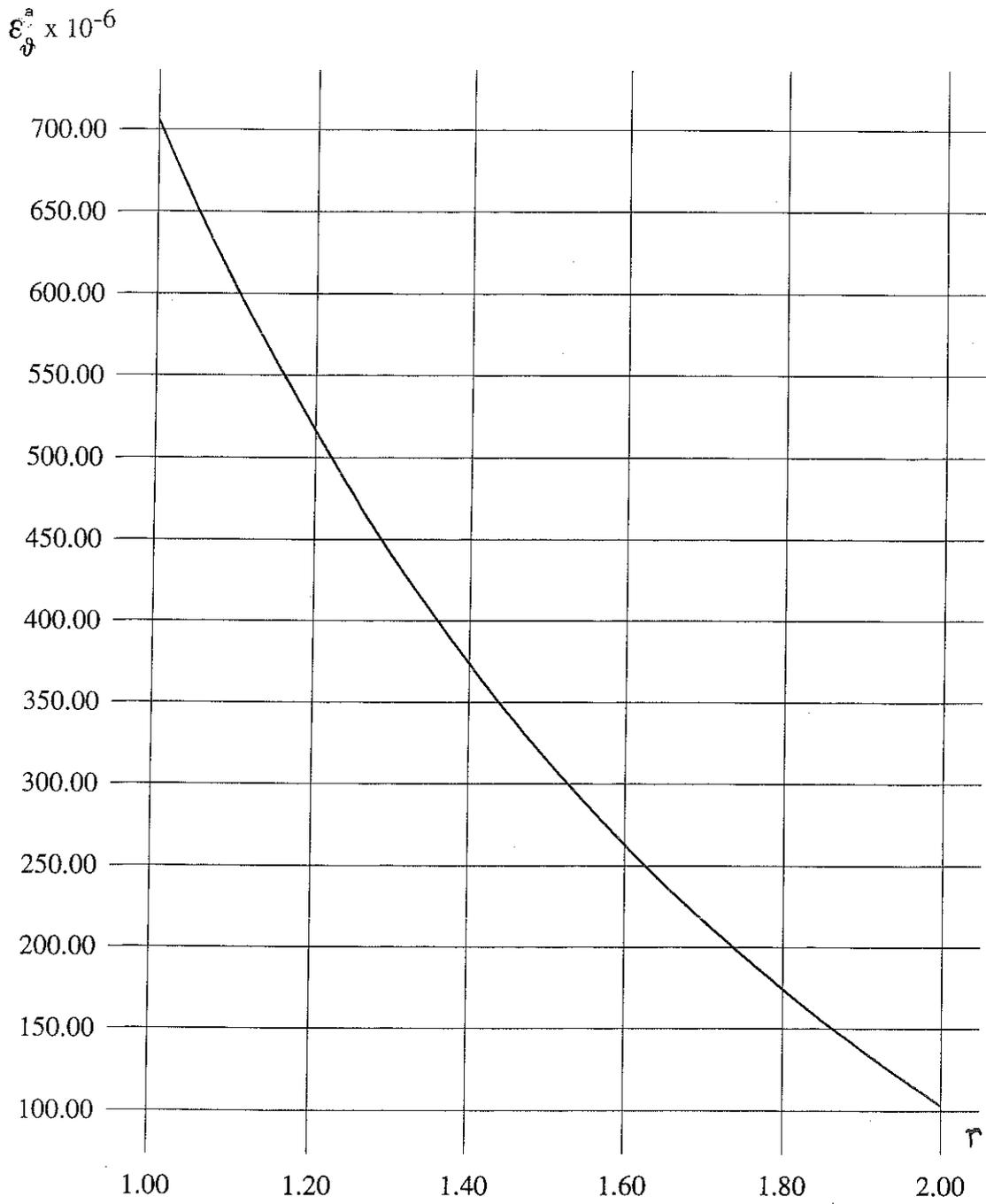


Figura 10. Deformazione anelastica circonferenziale  $\epsilon_{\theta}^a(r, 0.25 \cdot 10^{-3})$  vs.  $r \in [a, b]$ .

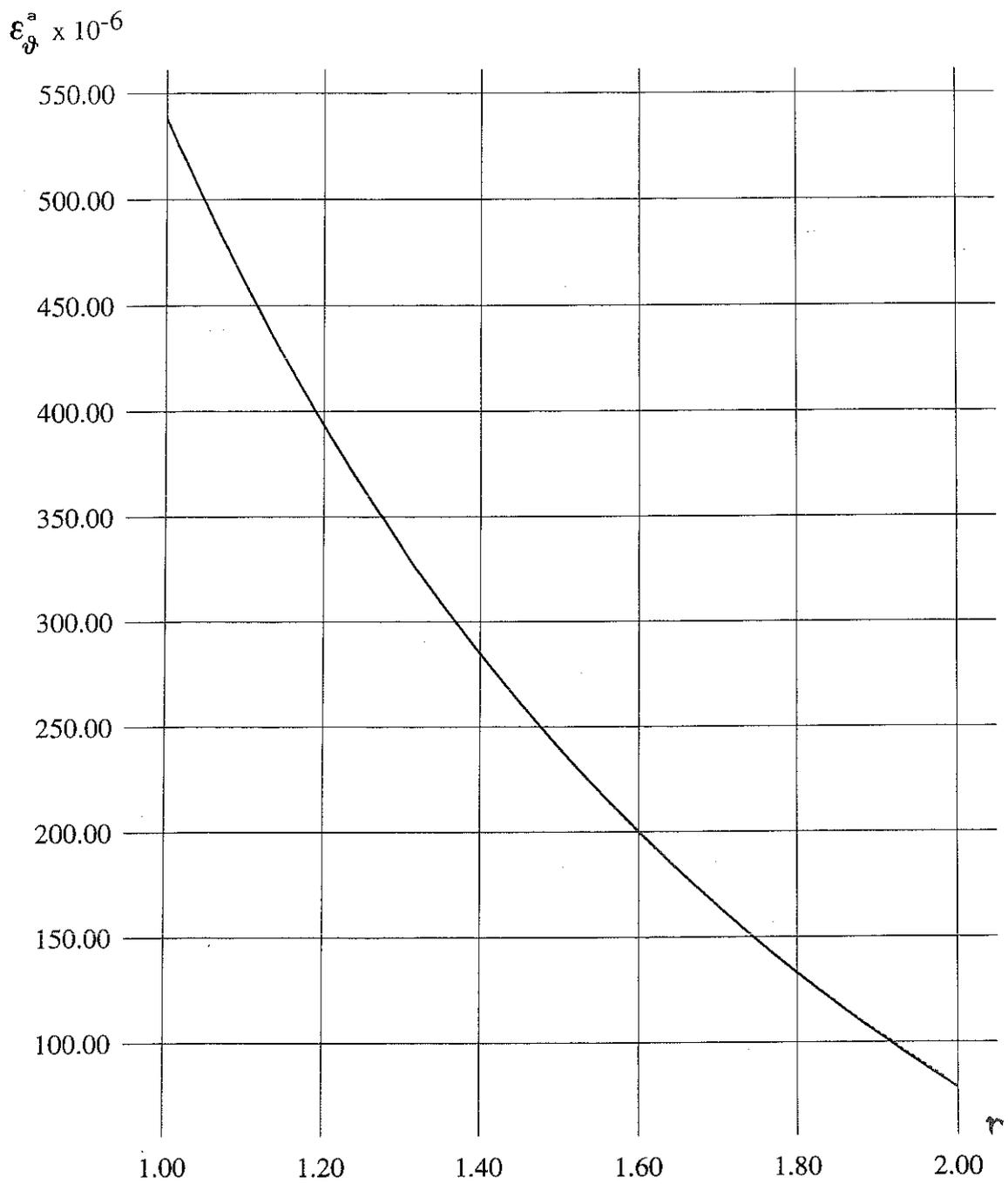


Figura 11. Deformazione anelastica circonferenziale  $\epsilon_{\theta}^a(r, 0.5 \cdot 10^{-3})$  vs.  $r \in [a, b]$ .

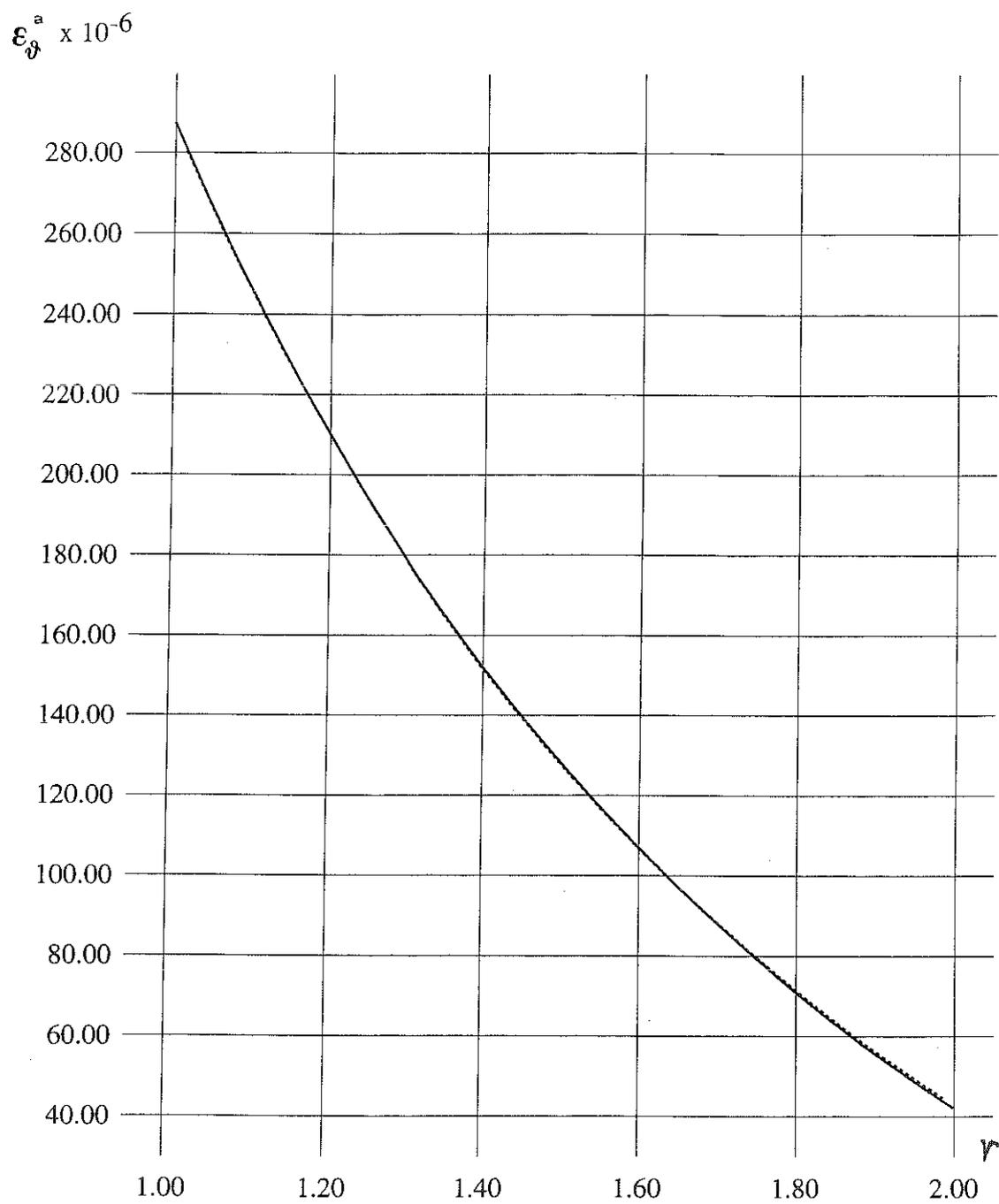


Figura 12. Deformazione anelastica circonferenziale  $\epsilon_{\theta}^a(r, 0.75 \cdot 10^{-3})$  vs.  $r \in [a, b]$ .

## 5.4 Vibrazioni longitudinali di una trave in muratura incastrata agli estremi

Consideriamo una trave incastrata agli estremi, costituita da un materiale elastico non resistente a trazione [7]. Al tempo  $t = 0$ , è assegnato uno spostamento longitudinale al punto centrale e quindi la trave è lasciata libera di oscillare. Nonostante la non linearità del materiale, è possibile determinare la soluzione esplicita dell'equazione del moto, grazie al fatto che le curve caratteristiche sono rette. La deformazione e la velocità sono costanti in certe regioni del piano  $(x, t)$ , dove  $x$  è l'ascissa lungo la trave e  $t$  il tempo, e sono discontinue lungo curve che separano le diverse regioni. Un caratteristica della soluzione così calcolata è che l'energia meccanica della trave (la somma dell'energia cinetica e potenziale) non è costante rispetto al tempo. Infatti all'interfaccia tra la parte scarica e la parte compressa della trave si forma un'onda d'urto che determina una perdita di energia meccanica e conduce al progressivo decadimento della soluzione.

Indichiamo con  $l$  la lunghezza della trave,  $E$  il modulo di Young della muratura,  $\rho$  la sua densità, e  $u(x, t)$  lo spostamento longitudinale di un punto avente ascissa  $x$  al tempo  $t$ . Le vibrazioni libere della trave sono governate dall'equazione

$$u_{tt}(x, t) - (\kappa^*(u_x))^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad (146)$$

dove  $\kappa^* = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}}$ , con

$$E^*(u_x) = E \quad \text{se } u_x < 0, \quad E^*(u_x) = 0 \quad \text{se } u_x > 0, \quad (147)$$

con le condizioni al bordo

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \text{per } t \geq 0. \quad (148)$$

Ci limiteremo qui considerare casi in cui la velocità iniziale è nulla, così

$$u(x, 0) = \hat{u}(x) \quad \text{e} \quad u_t(x) = 0, \quad \text{per } x \in [0, l], \quad (149)$$

dove  $\hat{u}$  è una assegnata funzione di  $x$ .

La soluzione dell'equazione (146) può essere calcolata usando il metodo delle caratteristiche. A questo scopo è necessario determinare gli *shocks*, cioè le curve nel piano  $(x, t)$  lungo le quali la velocità  $u_t$  e la deformazione  $u_x$  sono discontinue, e determinare i corrispondenti salti. Questo può essere fatto usando le condizioni di Rankine-Hugoniot

$$s[u_x] = -[u_t], \quad s[u_t] = -\frac{1}{\rho}[E^*u_x], \quad (150)$$

dove  $s$  è la velocità di propagazione dell'onda d'urto e le parentesi  $[ ]$  indicano il salto (destra meno sinistra) delle quantità racchiuse, attraverso lo *shock*.

In generale la soluzione non è unica, tuttavia l'insieme delle soluzioni può essere ridotto imponendo la condizione di Lax. Questa richiede che quando la

caratteristica che comincia da una parte della curva di discontinuità è continuata nella direzione di  $t$  crescente, essa interseca la linea di discontinuità. Quando la linea di discontinuità costituisce l'interfaccia tra una regione scarica e una regione compressa della trave, la pendenze  $\frac{dx}{dt}$  delle caratteristiche sono 0 prima dello *shock* e  $\pm\kappa$ , con  $\kappa = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , dopo l'attraversamento dello *shock*; quindi la condizione di Lax prescrive che sia

$$0 > s > -\kappa, \quad \text{per } s < 0, \quad \text{e} \quad \kappa > s > 0, \quad \text{per } s > 0. \quad (151)$$

Si può dimostrare che la condizione (151) implica che l'energia meccanica della trave

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (\rho u_t^2 + E^* u_x^2) dx \quad (152)$$

sia una funzione non crescente del tempo.

Scegliamo ora

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} 2ax, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ 2a(l-x), & \frac{l}{2} \leq x \leq l, \end{cases} \quad (153)$$

con  $a > 0$ . Assumiamo  $l = 1 \text{ m}$ ,  $\kappa = \frac{5}{3} 10^3 \text{ m/s}$ , e poniamo  $\tau = \kappa t$ . Si può dimostrare che lo spostamento del punto di mezzo della trave ha l'espressione

$$u(0.5, \tau) = \begin{cases} \frac{a}{3}(3-4\tau), & \tau \in [0, 1], \\ \frac{a}{3}(1-2\tau), & \tau \in [1, 1.5], \\ \frac{a}{3}(2\tau-5), & \tau \in [1.5, 2], \\ -\frac{a}{3}, & \tau \in [2, 2.5]. \end{cases} \quad (154)$$

La trave è stata discretizzata con 569 elementi *plane stress* a otto nodi. Nella figura 13 è riportato l'andamento di  $u(0.5, \tau)$  per valori di  $\tau$  appartenenti all'intervallo  $[0, 2.5]$ . La linea continua rappresenta la soluzione esatta (154), la linea punteggiata la soluzione numerica ottenuta con il NOSA, supponendo il materiale non resistente a trazione e la linea tratteggiata è la soluzione numerica per una trave non resistente a trazione ottenuta considerando uno sforzo viscoso del tipo (38) con coefficiente di viscosità  $\alpha_1 E$  con  $\alpha_1 = 10^{-7}$ . Si è infine supposto  $a = 10^{-4}$ .

$w \times 10^{-6}$

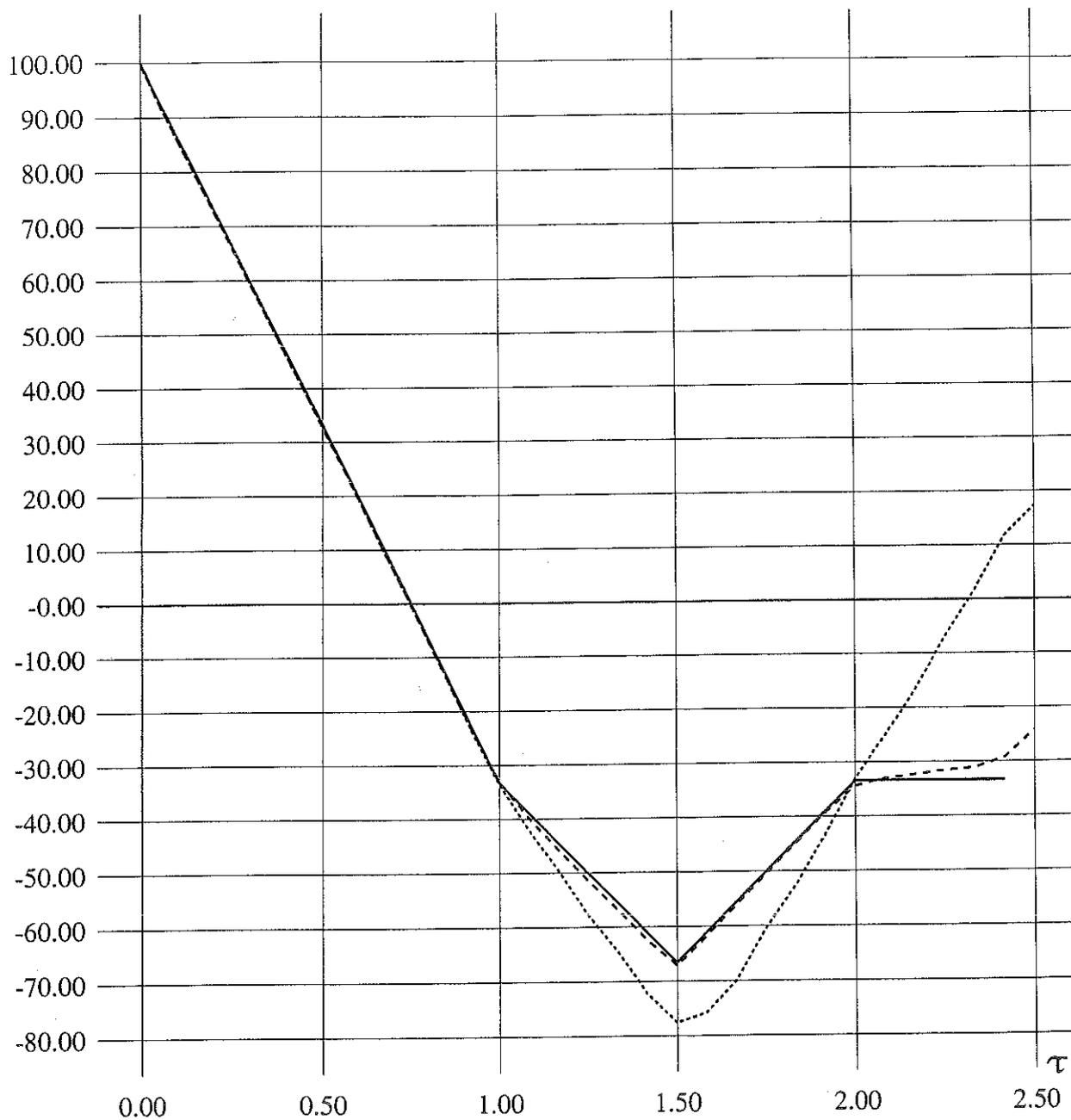


Figura 13.  $u(\frac{1}{2}, \tau)$  vs.  $\tau \in [0, 2.5]$ .

## 5.5 Confronto tra una trave elastica lineare e una trave elastica non lineare

E' stata presa in esame una trave incastrata con geometria identica a quella dell'esempio 5.2, soggetta ad una forza assiale  $N$  e ad un carico verticale  $P_0$ , in presenza di viscosità. Sono state condotte due analisi dinamiche con il codice NOSA usando la stessa discretizzazione dell'esempio 5.2; nella prima analisi la trave è costituita da un materiale elastico lineare, nella seconda da un materiale elastico non resistente a trazione. La figura 14 riporta l'andamento dello spostamento trasversale  $v(L, t)$  della estremità libera della trave, al variare di  $t$  nell'intervallo  $[0, 0.48]$ ; la linea continua è relativa alla trave elastica lineare, quella tratteggiata corrisponde alla trave in muratura. I valori dei parametri sono

$$N = 10000 \text{ N}, \quad P_0 = 32 \text{ N}, \quad (155)$$

$$a_0 = 0. \text{ s}^{-1}, \quad a_1 = 5. \cdot 10^{-3} \text{ s}. \quad (156)$$

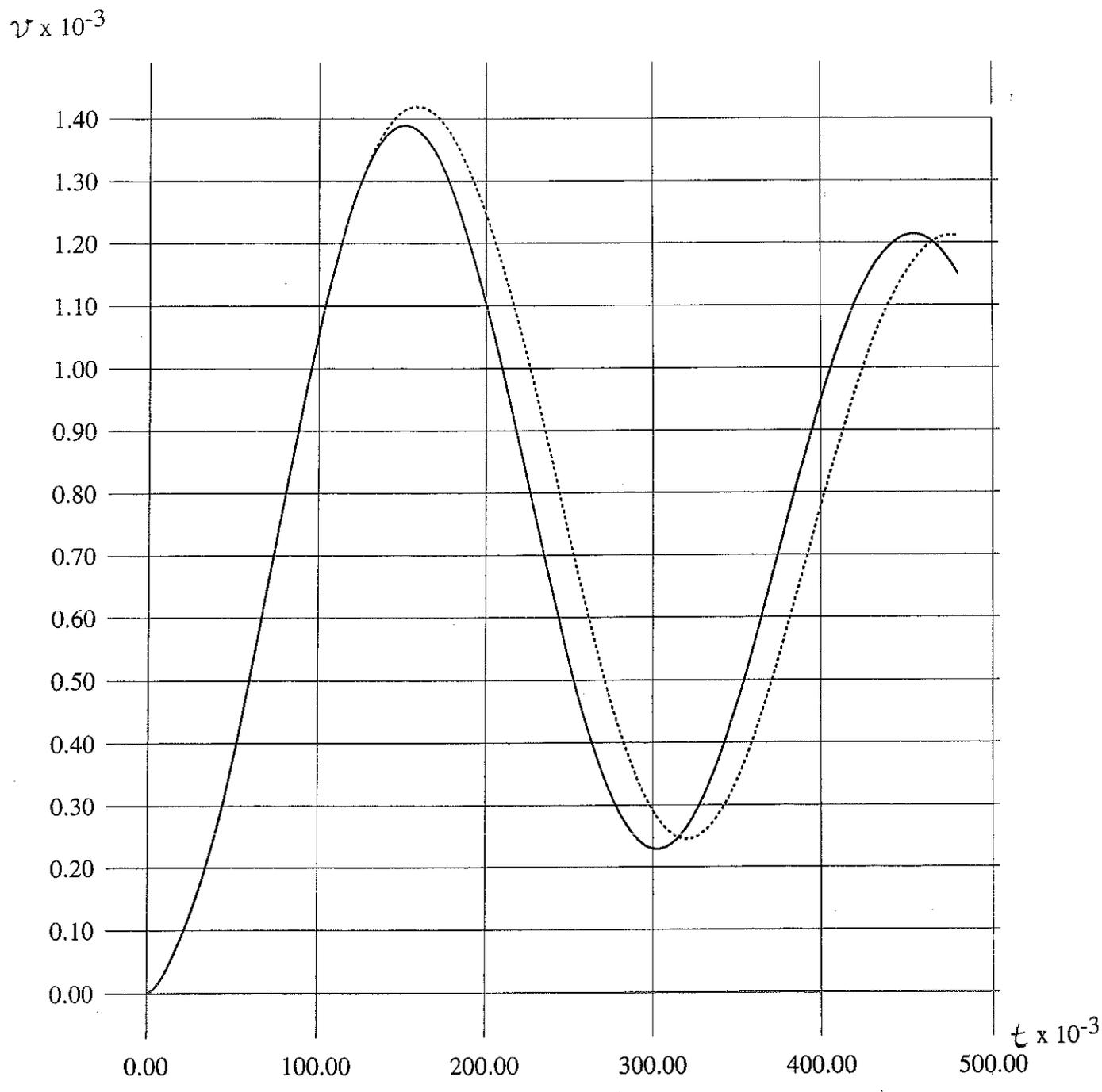


Figura 14. Spostamento trasversale  $v(L, t)$  al variare di  $t \in [0, 0.48]$ .

## 5.6 Arco circolare su piedritti soggetto al peso proprio e ad una accelerazione alle imposte

È stato studiato il comportamento di un arco di freccia  $L$  su piedritti di altezza  $H$  e luce  $L'$ . Si fa l'ipotesi che le basi dei piedritti siano incastrate e soggette ad un'accelerazione variabile nel tempo e che alle parti esterne dei piedritti siano applicate due barre di acciaio, per simulare la presenza di arcate adiacenti. Sono state condotte due analisi dinamiche, la prima supponendo l'arco costituito da un materiale elastico lineare, la seconda considerando l'arco costituito un materiale elastico non resistente a trazione; in entrambi i casi si è considerata la presenza di uno smorzamento viscoso. L'arco è stato discretizzato con 260 elementi di tipo plane stress a otto nodi e nove punti di Gauss (figura 15). Le analisi sono state condotte con i seguenti valori dei parametri,

$$L = 10 \text{ m}, \quad H = 6 \text{ m}, \quad L' = 6 \text{ m}.$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad \rho = 78000 \text{ N/m}^3, \quad \nu = 0.3,$$

per le barre e

$$E = 5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2, \quad \rho = 20000 \text{ N/m}^3, \quad \nu = 0,$$

per la muratura.

Sull'arco, oltre al peso proprio, grava una pressione di  $10000 \text{ N/m}^2$ . Per quanto riguarda l'attrito si è posto

$$\alpha_0 = 0 \text{ s}^{-1}, \quad \alpha_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s},$$

inoltre l'accelerazione alla base dei piedritti vale

$$a(t) = \begin{cases} a_0 \frac{1}{4} \left( \frac{t}{t_0} \right)^2 \sin \omega t & 0 \leq t \leq 2, \\ a_0 \sin \omega t & 2 \leq t \leq 8, \\ a_0 \frac{1}{4} \left( \frac{t-t_1}{t_0} \right)^2 \sin \omega t & 8 \leq t \leq t_1, \\ 0 & t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases}$$

con

$$a_0 = 1 \text{ m/s}^2, \quad t_0 = 2 \text{ s}, \quad t_1 = 10 \text{ s}, \quad t_2 = 15 \text{ s}, \quad \omega = 4\pi \text{ s}^{-1}.$$

La figura 16 mostra l'andamento dello spostamento orizzontale  $u(t)$  del punto P dell'intradosso al variare di  $t \in [0, 15]$ ; la linea continua corrisponde al caso elastico lineare e quella tratteggiata al materiale elastico non resistente a trazione.

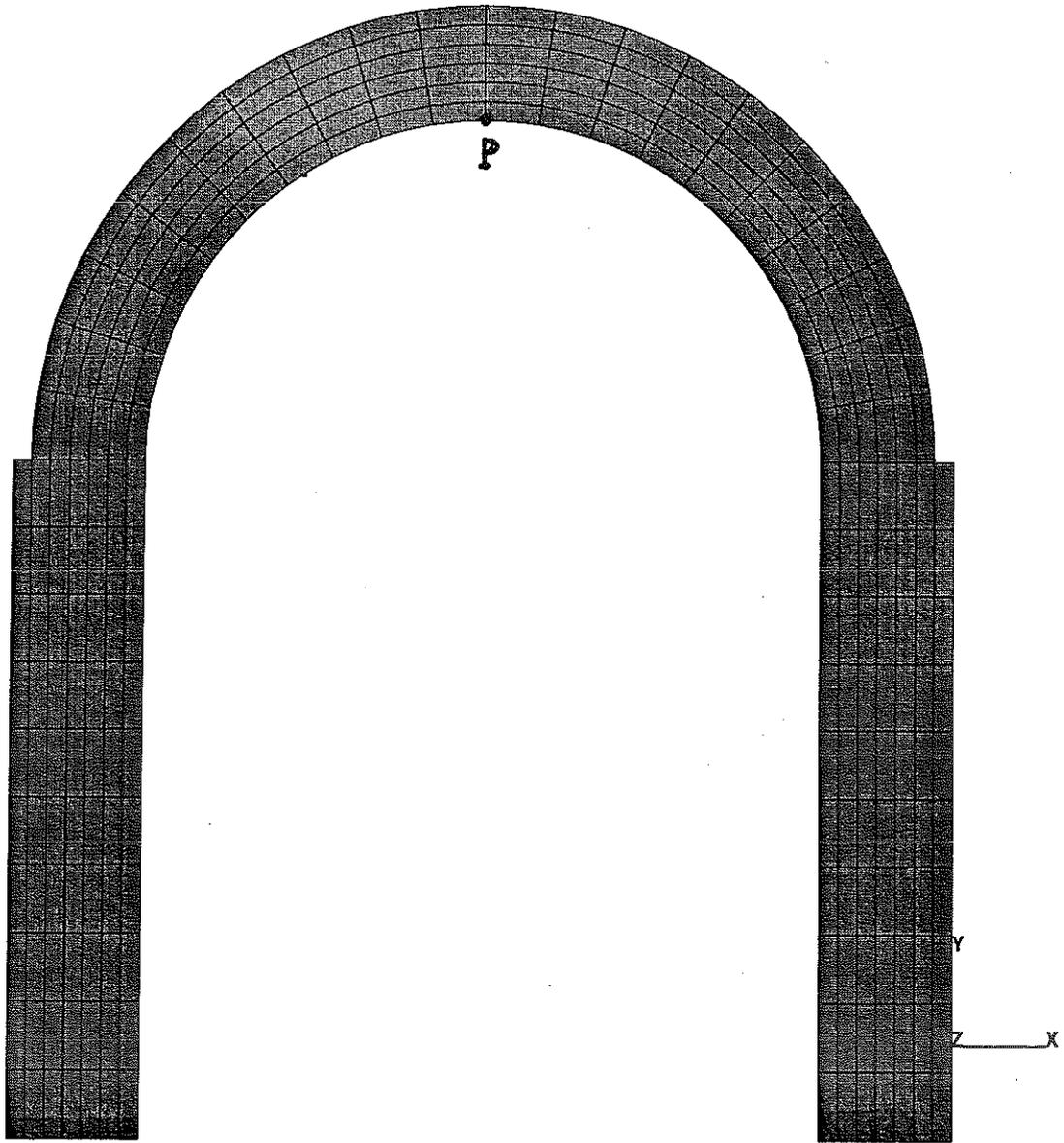


Figura 15. Arco su piedritti.

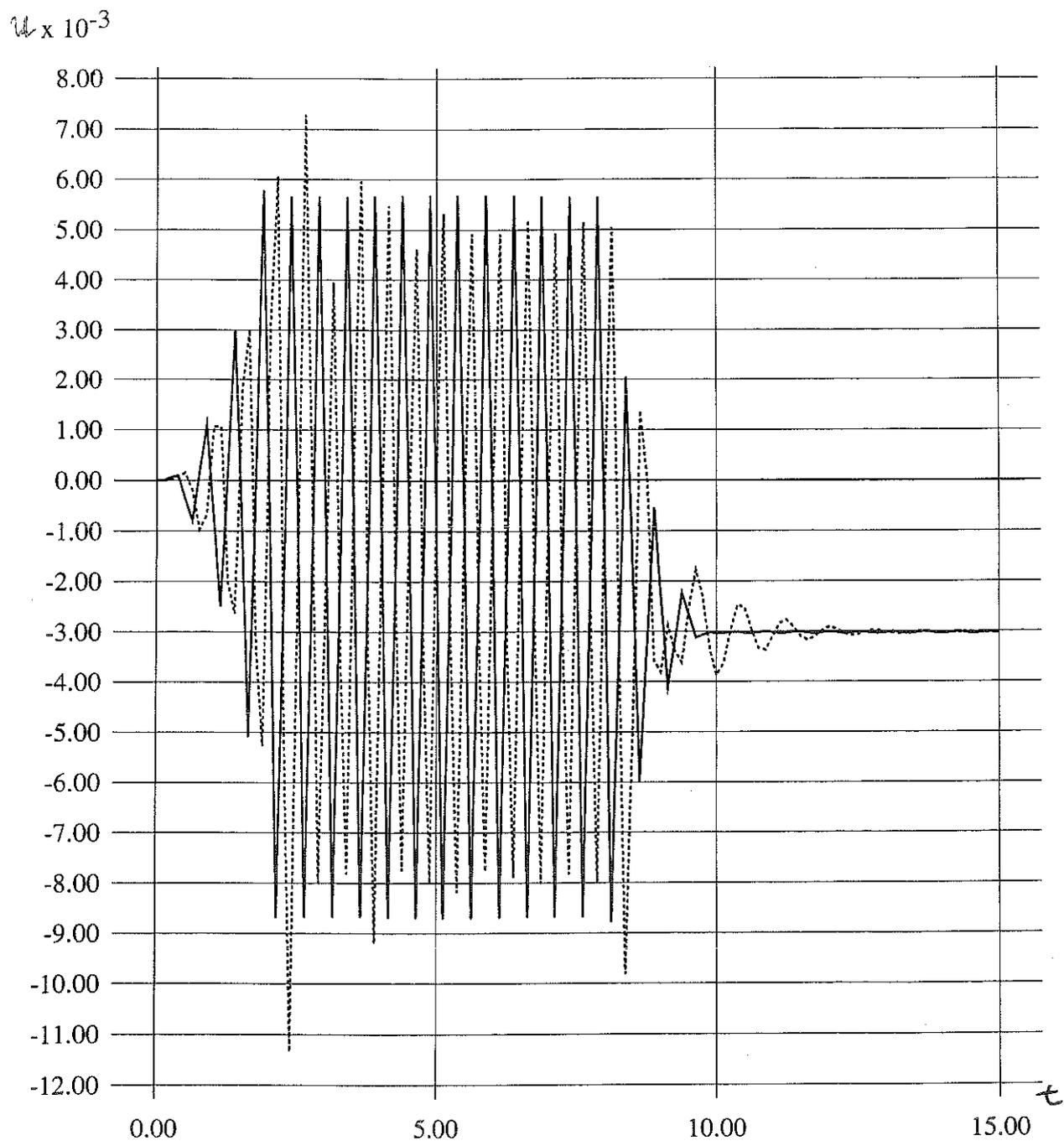


Figura 16. Spostamento orizzontale  $u(t)$  del punto P al variare di  $t \in [0, 15]$ .

## 5.7 L'arsenale medico di Pisa

Nel 1996 è stato condotto su incarico dell'università di Pisa uno studio dell'arsenale medico. Obiettivo dello studio è stato quello di modellare alcuni interventi di miglioramento sismico per valutarne l'efficacia e consentire la scelta più adatta a garantire la sicurezza e la funzionalità dell'edificio, che in prospettiva dovrà ospitare alcune aule dell'università.

Nel XVI secolo i Medici decisero che l'arsenale repubblicano ed il relativo bacino erano inadatti a soddisfare i nuovi programmi che miravano alla realizzazione di un naviglio di grandi dimensioni; decisero pertanto di costruire un nuovo arsenale. La scelta dell'ubicazione cadde sull'area prospiciente l'Arno compresa all'incirca fra l'imbocco del ponte della Cittadella, la chiesa di S. Agnese e quella di S. Vito. Originariamente la costruzione era articolata in otto navate. La struttura era abbastanza semplice: archi su pilastri, tetto a capanna con orditura lignea ridotta ai soli arcarecci e travicelli, copertura in cotto con embrici e coppi secondo la tradizione toscana. Gli archi non avevano catene che avrebbero ostacolato in altezza la costruzione delle galere: a contenere la spinta degli archi trasversali contribuivano da un lato la navata appoggiata a San Vito, dall'altro una piccola navata aggiuntiva posta a guisa di sprone. Il complesso, dismesso l'uso originario subì perdite e trasformazioni. Nella seconda metà del XVIII secolo vennero eseguiti i tamponamenti esterni degli archi e venne rialzato il piano di calpestio con un lastricato. In questa occasione furono demolite sette campate in aderenza a S. Vito per realizzare un nuovo cortile e rialzati i tetti delle ultime tre navate ad ovest per portarli alla stessa quota degli altri, aumentando i muri al di sopra dell'estradosso degli archi. Danni ancora maggiori avvennero nell'ultima guerra con la perdita della navata ad ovest, compreso il corpo che la affiancava a guisa di sprone.

La struttura, che appare anche oggi di ottimo pregio costruttivo, è costituita da una maglia di pilastri sormontati da archi a tutto sesto (figura 17). Attualmente la struttura è priva di ogni contrafforte in grado di sostenere la spinta degli archi; sul lato est dell'edificio si è cercato di rimediare parzialmente a questa situazione inactenando gli archi dell'ultima navata.

In [13] e [14] sono stati determinati gli effetti di un sisma diretto parallelamente ai prospetti principali dell'edificio. Allo scopo è stata analizzata la struttura nella situazione attuale, con l'applicazione di strutture di ritegno ai lati est ed ovest dell'edificio e con l'applicazione sia di strutture di ritegno che di catene. Poiché quando è stato condotto questo studio non era disponibile un codice di calcolo per l'analisi dinamica di strutture in muratura, l'azione del sisma è simulata da un carico di massa orizzontale, costante con la quota.

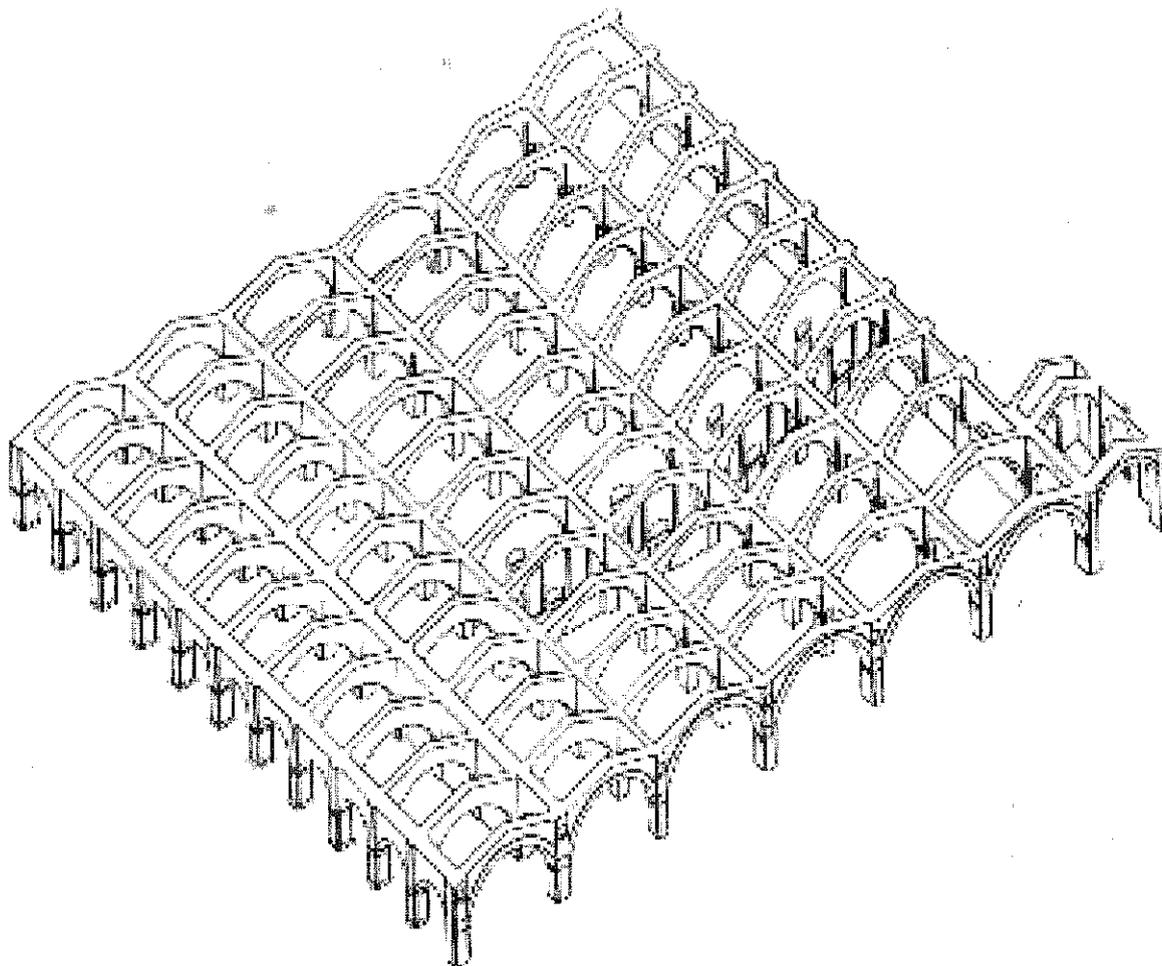


Figura 17. Serie di archi che costituiscono la struttura attuale dell'arsenale.

La disponibilità del codice di calcolo sviluppato nel corso del progetto "Analisi dinamica di antiche costruzioni in muratura" ha quindi consentito di condurre un'analisi dinamica di un particolare costruttivo. Precisamente si è considerato un elemento di una serie di archi a tutto sesto su pilastri, con le seguenti caratteristiche geometriche:

altezza dei pilastri	5 m,
diametro dell'arco	5 m,
lunghezza dei pilastri	1 m,
spessore della struttura	1 m,
altezza totale dell'arcata	10 m.

Per la muratura si è assunto

modulo di Young	$5 \cdot 10^9$ Pa,
rapporto di Poisson	0,
densità di massa	$2000 \text{ kg/m}^3$ .

In figura 18 è mostrato il modello a elementi finiti costituito da 196 elementi di tipo plane-stress a 8 nodi, per complessivi 661 nodi. I pilastri sono incastrati alla base, la struttura è soggetta al peso proprio e ad un carico verticale agente sulla sommità della struttura di  $20000 \text{ N/m}$ . Dopo un primo incremento durante il quale la struttura raggiunge l'equilibrio statico, si esegue l'analisi dinamica vera e propria per simulare la risposta ad una accelerazione orizzontale, imposta alla base dei pilastri,

$$a(t) = A(t) \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \quad (157)$$

dove

$$A(t) = \begin{cases} A_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 & 0 \leq t \leq t_0, \\ A_0 & t_0 \leq t \leq t_1, \\ A_0 \left(\frac{t-t_2}{t_0}\right)^2 & t_1 \leq t \leq t_2, \\ 0 & t_2 \leq t \leq t_3, \end{cases} \quad (158)$$

con

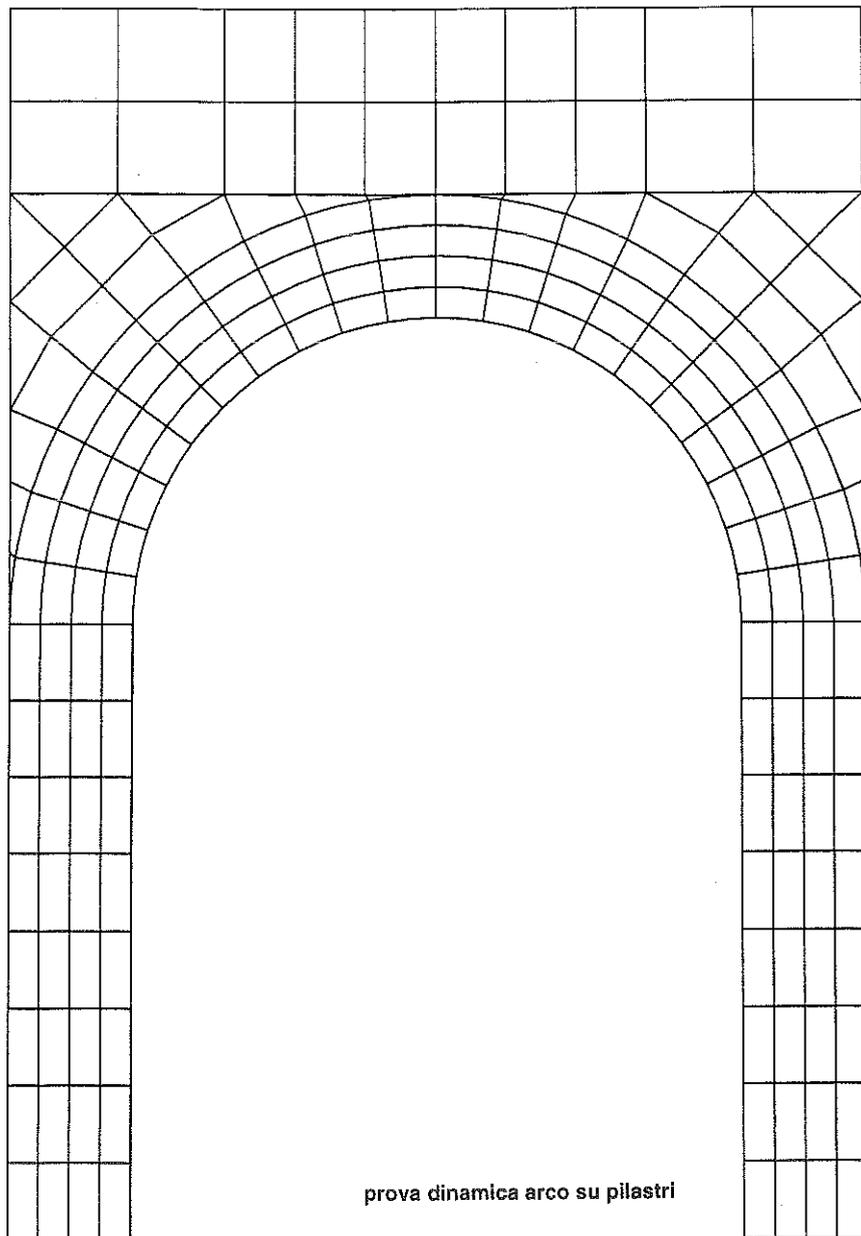
$$A_0 = 1 \text{ m/s}^2, \quad T = 0.5 \text{ s}, \quad (159)$$

$$t_0 = 2 \text{ s}, \quad t_1 = 8 \text{ s}, \quad t_2 = 10 \text{ s}, \quad t_3 = 15 \text{ s}. \quad (160)$$

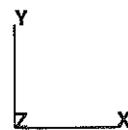
Per simulare la presenza di una serie di arcate a sinistra e a destra dell'arco, si è imposta un'ulteriore condizione di vincolo per cui i nodi sui bordi laterali nella parte superiore della struttura sono costretti ad avere spostamenti orizzontali uguali. L'analisi dinamica è stata eseguita in 1200 incrementi di carico.

Nelle figure 19, 20 e 21 è mostrato rispettivamente l'andamento dello spostamento orizzontale e delle due componenti dell'accelerazione per due nodi della griglia, uno alla base dei pilastri (nodo 9) e uno in chiave (nodo 451). Si può osservare che l'accelerazione in chiave (e quindi la forza di inerzia) subisce delle brusche variazioni di notevole entità, si raggiungono infatti punte di  $5 \text{ m/s}^2$ . A scopo di confronto si è eseguita un'analisi analoga alla precedente, supponendo però il materiale elastico lineare. Le figure 22 e 23 mostrano l'andamento dello spostamento e della accelerazione orizzontali dei nodi 9 e 451. Le differenze tra queste figure e le figure 19 e 20 sono notevoli, soprattutto per quanto riguarda l'accelerazione. Precisamente, nel caso elastico lineare si riscontra solo una leggera amplificazione dell'ampiezza dell'accelerazione in chiave, mentre la fase della forzante è mantenuta perfettamente.

Inc : 1201  
Time : 1.500e+001



prova dinamica arco su pilastri



1

Figura 18. Arco su piedritti.

Displacement x (x.01)

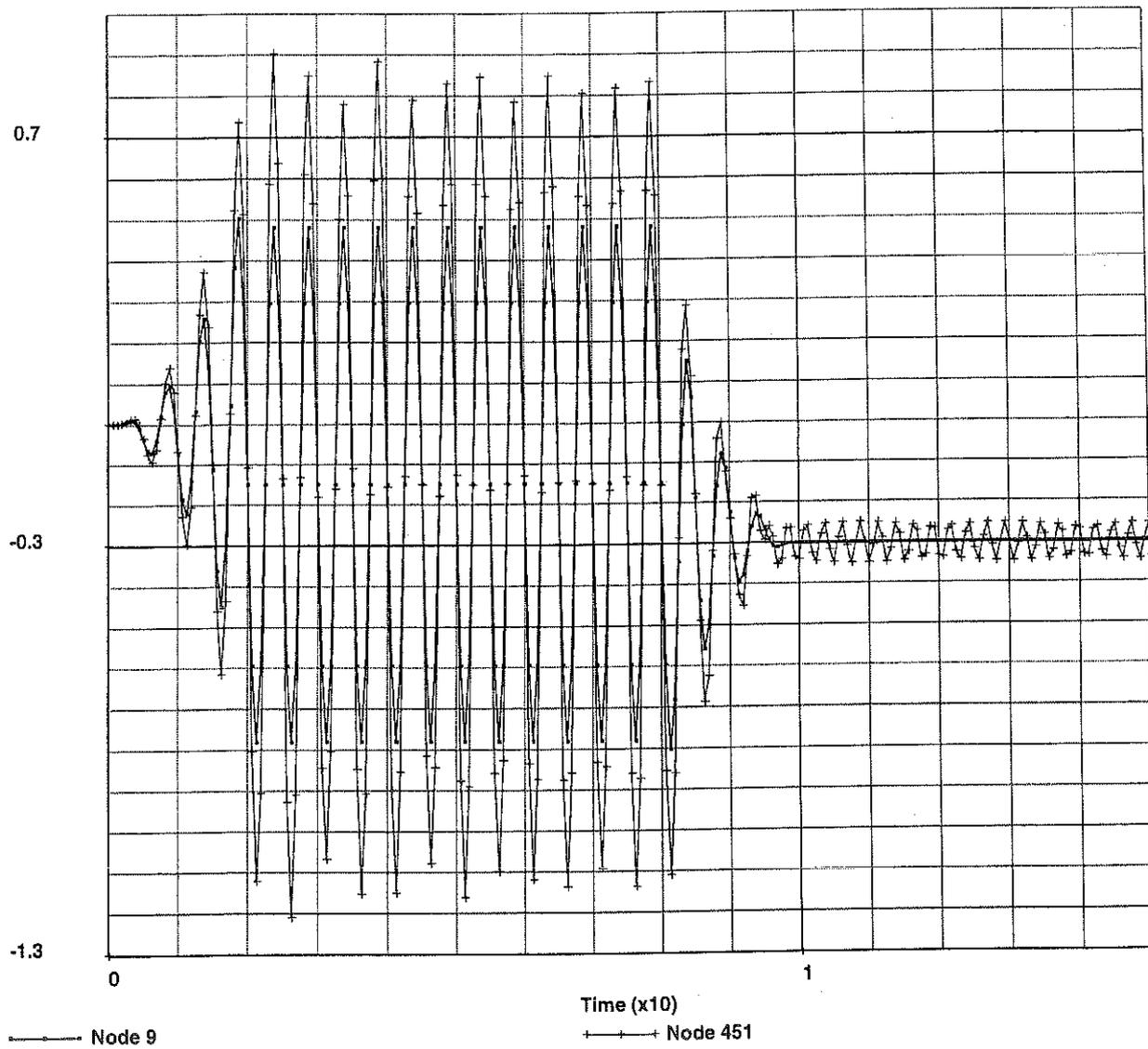


Figura 19. Spostamento orizzontale di un nodo alla base dei pilastri e del nodo in chiave.

Acceleration x (x10)

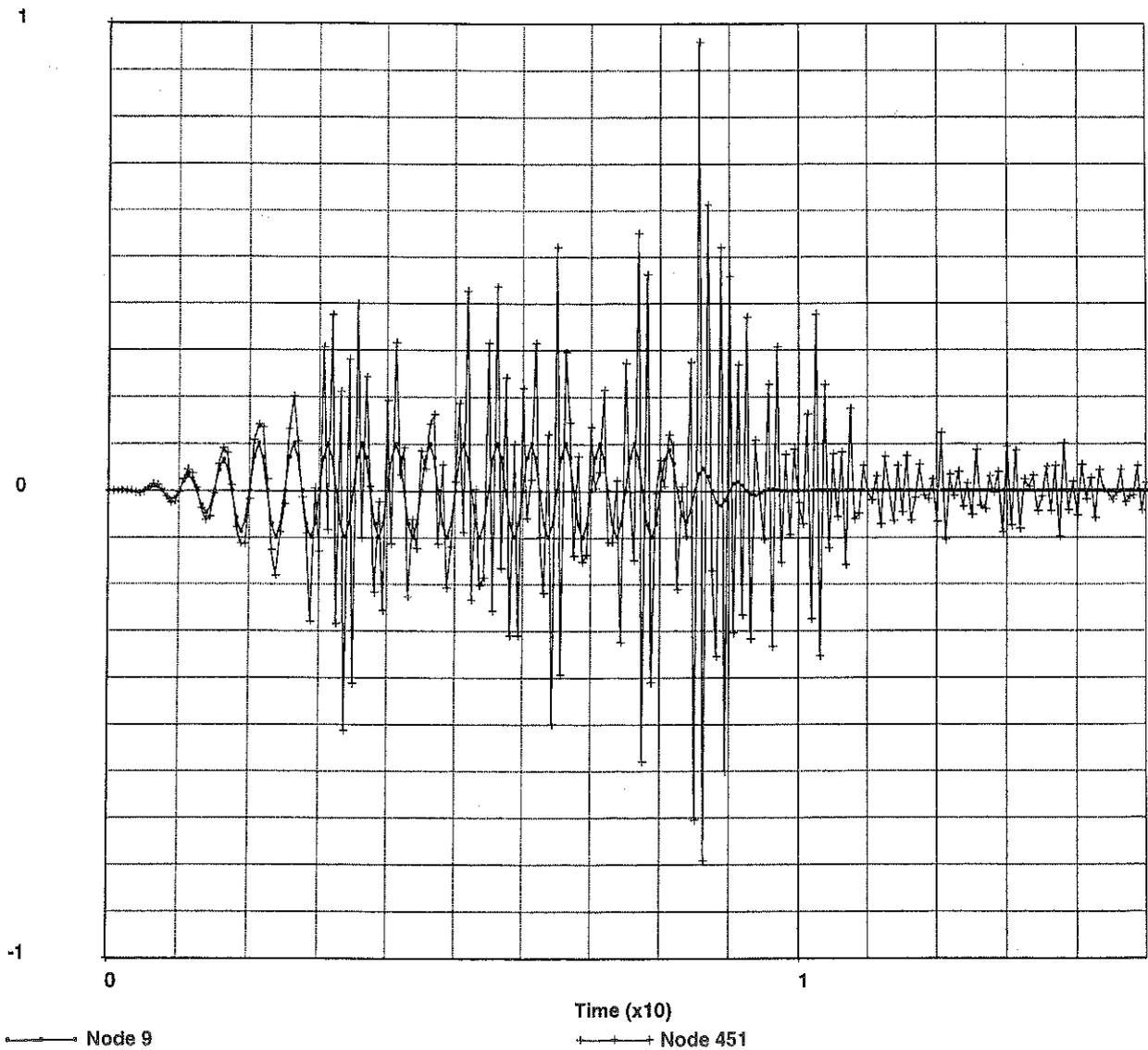


Figura 20. Accelerazione orizzontale di un nodo alla base dei pilastri e del nodo in chiave.

Acceleration y (x10)

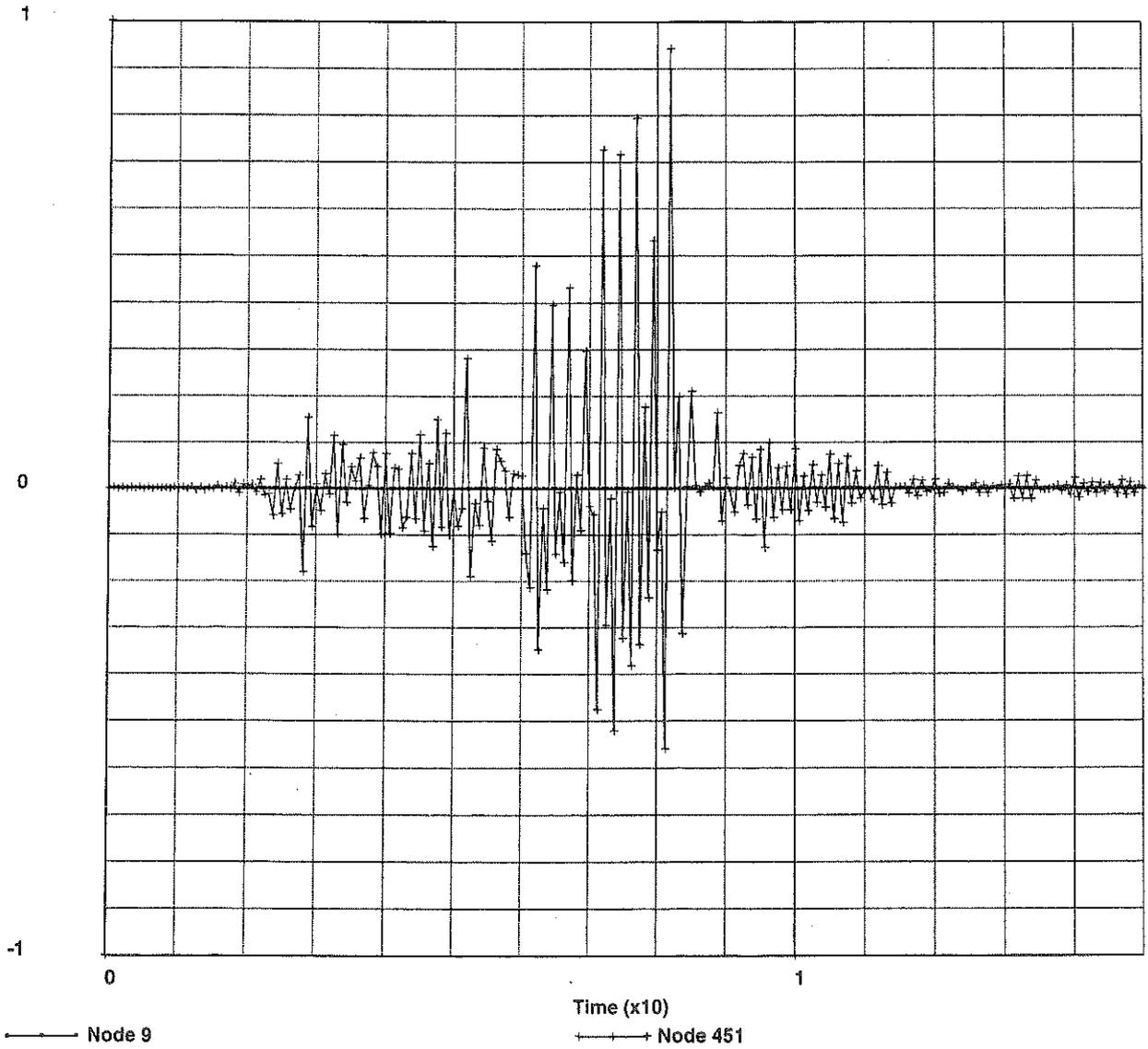


Figura 21. Accelerazione verticale di un nodo alla base dei pilastri e del nodo in chiave.

Displacement x (x.01)

prova dinamica arco elastico su pilastri

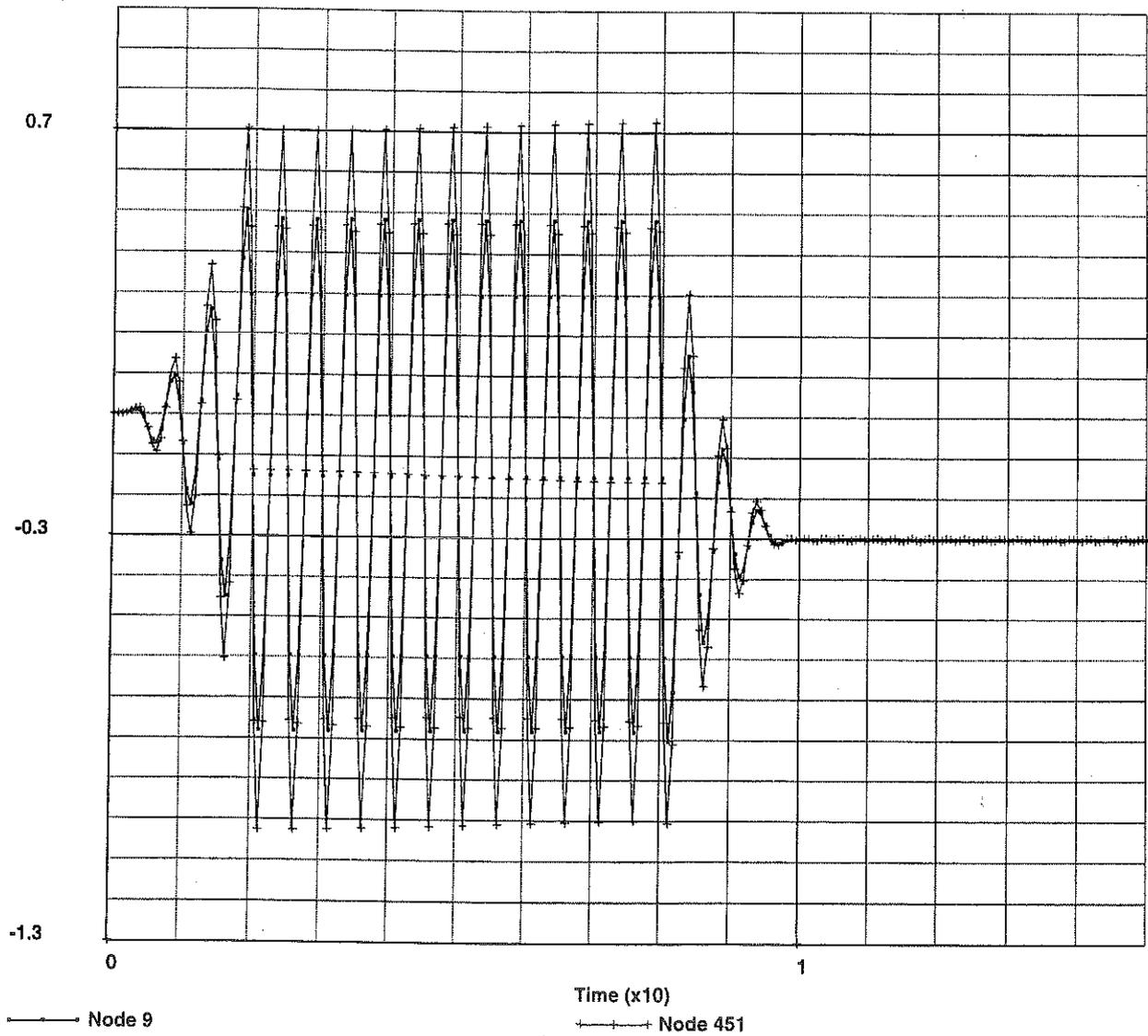


Figura 22. Spostamento orizzontale dei nodi 9 e 451, caso elastico lineare.

Acceleration x (x10)

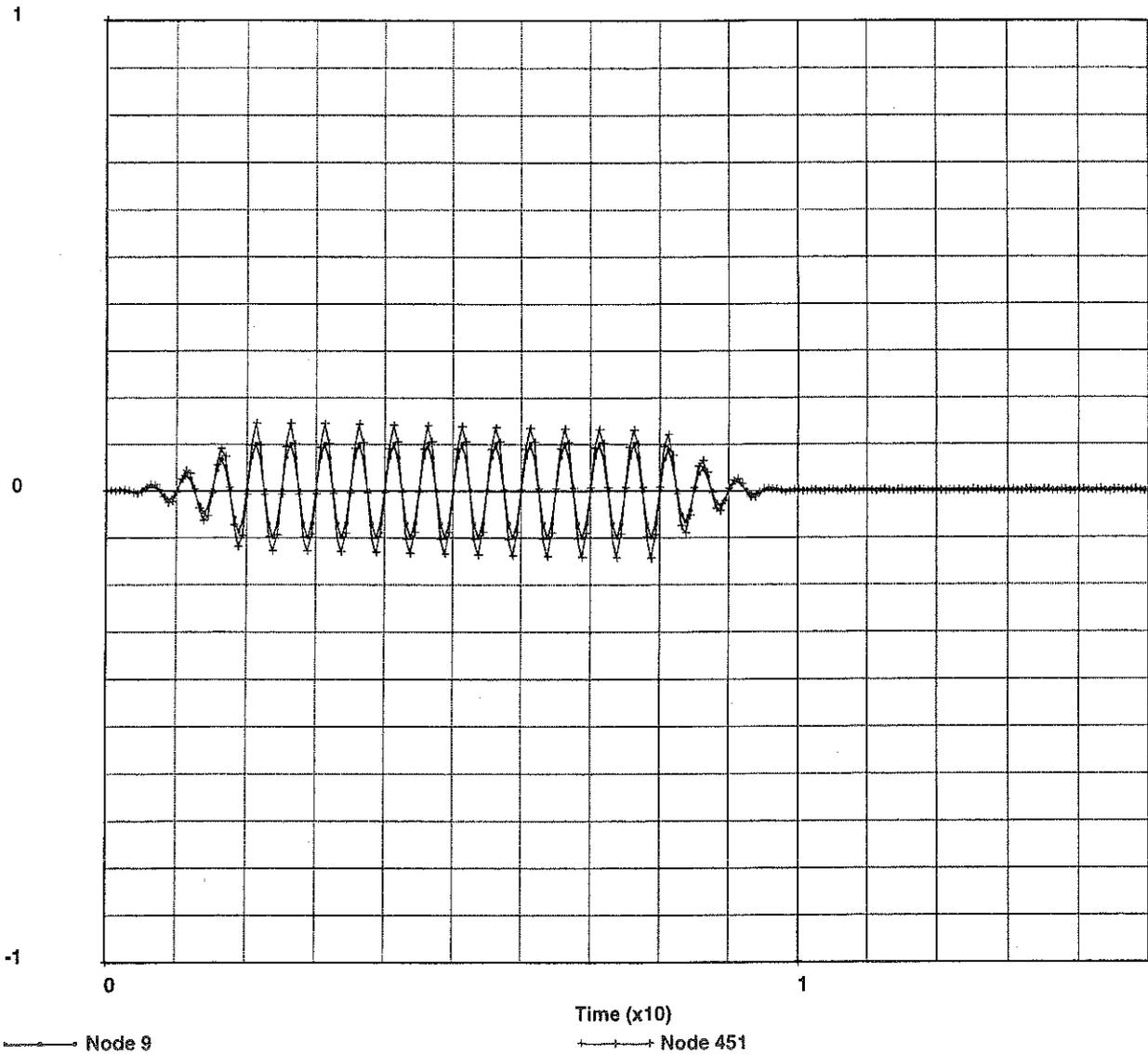


Figura 23. Accelerazione orizzontale dei nodi 9 e 451, caso elastico lineare.

## References

- [1] Del Piero G., "Constitutive equation and compatibility of the external loads for linear elastic masonry-like materials", *Meccanica* **24**, 150-162 (1989).
- [2] Lucchesi M., Padovani C., Pagni A., "A numerical method for solving equilibrium problems of masonry-like solids", *Meccanica* **24**, 175-193 (1994).
- [3] Lucchesi M., Padovani C., Pasquinelli G., "On the numerical solution of equilibrium problems for elastic solids with bounded tensile strength", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **127**, 37-56 (1995).
- [4] Lucchesi M., Padovani C., Zani N., "Masonry-like materials with bounded compressive strength", *Int. J. Solids and Structures* **33**, 1961-1994 (1996).
- [5] Padovani C., "On a class of non-linear elastic materials". in corso di pubblicazione su *J. Solids and Structures*.
- [6] Gurtin M. E., *The linear theory of elasticity*, Encyclopedia of Physics Vol. VIa/2 Mechanics of Solids II 1-294 (1972).
- [7] Casarosa C., Lucchesi M., Padovani C., Pagni A., Pasquinelli G., "Longitudinal vibrations of masonry beams", *Proceedings of the Fourth International Symposium on Computer Methods in Structural Masonry*, 3-5 September 1997, Florence, Italy.
- [8] Silhavy M., Private Communication (1997).
- [9] Bathe JK. J., Wilson WE. L., Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall (1976).
- [10] Padovani C., Pagni A., Pasquinelli G., Gli elementi guscio nel codice agli elementi finiti NOSA, Rapporto CNUCE-B4-1998-012 (1998).
- [11] Clough R. W., Penzien J., *Dynamics of structures* McGraw-Hill (1975).
- [12] Bennati S., Padovani C., "Some non-linear elastic solutions for masonry solids", *Mech. Struct. & Mach.* **25**(2), 243-266 (1997).
- [13] Lucchesi M., Zani N., "Analisi sismica di tipo statico dell'Arsenale Mediceo situato in Pisa, lungarno Simonelli". Relazione tecnica Consorzio Pisa Ricerche, 1996.
- [14] Cecati F., Lucchesi M., Padovani C., Pagni A., Zani N., "Consolidamento e adeguamento antisismico: un modello di calcolo per orientare il progetto". XIV Convegno Scienza e Beni Culturali, Bressanone, 30 giugno-3 luglio, 1998.