

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
DIPARTIMENTO DI COSTRUZIONI

**XVIII CICLO DEL DOTTORATO DI RICERCA IN
MATERIALI E STRUTTURE PER L'ARCHITETTURA**

TESI DI DOTTORATO

**METODI PERTURBATIVI PER LO STUDIO DELLE
VIBRAZIONI FLESSIONALI DI TRAVI COSTITUITE DA
MATERIALE NON RESISTENTE A TRAZIONE**

DOTTORANDO: Maria Girardi

TUTOR: Prof. Massimiliano Lucchesi

COORDINATORE: Prof. Guido Sarà

Firenze, Dicembre 2005

A mio padre

Questo lavoro è stato realizzato con L^AT_EX.
Si ringrazia Massimiliano Dominici per la sua preziosa consulenza.

Indice

Introduzione	3
1 La dinamica delle strutture in muratura: evidenze sperimentali e modelli teorici	5
1.1 Il danneggiamento delle strutture in muratura a seguito di eventi sismici	5
1.2 Differenti approcci nella modellazione di un edificio in muratura	8
1.2.1 I modelli continui	9
1.2.2 I modelli a blocchi	10
1.2.3 I modelli funzionali o a macroelementi	11
1.3 Un approccio analitico al problema delle vibrazioni trasversali di una trave di lunghezza finita costituita da materiale non resistente a trazione	14
1.3.1 L'equazione costitutiva	15
1.3.2 Le equazioni del moto	18
2 Metodi analitici approssimati per lo studio di problemi di dinamica nonlineare: lo stato dell'arte	23
2.1 Alcuni fenomeni caratteristici del comportamento nonlineare	24
2.2 Metodi perturbativi per lo studio di problemi di dinamica nonlineare	29
2.2.1 Il metodo delle scale multiple	30
2.2.2 I metodi di averaging	33
2.2.3 I sistemi continui; la trave	36
3 Studio delle vibrazioni flessionali di una trave di lunghezza finita caratterizzata da un'equazione costitutiva di tipo cubico	39
3.1 La parabola cubica: un'espressione approssimata del legame $M - \chi$ per una sezione rettangolare costituita da materiale non resistente a trazione	39
3.2 Scrittura ed adimensionalizzazione delle equazioni del moto .	41
3.3 La trave semplicemente appoggiata: soluzioni approssimate ottenute con il metodo delle scale multiple	42
3.3.1 Oscillazioni libere non smorzate	43

Indice

3.3.2	Oscillazioni libere smorzate	61
3.3.3	Oscillazioni forzate in risonanza primaria	65
3.4	La mensola: soluzioni approssimate ottenute con il metodo delle scale multiple	72
3.4.1	Le equazioni di modulazione	73
3.4.2	Oscillazioni libere non smorzate	75
3.4.3	Oscillazioni libere smorzate	76
3.4.4	Oscillazioni forzate	76
3.5	Il metodo della Lagrangiana media	77
3.5.1	La trave appoggiata in risonanza primaria.	78
3.5.2	La mensola: risonanza primaria.	83
4	Studio delle vibrazioni flessionali di una trave di lunghezza finita costituita da materiale non resistente a trazione	87
4.1	La trave semplicemente appoggiata	89
4.1.1	Oscillazioni libere non smorzate	89
4.1.2	Oscillazioni libere smorzate	104
4.1.3	Oscillazioni forzate in risonanza primaria	109
4.2	La mensola	117
4.2.1	Oscillazioni libere non smorzate	117
4.2.2	Oscillazioni libere smorzate	132
4.2.3	Oscillazioni forzate in risonanza primaria	137
4.3	L'equazione per il materiale non resistente a trazione e l'equazione cubica a confronto	142
4.3.1	La trave semplicemente appoggiata	144
4.3.2	La mensola	145
5	Applicazioni	151
5.1	Oscillazioni forzate	152
5.1.1	Esempio 1	153
5.1.2	Esempio 2	154
5.1.3	Esempio 3	155
5.2	Oscillazioni libere	161
5.2.1	Esempio 4	161
6	Considerazioni conclusive	165
	Bibliografia	169

Introduzione

Lo studio delle strutture di muratura soggette ad azioni dinamiche rappresenta un problema di interesse teorico ed applicativo sempre crescente, in particolar modo in Italia.

Il comportamento dinamico di questi manufatti risulta influenzato da molteplici parametri, come le caratteristiche geometriche, la qualità dei materiali, la tipologia costruttiva ed il tipo stesso di eccitazione.

Tuttavia, una caratteristica peculiare della muratura è rappresentata dalla bassa, e spesso, soprattutto per le costruzioni più antiche, trascurabile resistenza che essa offre alle sollecitazioni di trazione, in direzione ortogonale ai giunti di malta.

Tale caratteristica influenza in modo sostanziale il comportamento dinamico delle “travi” di muratura, ovvero di elementi in cui lo sviluppo longitudinale prevale su quello trasversale, come i pilastri, le torri isolate ed i pannelli di muratura vibranti fuori dal piano.

A questi elementi, che potremmo definire “monodimensionali”, si rivolge il seguente lavoro, che si propone di studiarne le vibrazioni flessionali per via analitica, impiegando alcuni metodi perturbativi.

Lo studio per via analitica dell’equilibrio di travi costituite da materiale non resistente a trazione è stato oggetto di numerosi lavori precedenti, fra cui si ricordano [8] sulla stabilità dell’equilibrio dei pilastri murari e [30] sulla statica degli archi di muratura. In [32], invece, le vibrazioni flessionali di questi manufatti sono state studiate per via numerica con un codice di calcolo agli elementi finiti scritto appositamente.

Questo lavoro è condotto utilizzando la nota equazione costitutiva per elementi monodimensionali costituiti da materiale non resistente a trazione e con infinita resistenza a compressione, che lega le caratteristiche della sollecitazione forza normale e momento flettente agenti nella sezione alla deformazione assiale ed al cambiamento di curvatura [8, 30, 32, 41].

Sulla base di tale equazione, elastica nonlineare, è stato impostato il problema dinamico, e, per tener conto delle capacità dissipative della struttura è stato utilizzato un opportuno coefficiente di smorzamento viscoso.

In particolare, sono state studiate le oscillazioni, libere e forzate in risonanza primaria, di una trave con asse verticale e sezione rettangolare, sollecitata da uno sforzo assiale centrato e costante lungo l’asse, soggetta a due differenti condizioni di vincolo. Nel primo caso si mantengono gli es-

Introduzione

tremi della trave liberi di ruotare nel piano di inflessione, impedendone gli spostamenti trasversali e, alla base, quello longitudinale; nel secondo, invece, all'estremo inferiore della trave sono impediti sia gli spostamenti sia le rotazioni, mentre l'estremo superiore è libero.

La tesi si articola in sei capitoli. I primi due sono dedicati allo stato dell'arte. In particolare, nel capitolo 1 si descrivono i risultati salienti disponibili in letteratura sullo studio della dinamica delle murature e si introduce l'equazione costitutiva utilizzata nella trattazione successiva; nel capitolo 2, invece, si illustrano alcuni concetti generali alla base dei metodi perturbativi, con particolare riferimento alle tecniche più comunemente impiegate nello studio dei problemi di dinamica nonlineare.

Nel terzo capitolo si propone l'impiego di un'equazione costitutiva descritta da un polinomio di terzo grado, che approssima, sia pure soltanto in un intorno della curvatura limite elastica, la relazione più complessa descritta nel capitolo 1. Tale equazione semplificata inserisce il problema dinamico in un classico contesto di nonlinearietà di tipo "cubico", permettendo di ricavare numerose soluzioni e di impiegare metodi perturbativi come quello delle scale multiple.

Nel quarto capitolo, invece, viene proposto un approccio di tipo variazionale. Precisamente, dopo aver determinato la funzione Lagrangiana del sistema, si utilizzano opportune tecniche di "averaging" che consentono di descrivere il comportamento dinamico della trave in funzione di alcuni parametri, di cui vengono ricavate le leggi di variazione nel tempo.

Il quinto capitolo è dedicato al confronto fra alcune soluzioni ottenute analiticamente e le corrispondenti ottenute per via numerica, impiegando il codice di calcolo descritto in [32, 41].

Nel sesto capitolo si riassumono i risultati ottenuti e si espongono alcune considerazioni conclusive.

È opportuno sottolineare che la maggior parte degli studi attualmente disponibili in letteratura sulla dinamica delle murature è condotta con approcci numerici e modelli a massa concentrata.

La tesi, invece, costituisce un esempio di applicazione delle tecniche analitiche perturbative alla dinamica di strutture costituite da materiale non resistente a trazione. Questo diverso approccio consente di valutare, sia pure sotto ipotesi fortemente semplificative, gli effetti dinamici indotti dal propagarsi delle fessurazioni nelle singole sezioni e lungo l'asse e fornisce informazioni qualitative e quantitative in maniera sintetica ed efficace.

I risultati che sono stati ottenuti sono in accordo con quanto già noto in letteratura sulla risposta dinamica di questo tipo di strutture.

Capitolo 1

La dinamica delle strutture in muratura: evidenze sperimentali e modelli teorici

1.1 Il danneggiamento delle strutture in muratura a seguito di eventi sismici

Il susseguirsi di eventi sismici che aggrediscono il patrimonio artistico italiano e mondiale sta donando sempre maggior attualità allo studio del comportamento degli edifici in muratura soggetti ad azioni dinamiche. Dopo i primi studi in Italia alla fine degli anni Settanta, a seguito dei disastrosi terremoti del Friuli e dell'Irpinia, numerosi e qualificati sono stati i contributi a questo filone di ricerca, con un interesse sempre crescente anche all'estero.

Tuttavia, non è facile ottenere risultati di validità generale: la grande varietà di tipologie edilizie e tecniche costruttive che caratterizza gli edifici in muratura corrisponde ad una varietà altrettanto numerosa di comportamenti statici. Questo problema, già emerso nello studio delle strutture murarie soggette a carichi permanenti, si accentua ulteriormente in campo dinamico: la risposta non lineare di un edificio di muratura soggetto ad azioni dinamiche risulta influenzata in maniera sostanziale dalle caratteristiche geometriche, dalla tipologia costruttiva, dai carichi verticali agenti e dal tipo stesso di eccitazione. A questa forte indeterminazione si aggiunge la difficoltà nel riprodurre una tale varietà di comportamenti in laboratorio, essendo troppo marcati i fenomeni di scala per consentire lo studio di modelli sufficientemente accurati.

Tuttavia, sono state condotte alcune importanti campagne sperimentali [25, 26], effettuate prevalentemente su pannelli di muratura in scala reale, che, affiancate all'osservazione diretta dei danni indotti dal terremoto, consentono di formulare alcune considerazioni generali, brevemente esposte nel seguito.

- 1) Un pannello di muratura sollecitato da azioni cicliche **nel piano** presenta tre modalità principali di rottura:
 - 1a) *per pressoflessione o ribaltamento* (“*bending*”). Si tratta nel primo caso di una rottura per schiacciamento del materiale, nel secondo

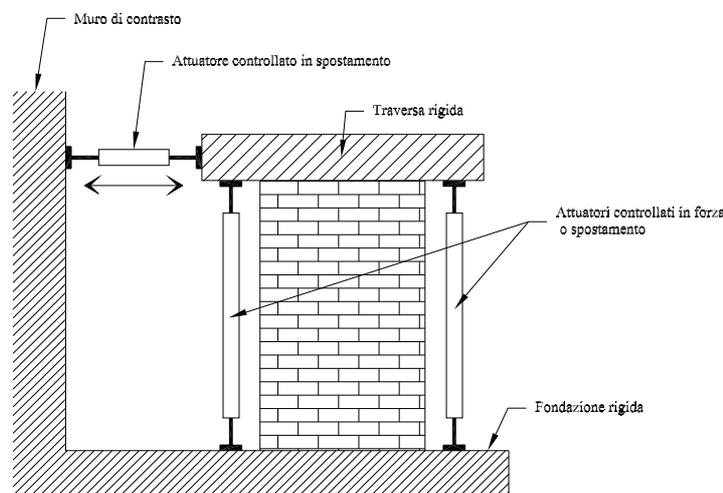


Figura 1.1.

per perdita di equilibrio globale della struttura. Questo tipo di comportamento – cosiddetto “bending” – è tipico delle strutture snelle di muratura come travi, colonne, archi, pilastri, etc., o anche dei maschi murari poco caricati, come ad esempio quelli agli ultimi piani di un edificio. Lo studio dei diagrammi forza–spostamento indotti da azioni cicliche – si veda la figura 1.2– mostra che queste strutture presentano scarse capacità di dissipazione isteretica; in effetti esse oscillano intorno alla loro posizione di equilibrio manifestando deformazioni dovute alla parzializzazione delle sezioni più sollecitate, senza che intervengano rilevanti fenomeni attritivi o di plasticizzazione. Restano molto difficili da valutare gli effetti sul comportamento dinamico complessivo e sul degrado del materiale dovuto agli urti fra le parti della struttura in regime di grandi deformazioni.

- 1b) *rottura a taglio per fessurazione diagonale (shearing)*. E' la rottura tipica dei pannelli di muratura imbrigliati, ossia efficacemente vincolati a muoversi mantenendo il parallelismo delle basi: tamponamenti, maschi murari cerchiati dai solai ed in corrispondenza delle aperture, etc. E' a questo tipo di comportamento che fanno riferimento le formule adottate dalla Normativa italiana per il calcolo del taglio ultimo di un pannello di muratura; esso, in effetti, dovrebbe essere caratteristico degli edifici sottoposti a buoni interventi di adeguamento sismico e dei nuovi edifici in muratura. I diagrammi forza–spostamento evidenziano un comportamento isteretico dissipativo

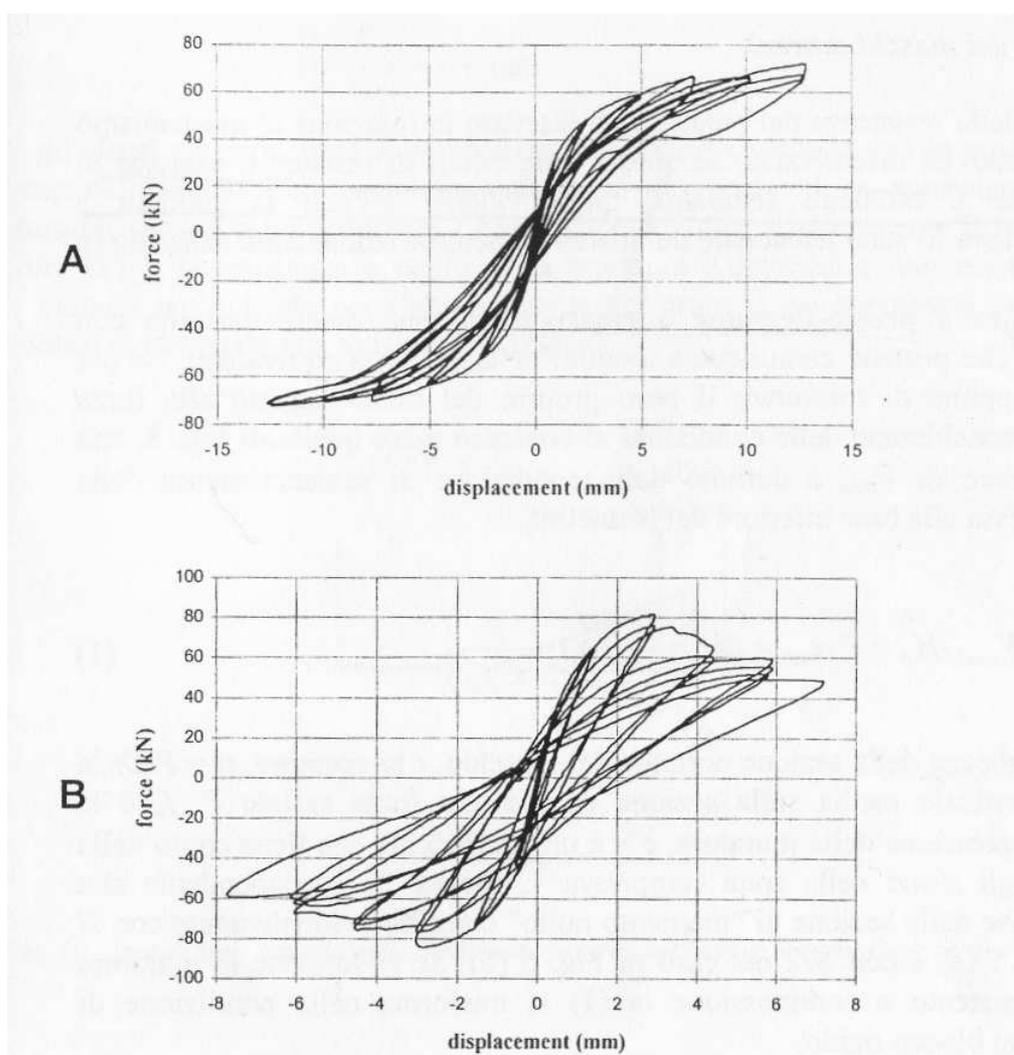


Figura 1.2. Immagine tratta da [25]: risposta ciclica di pannelli soggetti a prova secondo la procedura illustrata in figura 1.1. Caso A: rottura per pressoflessione. Caso B: rottura per taglio con fessurazione diagonale.

Capitolo 1

piuttosto marcato – si veda la figura 1.2–, tanto da far spesso ed impropriamente parlare di “duttilità” delle murature.

1c) *rottura a taglio per scorrimento lungo i giunti di malta (“sliding”)*. Fra i vari meccanismi di rottura questo è particolarmente insidioso, potendo intervenire, a seconda delle condizioni di vincolo e delle tecnologie costruttive, per valori del taglio sensibilmente inferiori a quelli che porterebbero ad una rottura per fessurazione diagonale. La dissipazione di energia ad esso associata è legata essenzialmente all’attrito.

2) Un pannello di muratura sollecitato da azioni cicliche agenti **fuori dal piano** presenta le seguenti modalità principali di rottura:

2a) *ribaltamento fuori dal piano* per distacco completo della parete dai muri trasversali e perdita di equilibrio globale.

2b) *rottura per flessione fuori dal piano*, con formazione di lesioni triangolari che si innescano in corrispondenza dei muri di spina, degradando verso le zone centrali della parete.

La rottura fuori piano è senz’altro il fenomeno che condiziona il dissesto degli edifici monumentali, che sono caratterizzati da grandi altezze di interpiano; una notevole vulnerabilità nei confronti di questo meccanismo è stata osservata anche in edifici con pareti non efficacemente ammortate in corrispondenza dei solai e dei muri trasversali, come dimostrano alcuni dei crolli più disastrosi in Irpinia ed in Umbria.

1.2 Differenti approcci nella modellazione di un edificio in muratura

A partire dalle considerazioni generali brevemente illustrate nel paragrafo precedente, gli studiosi hanno elaborato numerosi modelli, volti a cogliere i diversi aspetti del comportamento delle murature sotto sisma. Un criterio di classificazione di questi lavori può essere fatto in base all’approccio seguito dagli Autori nel modellare la muratura, che può essere discretizzata con elementi finiti come un materiale continuo – modelli continui –, modellata come un insieme di blocchi variamente interfacciati fra loro – modelli a blocchi – oppure come assemblaggio di macroelementi opportunamente definiti – modelli funzionali o a macroelementi –.

Nel seguito vengono brevemente presentate alcune delle proposte più interessanti pubblicate negli ultimi anni, catalogandole secondo il criterio esposto in precedenza.

1.2.1 I modelli continui

Questo approccio è sicuramente il più naturale per chi proviene dalla modellazione degli edifici in acciaio ed in cemento armato; in effetti, modellare una struttura di muratura come un continuo elastico lineare è stato, fino a pochi anni fa, l'unica risorsa a disposizione dei progettisti. Lo sviluppo degli strumenti di calcolo consente oggi di effettuare analisi numeriche dinamiche o incrementali anche in campo non lineare, impiegando codici di calcolo molto sofisticati e sviluppati *ad hoc*, ma anche pacchetti software meno mirati e facilmente reperibili in commercio (sostanzialmente ADINA ed ANSYS).

Il problema fondamentale che si incontra in questo tipo di modellazione riguarda la scelta del legame costitutivo più adatto. Ancora una volta, infatti, la grande varietà di comportamenti da simulare impedisce l'individuazione di un "materiale muratura" generalmente valido.

Tuttavia, una caratteristica peculiare della muratura è il diverso comportamento che essa esibisce a fronte delle sollecitazioni di trazione e di compressione. A partire dai primi anni '80, a seguito di alcuni importanti studi di A. Signorini, diversi Autori [1, 9, 10, 21, 22, 34] hanno ideato un legame costitutivo nonlineare che descrive la muratura come un continuo isotropo incapace di sostenere tensioni di trazione e con infinita – o, in alcuni studi più recenti, limitata – resistenza a compressione. Tale legame, implementato mediante opportuni codici di calcolo, si è mostrato estremamente efficace nel modellare le murature in campo statico. In campo dinamico, invece, esso sembra in grado di riprodurre soltanto in parte il comportamento delle strutture murarie: in particolare, esso non consente di tener conto delle direzioni di maggior debolezza a taglio del materiale e dei fenomeni dissipativi dovuti all'attrito ed al degrado.

Tuttavia, esistono alcune tipologie edilizie, come torri isolate e travi snelle¹, che risultano poco sensibili ai fenomeni attritivi ed alle deformazioni da taglio ed il cui comportamento dinamico è sostanzialmente legato ai fenomeni fessurativi. In questo ambito si muovono gli studi [23, 24, 31, 32, 41], in cui, impiegando un legame costitutivo nonlineare di tipo "no tension", espresso in termini di sforzi generalizzati (momento flettente–curvatura), si suggerisce una procedura numerica per modellare in campo dinamico strutture snelle di muratura (in particolare, torri isolate e campanili) mediante elementi finiti monodimensionali. Il codice di calcolo proposto consente di studiare condizioni di carico estremamente generali, tenendo conto dell'accoppiamento tra vibrazioni trasversali e longitudinali

¹Si tratta delle strutture caratterizzate dalla modalità di rottura tipo "bending" precedentemente definita.

Capitolo 1

lungo la struttura ed introducendo, eventualmente, un valore limitato della resistenza a compressione del materiale.

Un numero crescente di studiosi si sta applicando, invece, alla formulazione di legami costitutivi studiati *ad hoc* per riprodurre il comportamento dei maschi murari soggetti ad azioni cicliche. Molto interessanti, in questo ambito, sono gli studi [15, 16]: gli Autori partono dalla scrittura di equazioni costitutive non lineari per la malta ed i blocchi di laterizio, affidando ai giunti di malta il comportamento monolatero e la possibilità di scorrimenti orizzontali, ai blocchi il comportamento fragile dovuto all'apertura di lesioni diagonali da taglio o verticali da eccesso di compressione nella muratura. I domini di resistenza dei due elementi si ottengono impiegando il criterio di Mohr–Coulomb per controllare i fenomeni attritivi ed un criterio energetico alla Griffith per descrivere il comportamento fragile dei blocchi. Viene quindi suggerita una tecnica di omogenizzazione, mediante la quale la parete viene modellata come un continuo ortotropo il cui dominio di resistenza è descritto dall'intersezione di quelli ottenuti per la malta e per il blocco. La rispondenza del modello ai dati sperimentali è molto buona; tuttavia, il suo impiego è ancora limitato da pesanti oneri computazionali.

In generale, è impossibile negare le difficoltà cui va incontro chi voglia cimentarsi in un'analisi non lineare in campo dinamico mediante modelli continui: scelta del legame costitutivo più adatto, pesanti oneri computazionali, problemi di convergenza, difficoltà nell'interpretazione dei risultati. Tuttavia il modello continuo, grazie all'ineguagliabile versatilità, rimane un passaggio ineliminabile per chi voglia comprendere pienamente i fenomeni sperimentali o calibrare modelli semplificati e più adatti alla professione.

1.2.2 I modelli a blocchi

Si tratta di modelli che discretizzano le murature mediante blocchi – indeformabili nella maggior parte dei casi – variamente interfacciati tra loro e vincolati a terra. Spesso, la discretizzazione viene suggerita dalla struttura stessa – archi a conci di pietra, blocchi isolati, colonne a blocchi sovrapposti – : per questo tipo di strutture la modellazione a blocchi rappresenta la soluzione più naturale ed efficace. Comunque, essa viene frequentemente applicata anche alle murature in laterizio, più spesso per discretizzare strutture riconducibili alla linea d'asse – torri ed archi –, talvolta per pannelli in stato piano di tensione ed elementi tridimensionali come cupole e volte.

I primi lavori sul comportamento dinamico dei sistemi strutturali a blocchi si possono far risalire ad Housner (1963). L'Autore studiava analiticamente la dinamica dei sistemi ad elementi rigidi sovrapposti, considerando i blocchi liberi di ruotare alternativamente intorno ad uno dei due vertici

dell'interfaccia. In seguito, le condizioni di interfaccia sono state complicate, inserendo films elastici non reagenti a trazione, simulando l'attrito tra i blocchi mediante molle tangenziali elasto-plastiche ed inserendo organi viscosi in grado di modellare la dissipazione di energia associata agli urti. In particolare, sono state sviluppate alcune procedure numeriche in grado di integrare le equazioni del moto anche in regime di grandi deformazioni [3]. Le applicazioni sono state numerose, sia in Italia che all'estero, anche se limitate a strutture molto semplici, per lo più costituite da blocchi sovrapposti ed a pochi gradi di libertà. La possibilità di valutare numericamente le dissipazioni per attrito ed urti renderebbe interessante un confronto fra questi risultati e quelli ottenuti con altri tipi di modellazione; in ogni caso, il comportamento fortemente nonlineare di questi sistemi costituisce ancora oggi un importante stimolo per gli studiosi.

Sempre all'ambito dei modelli a blocchi si può ricondurre l'analisi dinamica di strutture più complicate, come archi, torri o portali, effettuata mediante lo studio di un meccanismo equivalente, in cui il comportamento nonlineare viene concentrato in corrispondenza delle "cerniere". Numerosissime sono state le applicazioni di questo tipo di modellazione. In particolare, si vogliono ricordare in questa sede gli studi [4, 5], in cui viene proposta una procedura di discretizzazione di torri in muratura mediante un modello a fibre. Viene introdotto un legame costitutivo isteretico semplificato, le cui caratteristiche sono valutate, istante per istante, alla base di ciascuna fibra; le caratteristiche di sollecitazione e deformazione lungo la torre, invece, vengono colte mediante opportune funzioni di forma. Particolarmente interessante, nel modello, è la possibilità di studiare le interazioni fra vibrazioni longitudinali e trasversali, come proposto successivamente anche in [23]; tali interazioni sembrano indurre un considerevole danneggiamento aggiuntivo lungo la torre, in particolare in presenza di componenti sussultorie dell'eccitazione.

1.2.3 I modelli funzionali o a macroelementi

Si tratta di modelli semplificati che discretizzano gli edifici in muratura mediante pochi elementi (pannelli) studiati in modo da consentire una valutazione della risposta globale della struttura con un numero di gradi di libertà estremamente ridotto. Questo tipo di modellazione è stato introdotto fin dai primi anni Ottanta con la diffusione del metodo POR; si è in seguito sviluppato con l'introduzione di metodi sempre più efficaci e sofisticati. I pannelli murari (maschi murari e fasce di piano) vengono modellati come macroelementi bidimensionali o, più spesso, mediante elementi equivalenti monodimensionali, in cui le verifiche sono effettuate in termini di carat-

Capitolo 1

teristiche della sollecitazione. L'ingrediente fondamentale per descrivere il comportamento non lineare è la non resistenza a trazione del materiale – generalizzata o limitata alla direzione di giacitura dei letti di malta –, spesso associata ad un controllo delle tensioni tangenziali lungo i giunti. Nei primi modelli, la verifica sismica veniva effettuata tramite analisi statiche incrementali. Le proposte più recenti, invece, consentono di effettuare anche analisi dinamiche.

Il metodo POR [13, 37], proposto da Tomaževic dopo il terremoto del Friuli, si basa su alcune ipotesi fortemente semplificative che consentono di effettuare la verifica di un edificio piano per piano: maschi murari vincolati a muoversi mantenendo il parallelismo delle basi, fasce di piano e solai infinitamente rigidi. Agli elementi resistenti – maschi murari – viene associato un diagramma taglio–spostamento di tipo elastico–perfettamente plastico con limite di deformazione; il valore del taglio resistente ultimo si ottiene nell'ipotesi di rottura per fessurazione diagonale. Il metodo si basa sulla ripartizione tra i maschi delle azioni sismiche agenti sul piano considerato, spingendosi per iterazioni in campo anelastico fino al raggiungimento della deformazione ultima da taglio di almeno uno dei pannelli. La maggior limitazione del metodo POR, che pure, grazie alla relativa semplicità di implementazione, ha avuto gran successo tra i professionisti, consiste nel trascurare l'effetto “telaio” indotto dalla deformabilità delle fasce di piano, rilevante soprattutto per edifici di una certa altezza.

Successivamente sono state proposte alcune procedure che hanno consentito di superare tale limitazione, pur mantenendo una relativa semplicità di impiego. Fra queste, in particolare, si ricorda il metodo SAM, proposto all'attenzione dei professionisti dal Gruppo Nazionale per la Difesa dai Terremoti del CNR [25]. In questo caso l'edificio viene modellato come un telaio equivalente tridimensionale, composto da maschi murari – pilastri – e fasce di piano – travi – collegati da nodi infinitamente rigidi; viene contemplata la possibilità di modellare cordoli di C.A. e catene. A ciascun elemento sono associate diverse modalità di rottura, ciascuna delle quali descritta da una opportuna legge forza–deformazione di tipo elastico–perfettamente plastico con limite di deformazione. Le modalità studiate sono la rottura per pressoflessione, la rottura a taglio per fessurazione diagonale, la rottura per scorrimento lungo i giunti. Anche in questo caso, si modella l'azione sismica mediante forze orizzontali equivalenti e si esegue un'analisi non lineare al passo, arrestandosi col raggiungimento della deformazione ultima da parte di uno degli elementi.

Accanto al metodo POR e derivati si sono sviluppati altri interessanti procedimenti. Uno dei primi in ordine cronologico è il cosiddetto “metodo delle diagonali imbrigliate”, introdotto agli inizi degli anni Ottanta [2]. Tale

metodo descrive il comportamento dei pannelli murari soggetti a carichi orizzontali mediante puntoni equivalenti, di sezione ed inclinazione dipendenti dalla risultante delle azioni sul pannello stesso. La crisi dell'elemento viene raggiunta per schiacciamento della biella o per inclinazioni della risultante superiori all'angolo di attrito lungo i giunti di malta. La parete in muratura (il metodo non ha trovato estensioni al caso tridimensionale) viene modellata mediante un telaio equivalente in cui le rigidezze dei ritti sono funzione delle rigidezze dei puntoni di muratura; essendo queste ultime variabili in funzione dei carichi agenti su ciascun pannello, il sistema deve essere risolto iterativamente. I cordoli e le catene orizzontali, modellati mediante traversi infinitamente rigidi, "imbrigliano" i pannelli in corrispondenza dei piani e consentono l'innescio delle bielle.

Fra i contributi più moderni, invece, particolarmente interessante è quello proposto in [17]. Gli Autori modellano ciascun pannello di muratura mediante un "macroelemento" che ne associa la deformabilità a taglio alla parte centrale – rigida per azioni assiali e flessionali – e la deformabilità flessionale alle sue estremità – infinitamente rigide a taglio. Il meccanismo di ribaltamento viene colto ipotizzando un contatto unilaterale fra la parte centrale del pannello e quelle di estremità. Il legame costitutivo $T - \delta$ è ottenuto dall'integrazione sulla sezione dei complessi legami costitutivi a cui si è accennato nella sezione dedicata ai modelli continui [15, 16], mentre il comportamento flessionale è descritto mediante l'ipotesi di materiale non reagente a trazione. Al macroelemento così definito vengono associati otto gradi di libertà – tre per ogni estremità e due per la zona centrale –, tutti relativi al piano del pannello. Esso viene quindi impiegato per modellare un maschio murario o una fascia di piano, realizzando telai tridimensionali su cui è possibile effettuare analisi incrementali o analisi dinamiche.

Un altro originale contributo è quello esposto in [4, 5], sullo studio del comportamento dinamico di grandi strutture murarie vibranti fuori dal piano. L'Autore propone una procedura per modellare una parete in muratura mediante elementi rigidi quadrilateri connessi da interfacce collocate nei punti medi dei lati. A ciascun elemento si associano tre gradi di libertà: lo spostamento fuori piano del baricentro dell'elemento (in cui si concentra la massa), la rotazione fuori piano e la rotazione nel piano. Alle interfacce si associa un legame momento – curvatura ottenuto dall'integrazione macroscopica di un legame $\sigma - \varepsilon$ con debole resistenza a trazione; per le azioni cicliche si utilizza un modello isteretico derivato da quello classico di Takeda. Questa procedura sembra essere uno strumento molto valido per lo studio del comportamento fuori dal piano delle strutture murarie, finora ricondotto per lo più all'individuazione di carichi limite e meccanismi di rottura mediante semplici problemi di equilibrio.

I modelli a macroelementi, di cui si è tentato di fornire una rapida sintesi, sono caratterizzati da oneri computazionali ridotti e facilità di implementazione che ne rendono raccomandabile l'impiego da parte dei progettisti; inoltre, una definizione "intelligente" del macroelemento può consentire di simulare in maniera molto efficace i fenomeni sperimentali.

Si può prevedere un impiego sempre più massiccio di questi modelli nell'ingegneria sismica delle murature; il loro sviluppo, tuttavia, non potrà prescindere dall'evoluzione delle tecniche numeriche più sofisticate che ne consentiranno la calibrazione ed il controllo.

1.3 Un approccio analitico al problema delle vibrazioni trasversali di una trave di lunghezza finita costituita da materiale non resistente a trazione

Tutti i modelli descritti nei paragrafi precedenti si avvalgono di tecniche numeriche per la soluzione delle equazioni del moto.

Tuttavia, la complessità dei calcoli e le difficoltà nell'interpretazione dei risultati rendono interessante lo sviluppo di metodi analitici che consentano una descrizione più sintetica del comportamento dinamico degli edifici di muratura.

In questo ambito si muove la seguente tesi di dottorato, che si prefigge lo studio, mediante tecniche analitiche perturbative, del moto di una trave di muratura di lunghezza finita, modellata come un continuo non reagente a trazione in direzione longitudinale.

La tesi prende spunto dai numerosi risultati ottenuti in campo analitico sulla statica dei solidi costituiti da materiale non resistente a trazione. In particolare, in [8, 30, 32] sono state studiate alcune strutture monodimensionali – travi ed archi – a sezione costante, per le quali sono stati proposti dei legami costitutivi in termini di sforzi generalizzati; inoltre, in [32] sono state scritte le equazioni del moto di una trave di lunghezza infinita, proponendone una soluzione approssimata per un impatto a velocità costante.

In questo paragrafo si presentano brevemente le relazioni fra caratteristiche della sollecitazione e della deformazione per una trave di sezione rettangolare costante, già descritte in dettaglio in [8, 30, 32]; quindi, si formula il problema del moto della trave in termini variazionali e si ricavano le equazioni del moto a partire dalla Lagrangiana del sistema.

1.3.1 L'equazione costitutiva

Si consideri una trave costituita da materiale non resistente a trazione e con infinita resistenza a compressione (si veda la figura 1.3), avente sezione rettangolare di altezza h e larghezza b .

Siano ε la deformazione assiale della linea d'asse della trave, χ il cambiamento di curvatura, M il momento flettente ed N lo sforzo normale.

Nell'ipotesi che le sezioni trasversali restino piane ed ortogonali alla linea d'asse deformata, è possibile scrivere le relazioni che legano, per ciascuna sezione, le caratteristiche della deformazione ε e χ a quelle della sollecitazione M e N . Precisamente, sia Σ l'insieme del piano $M - N$ costituito dalle caratteristiche della sollecitazione ammissibili per la sezione e si consideri la seguente partizione di Σ nelle tre regioni (si veda la figura 1.4)

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \quad & \frac{1}{6}Nh \leq M \leq -\frac{1}{6}Nh, \quad N \leq 0 \\ \Sigma_2 : \quad & -\frac{1}{6}Nh \leq M \leq -\frac{1}{2}Nh, \quad N \leq 0 \\ \Sigma_3 : \quad & \frac{1}{2}Nh \leq M \leq \frac{1}{6}Nh, \quad N \leq 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Allora, si ha

$$\Sigma_1 : \quad \varepsilon = \frac{N}{Ebh}, \quad \chi = \frac{12M}{Ebh^3}; \tag{1.2}$$

$$\Sigma_2 : \quad \varepsilon = \frac{8}{9Eb} \frac{N^2(Nh + 3M)}{(Nh + 2M)^2}, \quad \chi = -\frac{8}{9Eb} \frac{N^3}{(Nh + 2M)^2}; \tag{1.3}$$

$$\Sigma_3 : \quad \varepsilon = \frac{8}{9Eb} \frac{N^2(Nh - 3M)}{(Nh - 2M)^2}, \quad \chi = -\frac{8}{9Eb} \frac{N^3}{(Nh - 2M)^2}. \tag{1.4}$$

Nella regione Σ_1 la sezione è interamente reagente e le 1.2 coincidono con le relazioni elastiche lineari. Nelle regioni Σ_2, Σ_3 la sezione è parzialmente reagente e le 1.3, 1.4 ne rappresentano il comportamento nonlineare; si noti che in queste due regioni ciascuna delle caratteristiche della deformazione dipende da entrambe le caratteristiche della sollecitazione.

Le 1.2, 1.3, 1.4 possono essere invertite, ottenendo le relazioni $N(\varepsilon, \chi)$, $M(\varepsilon, \chi)$. La partizione 1.1 di Σ induce la seguente partizione dell'insieme E delle caratteristiche della deformazione ammissibili

$$\begin{aligned} E_1 : \quad & 2\varepsilon \leq \chi h \leq -2\varepsilon, \quad \varepsilon \leq 0 \\ E_2 : \quad & \chi h > 2|\varepsilon|, \quad \chi > 0 \\ E_3 : \quad & \chi h < 2|\varepsilon|, \quad \chi < 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Capitolo 1

Si ottiene

$$E_1: \quad N = Ebh\varepsilon, \quad M = \frac{Ebh^3}{12}\chi; \quad (1.6)$$

$$E_2: \quad N = -\frac{Eb(\chi h - 2\varepsilon)^2}{8\chi}, \quad M = \frac{Eb(\varepsilon + \chi h)(\chi h - 2\varepsilon)^2}{24\chi^2}; \quad (1.7)$$

$$E_3: \quad N = \frac{Eb(\chi h + 2\varepsilon)^2}{8\chi}, \quad M = -\frac{Eb(\varepsilon - \chi h)(\chi h + 2\varepsilon)^2}{24\chi^2}. \quad (1.8)$$

Se in una particolare sezione è noto lo sforzo normale N , dalle 1.7, 1.8 è possibile ottenere la relazione $M = M(\chi, N)$ che esprime il momento flettente in funzione della curvatura.

In questa circostanza, detta ρ la densità del materiale di cui è costituita la trave, si definiscono

$$f(\chi) = \frac{M}{\rho bh}, \quad \alpha^* = -\frac{2N}{Ebh^3} \quad (1.9)$$

dove α^* rappresenta la curvatura limite elastica della sezione. Dalle 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, impiegando le 1.9, si ottengono le relazioni

$$f(\chi) = c^2\chi \quad \text{per } |\chi| \leq \alpha^* \quad (1.10a)$$

$$f(\chi) = c^2\alpha^* \text{Sign}(\chi) \left(3 - 2\sqrt{\frac{\alpha^*}{|\chi|}}\right) \quad \text{per } |\chi| > \alpha^* \quad (1.10b)$$

che rappresentano l'equazione costitutiva cercata. L'andamento della funzione $f(\chi)$ è mostrato in figura 1.5. Il grafico evidenzia il comportamento nonlineare della relazione costitutiva; in particolare, si può osservare che, una volta raggiunto il valore di prima fessurazione, all'aumentare della curvatura la sezione mostra un rapido abbattimento della rigidità ed il momento flettente tende velocemente ad un asintoto orizzontale che costituisce il valore limite ultimo sopportabile dalla sezione. Tale valore è di tre volte più grande del momento flettente di prima fessurazione. Inoltre, si osserva che la funzione $f(\chi)$ è continua con la derivata prima, mentre la derivata seconda è discontinua per $|\chi| = \alpha^*$.

Le equazioni 1.10 rappresentano il punto di partenza per lo studio del comportamento dinamico nonlineare della trave. Poichè il legame costitutivo è di tipo elastico, il suo impiego implica l'assenza di dissipazioni isteretiche durante i carichi ciclici. Si tratta di un'ipotesi estremamente semplificativa. D'altra parte, per le strutture snelle di muratura, oggetto della tesi, tale ipotesi appare giustificata dalle scarse capacità dissipative che esse

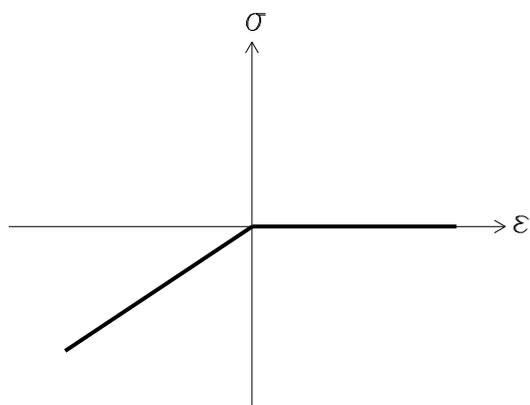


Figura 1.3. Legame σ - ε per un materiale non resistente a trazione e con infinita resistenza a compressione.

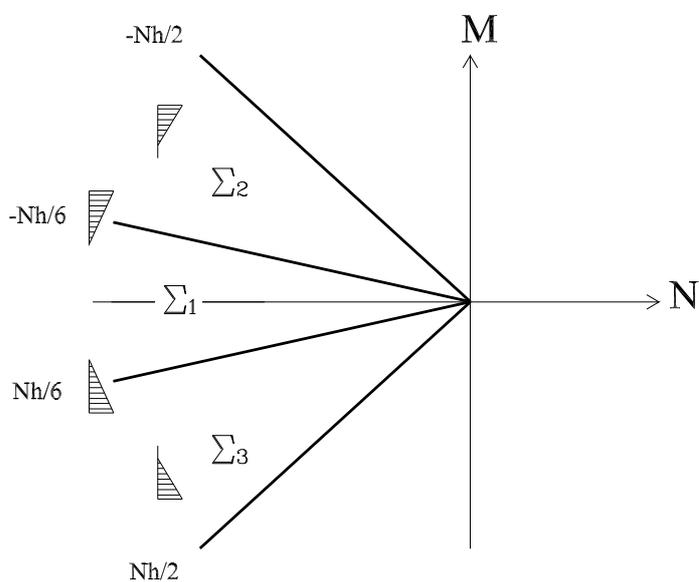


Figura 1.4. Partizione del piano $M - N$ per una sezione rettangolare di altezza h costituita da materiale non resistente a trazione.

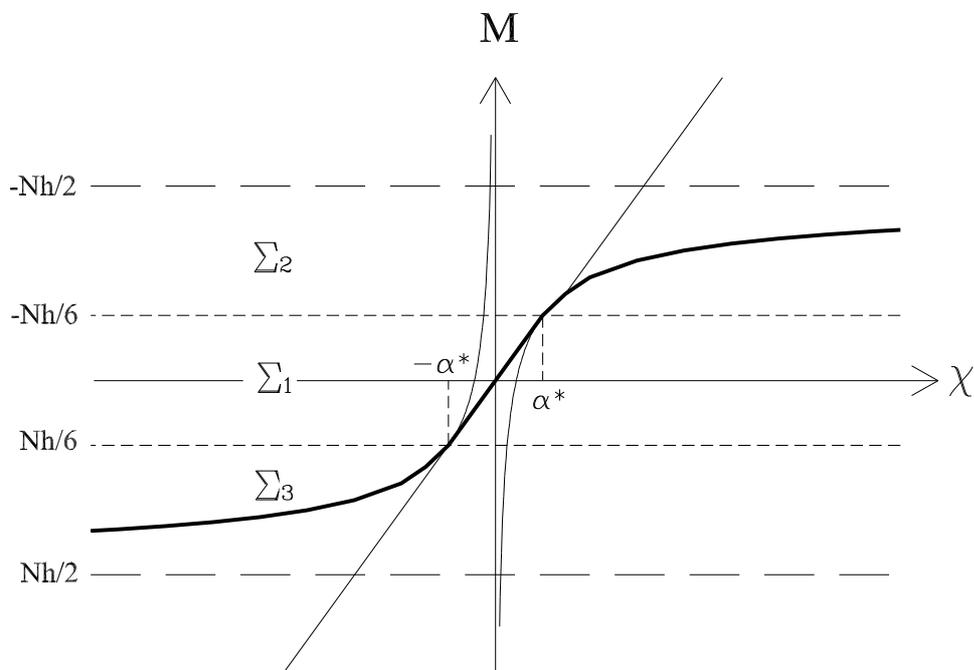


Figura 1.5. Legame $M - \chi$ per una sezione rettangolare costituita da materiale non resistente a trazione.

hanno dimostrato sperimentalmente²[25]. Questo dato, inoltre, è confermato anche dai risultati ottenuti numericamente mediante modelli estremamente sofisticati, come i già citati [5, 15, 16]. Pertanto, nella scrittura delle equazioni del moto, le capacità dissipative della struttura saranno simulate impiegando un opportuno coefficiente di smorzamento viscoso.

1.3.2 Le equazioni del moto

Si consideri una trave di lunghezza finita L , di sezione rettangolare con dimensioni costanti ($b \times h$). Facciamo l'ipotesi che la trave sia costituita da un materiale non resistente a trazione in direzione longitudinale di densità ρ , che lo sforzo normale agente sulla trave sia noto e costante lungo l'asse e che per ciascuna sezione valgano le relazioni 1.10. Ipotizziamo l'altezza h della sezione sufficientemente piccola rispetto alla luce, in modo da poter trascurare la deformabilità a taglio della trave e piccolo lo spostamento

²Come è possibile osservare in figura 1.2, il meccanismo di rottura per ribaltamento e pressoflessione, tipico delle strutture snelle di muratura, è associato a cicli di isteresi a bassa dissipazione di energia.

trasversale della trave. Infine, supponiamo che la trave sia vincolata alle sue estremità mediante vincoli perfetti³ e che siano trascurabili gli effetti dello sforzo normale e dell'inerzia rotazionale.

Siano x^* l'ascissa lungo l'asse della trave, t^* il tempo, $v^*(x^*, t^*)$ lo spostamento trasversale dell'asse della trave, C^* il coefficiente di smorzamento viscoso, definito per unità di lunghezza, e $p^*(x^*, t^*)$ il carico trasversale agente anch'esso per unità di lunghezza.

Sotto queste ipotesi, è possibile scrivere facilmente l'equazione differenziale che descrive il moto trasversale della trave, imponendo l'equilibrio dinamico alla traslazione trasversale di un suo concio di lunghezza infinitesima [7, 32, 38].

In questa sede, invece, l'equazione del moto viene ottenuta seguendo un approccio di tipo variazionale; i motivi di questa scelta saranno chiariti nel capitolo 4, in cui tale approccio verrà impiegato diffusamente per ottenere esplicitamente alcune soluzioni approssimate.

Prima di ricavare l'equazione del moto, si ritiene utile presentare alcuni brevi richiami di meccanica analitica, richiamando l'attenzione, in particolare modo, sulla generalizzazione delle equazioni di Lagrange ai sistemi non conservativi.

Per sistemi a più gradi di libertà, anche non conservativi, nell'ipotesi di perfezione dei vincoli, le equazioni di Lagrange assumono la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1 \dots n) \quad (1.11)$$

essendo $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_n)^T$ il vettore delle coordinate indipendenti generalizzate del sistema, T l'energia cinetica e $\mathbf{Q} = (Q_1 \dots Q_n)^T$ il vettore delle forze generalizzate agenti [35].

Se si indicano con

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(t, q_1 \dots q_n) \quad (v = 1 \dots N) \quad (1.12)$$

gli N vettori radiali (con $N \neq n$) che descrivono il moto di ciascun punto del sistema, è possibile calcolare le Q_i mediante l'espressione

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \quad (i = 1 \dots n). \quad (1.13)$$

³Un vincolo si dice *perfetto* o *ideale* se il lavoro delle reazioni vincolari è nullo per ogni spostamento compatibile con il vincolo.

Capitolo 1

In generale, le forze agenti sul sistema e rappresentate dal vettore \mathbf{Q} possono essere distinte in conservative e non conservative. Sono conservative quelle forze le cui componenti non dipendono dal vettore delle velocità generalizzate $\dot{\mathbf{q}}$ e per cui esiste una funzione potenziale $\Pi(t, q_1 \dots q_n)$ tale che

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1 \dots n). \quad (1.14)$$

Si noti che è possibile definire una funzione potenziale anche per forzanti esterne al sistema [20].

Le forze non conservative, al contrario, dipendono dalle velocità generalizzate⁴; le loro componenti generalizzate saranno indicate nel seguito con l'espressione

$$\bar{Q}_i = \bar{Q}_i(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (i = 1 \dots n). \quad (1.15)$$

E' possibile, a questo punto, esprimere le Q_i come

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \bar{Q}_i \quad (i = 1 \dots n). \quad (1.16)$$

Infine, introducendo la 1.16 nelle 1.11 e definita la funzione *Lagrangiana* del sistema

$$L = T - \Pi, \quad (1.17)$$

le equazioni di Lagrange assumono la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \bar{Q}_i \quad (i = 1 \dots n). \quad (1.18)$$

Lo studio del moto trasversale della trave descritta all'inizio del paragrafo può essere condotto applicando i metodi della meccanica Lagrangiana.

Si consideri la generica sezione della trave di ascissa x^* ; trascurando la deformabilità estensionale del sistema trave – vincoli, è possibile associare alla sezione due gradi di libertà.

Scelte come coordinate indipendenti generalizzate le quantità $v^*(x^*, t^*)$, $\chi(x^*, t^*)$, definiamo la Lagrangiana della sezione

$$L = \left[\frac{1}{2}(v_{t^*}^*)^2 - f'(\chi)\chi_{x^*}v_{x^*}^* + \frac{1}{2}g(\chi) \right] \rho b h + p(x^*, t^*)v^*, \quad (1.19)$$

⁴Le forze dissipative, come, ad esempio, lo smorzamento viscoso del moto di una trave, sono un esempio di forze non potenziali.

dove

$$g = 2(\chi f - F), \quad (1.20)$$

con F primitiva di f tale che $F(0) = 0$ ed f definita dalle 1.10.

Le funzioni $f'(\chi)$, $F(\chi)$ sono definite dalle relazioni

$$f'(\chi) = c^2 \quad \text{per } |\chi| \leq \alpha^* \quad (1.21a)$$

$$f'(\chi) = c^2 \alpha^* \sqrt{\frac{\alpha^*}{|\chi|^3}} \quad \text{per } |\chi| > \alpha^* \quad (1.21b)$$

$$F(\chi) = c^2 \frac{\chi^2}{2} \quad \text{per } |\chi| \leq \alpha^* \quad (1.22a)$$

$$F(\chi) = c^2 \alpha^* (3|\chi| - 4\sqrt{\alpha^* |\chi|}) + \frac{3}{2} c^2 \alpha^{*2} \quad \text{per } |\chi| > \alpha^*. \quad (1.22b)$$

Si noti che nelle 1.22 è stata introdotta la costante $\frac{3}{2}c^2\alpha^{*2}$ per garantire la continuità della funzione $F(\chi)$ in α^* .

Il vettore generalizzato della forza di smorzamento viscoso agente sulla sezione, come si deduce facilmente dalla 1.13, ha componenti

$$\bar{\mathbf{Q}} = (-C^* v_{t^*}^*, 0)^T. \quad (1.23)$$

Le equazioni di Lagrange, scritte nel caso più generale di coordinate generalizzate dipendenti da più variabili, forniscono

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v_{t^*}^*} \right)_{t^*} + \left(\frac{\partial L}{\partial v_{x^*}^*} \right)_{x^*} - \frac{\partial L}{\partial v^*} = \bar{Q}_{v^*} \quad (1.24)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \chi_{t^*}} \right)_{t^*} + \left(\frac{\partial L}{\partial \chi_{x^*}} \right)_{x^*} - \frac{\partial L}{\partial \chi} = \bar{Q}_\chi. \quad (1.25)$$

Tali equazioni, tenuto conto che

$$\frac{\partial L}{\partial v^*} = \left(\frac{\partial L}{\partial \chi_{t^*}} \right)_{t^*} = \bar{Q}_\chi = 0, \quad (1.26)$$

diventano

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v_{t^*}^*} \right)_{t^*} + \left(\frac{\partial L}{\partial v_{x^*}^*} \right)_{x^*} = \bar{Q}_{v^*} \quad (1.27)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \chi_{x^*}} \right)_{x^*} - \frac{\partial L}{\partial \chi} = 0. \quad (1.28)$$

Capitolo 1

Introducendo le 1.19, 1.23 nelle 1.27, 1.28 e ricordando che $f'(\chi) \neq 0$ per ogni valore di χ , si ottengono le equazioni

$$v_{t^*t^*}^* - f(\chi)_{x^*x^*} + \frac{C^*}{\rho bh} v_{t^*}^* = \frac{p^*(x^*, t^*)}{\rho bh} \quad (1.29)$$

$$v_{x^*x^*}^* + \chi = 0. \quad (1.30)$$

La 1.29 rappresenta l'equazione di equilibrio dinamico trasversale della trave e coincide, di fatto, con l'espressione classica trovata in [7, 32, 38]. La 1.30 coincide con l'equazione di congruenza della trave, scritta per piccoli valori del cambiamento di curvatura della linea d'asse.

Capitolo 2

Metodi analitici approssimati per lo studio di problemi di dinamica nonlineare: lo stato dell'arte

Nel capitolo 1 è stata ricavata l'equazione del moto trasversale di una trave costituita da materiale non resistente a trazione in direzione longitudinale. Nel seguito della tesi tale equazione verrà risolta in modo approssimato per alcune condizioni di vincolo, impiegando tecniche analitico–numeriche di tipo perturbativo.

Una procedura perturbativa consiste, in sostanza, nel costruire la soluzione di un problema in funzione di un parametro ε , supposto piccolo, quando sia nota la soluzione per $\varepsilon = 0$. Generalmente si impiegano sviluppi della soluzione in serie di Taylor rispetto a ε che, sostituiti nell'equazione da risolvere, riconducono il problema alla risoluzione in sequenza di più equazioni lineari, una per ogni ordine dello sviluppo.

In un problema perturbativo di tipo “regolare”, tale semplice procedura di sostituzione consente di ottenere una soluzione approssimata la cui accuratezza è costante nell'intervallo di definizione della variabile indipendente e migliora per valori piccoli di ε .

Al contrario, per risolvere problemi perturbativi di tipo “singolare”, si rende necessario l'impiego di tecniche speciali, in quanto la procedura di sostituzione diretta non consente di ottenere soluzioni uniformemente valide.

Il moto trasversale di una trave costituita da materiale non resistente a trazione, supposti piccoli gli spostamenti trasversali dei punti della trave, può essere ricondotto a quest'ultima categoria di problemi perturbativi; in particolare, esso può essere classificato come problema “cumulativo” [18], in quanto gli effetti della nonlinearietà sul moto della trave tendono ad essere via via più vistosi al passare del tempo.

Le prime soluzioni di problemi nonlineari di tipo “cumulativo” mediante tecniche perturbative si possono far risalire alla seconda metà dell'Ottocento. Nel 1847 veniva proposta da Stokes una procedura per il calcolo di soluzioni periodiche in un problema di propagazione delle onde debolmente nonlineare. Nel 1892 sarebbe toccato a Poincaré rivoluzionare il mondo della dinamica col suo famoso trattato sulla meccanica celeste [33], in cui,

Capitolo 2

partendo da un lavoro di Linstedt del 1882, presentava una tecnica per il calcolo del periodo di rivoluzione dei corpi celesti, tenendo conto di alcuni termini nonlineari. Tale tecnica, nota col nome di “Linstedt–Poincaré”, ha trovato un’importante generalizzazione nel metodo delle “scale multiple”, che verrà descritto successivamente.

Durante l’ultimo secolo i problemi di dinamica nonlineare hanno interessato enormemente gli studiosi: parallelamente alle procedure numeriche, sono state sviluppate tecniche perturbative estremamente sofisticate, che, unite ai potenti strumenti di calcolo oggi a disposizione, consentono di indagare efficacemente il comportamento nonlineare di sistemi più o meno complessi, con applicazioni nei più svariati ambiti della scienza e della tecnica.

Molte applicazioni alla dinamica strutturale ed, in particolare, al moto delle travi, sono state introdotte da A. H. Nayfeh [27, 29], ai cui studi si farà riferimento costante nel seguito; tuttavia, la maggior parte di tali applicazioni riguarda l’analisi di nonlinearietà di tipo geometrico. Infatti, lo studio delle nonlinearietà costitutive mediante queste tecniche si presenta estremamente difficoltoso, a causa della natura isteretica e fortemente nonlineare dei legami costitutivi.

L’equazione costitutiva di una trave costituita da materiale non resistente a trazione, introdotta nel capitolo 1, rappresenta il comportamento dinamico di un sistema a basso grado di dissipazione e, nell’ipotesi di piccolezza degli spostamenti trasversali, si presta agevolmente all’impiego di tecniche analitico–numeriche di tipo perturbativo. In particolare, scritto il problema dinamico in termini variazionali, sarà possibile applicare una particolare tecnica di “averaging”, nota come metodo della “Lagrangiana media”, che consentirà di superare la complessità analitica del legame costitutivo e di ottenere alcune semplici soluzioni approssimate.

Nel seguito di questo capitolo vengono sinteticamente descritti alcuni fenomeni caratteristici del comportamento nonlineare dei sistemi a più gradi di libertà, con particolare riferimento alle vibrazioni flessionali di una trave; quindi, viene presentata una breve rassegna delle tecniche perturbative impiegate nel seguito della tesi.

2.1 Alcuni fenomeni caratteristici del comportamento nonlineare

La maggior parte dei fenomeni riscontrati in natura presenta caratteristiche più o meno marcate di nonlinearietà: il comportamento lineare, ossia caratterizzato da proporzionalità diretta fra causa ed effetto, deve essere considerato come un caso limite o come un’approssimazione di quello reale.

Le fonti di nonlinearità all'interno di un sistema possono essere molteplici. Ad esempio, se si considera il problema della trave, è possibile distinguere tre principali cause di comportamento nonlineare: l'eccessiva deformabilità della trave oppure la presenza di forti carichi possono generare grandi deformazioni, la cui influenza sull'equilibrio della struttura può diventare non più trascurabile (*nonlinearità geometrica*); il materiale di cui è costituita la trave oppure alcune sue sezioni possono essere caratterizzate da un legame costitutivo di tipo nonlineare (*nonlinearità costitutiva*); infine, possono essere presenti masse concentrate la cui inerzia, durante il moto della trave, fornisce un contributo non più trascurabile all'equilibrio dinamico (*nonlinearità inerziale*).

Un'ulteriore classifica della nonlinearità di un sistema può essere fatta in base al tipo di equazioni che meglio approssimano il suo comportamento dinamico; ad esempio, ipotizzando di impiegare delle semplici espressioni polinomiali per approssimare i termini nonlineari, la prevalenza dei termini quadratici caratterizza la *nonlinearità quadratica*, mentre la prevalenza di quelli cubici caratterizza la *nonlinearità cubica*. Ad “ordini” diversi di nonlinearità corrispondono differenti tipologie di fenomeni, al punto che molti Autori usano trattare separatamente le nonlinearità cubiche da quelle quadratiche [27, 29].

Gli effetti dei termini nonlineari sulla risposta dinamica dei sistemi sono molteplici e possono essere estremamente vistosi.

La nonlinearità modifica in maniera sostanziale alcune caratteristiche dinamiche, come le frequenze proprie di oscillazione. Ad esempio, nel caso di una trave di luce finita, la presenza di termini nonlineari causa una forte dipendenza delle frequenze proprie dall'ampiezza delle oscillazioni. In un sistema che presenta fenomeni di “softening”¹, l'abbattimento della rigidità del sistema all'aumentare delle deformazioni porta ad una diminuzione delle frequenze proprie; al contrario, i sistemi con “hardening” sono caratterizzati da rigidità e frequenze nonlineari crescenti all'aumentare dell'ampiezza delle oscillazioni.

Pertanto, in campo nonlineare si perde la nozione di frequenze proprie come caratteristiche intrinseche del sistema: al contrario, esse variano con le deformazioni iniziali ed al variare dei carichi applicati. Un primo, importante obiettivo dello studioso sarà proprio quello di individuare delle funzioni in grado di descrivere tali dipendenze, sia pur in modo approssimato.

¹Si dice che un sistema presenta fenomeni, rispettivamente, di “softening” o “hardening” quando è caratterizzato da una diminuzione o un aumento della rigidità al crescere della deformazione.

Capitolo 2

Si noti, tuttavia, che la presenza dello smorzamento viscoso tende ad attenuare il fenomeno di variazione delle frequenze nonlineari: in questo caso, infatti, è possibile verificare che le frequenze tendono asintoticamente al valore elastico lineare, tanto più velocemente quanto maggiore è il grado di smorzamento del sistema.

Un altro importante fenomeno nonlineare è la distorsione armonica della risposta del sistema, sia per oscillazioni libere che in presenza di forzanti. Si immagini, ad esempio, di studiare le oscillazioni libere di una sezione della trave per effetto di una deformazione iniziale isomorfa al primo modo di vibrare. Il caso elastico fornisce un'oscillazione armonica semplice con frequenza uguale a quella propria del primo modo di vibrare; la risposta nonlineare, invece, oltre a presentare una frequenza fondamentale diversa da quella elastica, sarà caratterizzata dalla nascita di armoniche aventi frequenza multipla di quella fondamentale: si tratta delle cosiddette frequenze superarmoniche. In particolare, un sistema con nonlinearietà cubica esibirà soltanto armoniche di grado dispari, mentre in nonlinearietà quadratica potranno essere presenti tutte le frequenze multiple della fondamentale.

Per piccole nonlinearietà è possibile dimostrare che l'ampiezza delle superarmoniche si mantiene estremamente ridotta rispetto a quella della fondamentale: pertanto, la risposta del sistema può essere assimilata a quella di un'armonica semplice. Tuttavia, aumentando il grado di nonlinearietà del sistema, il fenomeno si mostra via via più vistoso. Al limite, quando il termine nonlineare diventa prevalente su quello lineare, la risposta del sistema diventa caotica; si parla, in questo caso, di “attrattori caotici (strani)” [36], ovvero di posizioni di equilibrio intorno alle quali è possibile un moto confinato ma non più periodico. Ne rappresentano un esempio le oscillazioni di una trave soggetta ad un carico coincidente con quello critico di Eulero intorno alla sua configurazione instabilizzata.

Spesso, per riconoscere l'eventuale nonlinearietà di un sistema, i tecnici passano attraverso la costruzione in laboratorio delle curve “FRF (frequency response function), ovvero delle curve che descrivono il variare dell'ampiezza e della fase delle oscillazioni con la frequenza della forzante. La distorsione delle curve FRF è sintomo inequivocabile di comportamento nonlineare [27, 40]: individuarne l'espressione, o una sua approssimazione, costituisce un'obiettivo fondamentale nello studio di un sistema nonlineare.

Come è noto, in campo elastico la curva ampiezza–frequenza di un oscillatore semplice è simmetrica e presenta un unico picco intorno alla sua frequenza propria, in corrispondenza della risonanza. In presenza di termini nonlineari, invece, la curva perde la sua simmetria ed il suo picco tende a spostarsi verso sinistra o destra, a seconda rispettivamente che il sistema esibisca comportamento “softening” oppure “hardening”. In figura

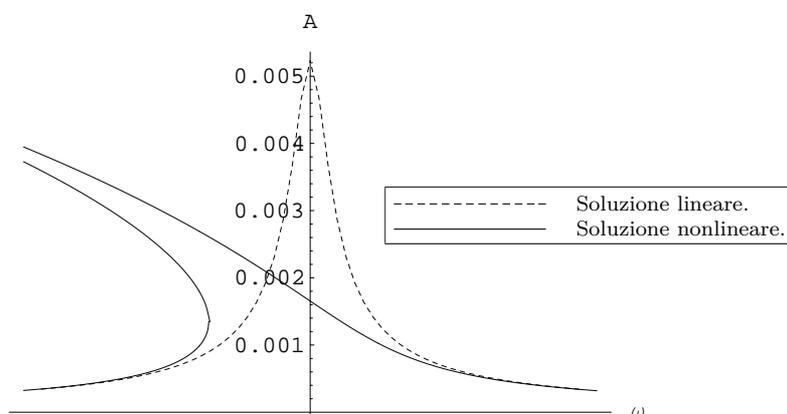


Figura 2.1. Curve frequenza–ampiezza per la sezione di mezzeria di una trave appoggiata: comportamento “softening”.

2.1 è mostrata la funzione FRF relativa alla mezzeria di una trave semplicemente appoggiata, soggetta ad una nonlinearità cubica di tipo “softening”, per valori della frequenza della forzante prossimi a quello della frequenza del primo modo di vibrare.

La dissimmetria della curva FRF porta con sé almeno due importanti conseguenze: l’abbattimento dell’ampiezza delle oscillazioni in corrispondenza della risonanza elastica e la perdita di univocità della soluzione.

Il primo fenomeno, estremamente vistoso, può essere collegato, in modo intuitivo, alla variazione della frequenza propria nonlineare con la deformazione: l’oscillatore non entra in risonanza per una frequenza della forzante uguale a quella propria elastica, ma tende a spostare il picco della risposta su frequenze rispettivamente più basse o più elevate, a seconda che il sistema tenda a diminuire o ad aumentare di rigidità con la deformazione.

La nuova forma assunta dalla funzione FRF mostra che, su alcuni intervalli, ad una frequenza della forzante vengono associate tre possibili ampiezze; il verificarsi di una o di un’altra soluzione dipende dalle condizioni iniziali. Si tratta di un fenomeno estremamente pericoloso, in quanto una variazione anche minima dei valori delle condizioni iniziali può provocare il “salto” della soluzione da un ramo all’altro della curva.

Allontanandosi dalla frequenza elastica del sistema, la funzione FRF nonlineare presenta alcuni picchi di intensità via via decrescente, per frequenze della forzante uguali ad alcuni multipli interi o sottomultipli di quella elastica: si parla rispettivamente di risonanze subarmoniche e superarmoniche. Altri fenomeni di amplificazione della risposta si possono verificare per effetto di eccitazioni combinate – somma di due o più eccitazioni

Capitolo 2

armoniche –, per particolari combinazioni delle frequenze eccitatrici e di quella fondamentale elastica. I coefficienti che scatenano questi fenomeni di risonanza cosiddetta “secondaria” – in contrapposizione alla “primaria”, che si verifica per una frequenza dell’eccitazione vicina a quella fondamentale elastica – possono essere calcolati in base all’ordine della nonlinearità.

Se si considerano i sistemi a più gradi di libertà ed i sistemi continui, si incorre in un’altra ed importante categoria di fenomeni nonlineari: si tratta delle risonanze interne e, più in generale per i sistemi continui, delle interazioni modali.

In un sistema a più gradi di libertà la presenza di termini nonlineari provoca la nascita, all’interno delle equazioni del moto, di termini di accoppiamento fra i modi di vibrare: pertanto, le ampiezze e le frequenze relative a ciascun modo di vibrare saranno dipendenti da quelle relative a tutti gli altri modi.

Un importante esempio di forte accoppiamento fra le equazioni modali si verifica quando due o più frequenze del sistema hanno valori fra loro commensurabili: si parla, in questo caso, di risonanza autoparametrica o interna. In particolare, per nonlinearità quadratiche una risonanza interna può esistere se $\omega_m \approx 2\omega_n$ oppure se $\omega_q \approx \omega_n \pm \omega_m$, mentre per una nonlinearità di tipo cubico il fenomeno si verifica se $\omega_m \approx 3\omega_n$, oppure se $\omega_q \approx 2\omega_n \pm \omega_m$, oppure ancora se $\omega_q \approx \omega_n \mp \omega_m \mp \omega_p$.

Per una trave di lunghezza finita, la presenza di una risonanza interna è legata alla geometria, al tipo di vincolo, all’ordine della nonlinearità; esempi di commensurabilità delle frequenze sono, per una trave appoggiata $\omega_3 = 2\omega_2 + \omega_1$, per una trave incastrata e appoggiata $\omega_2 \approx 3\omega_1$, per una trave doppiamente incastrata $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$.

L’esistenza di una risonanza interna fa sentire i suoi effetti sia sulle oscillazioni libere che su quelle forzate, e provoca una forte redistribuzione delle energie fra i modi coinvolti. La sua pericolosità risiede nel fatto che, tipicamente, l’energia viene trasferita dai modi ad alta frequenza a quelli a bassa frequenza, provocando un’amplificazione delle ampiezze relative ai primi modi di vibrare. Pertanto, una eccitazione ad alta frequenza e piccola ampiezza può trasformarsi in un’eccitazione a bassa frequenza ed ampiezza più elevata, con conseguenze potenzialmente dannose. Talvolta, gli ingegneri sfruttano questo fenomeno nel controllo delle vibrazioni ad alta frequenza, trasferendo l’energia dal sistema desiderato ad un sistema secondario, che funziona da smorzatore.

Fenomeni simili possono verificarsi nella risposta di un sistema a più gradi di libertà ad un’eccitazione armonica ad alta frequenza, quando il valore della frequenza della forzante può essere ottenuto come combinazione dei valori delle sue frequenze proprie. Si parla, in questo caso di “risonanza

combinata”. Per il verificarsi di tale fenomeno si deve avere

$$p\Omega = \sum_{n=1}^N a_n \omega_n, \quad (2.1)$$

dove N rappresenta il numero di gradi di libertà del sistema e, detto M l'ordine della nonlinearity per il sistema considerato, vale la relazione

$$p + \sum_{n=1}^N |a_n| = M. \quad (2.2)$$

Da quanto sinteticamente descritto emerge una vasta gamma di fenomeni inattesi e potenzialmente pericolosi, che, associati ai numerosi esempi di fallimenti strutturali dovuti ad instabilità dinamica o mancato controllo delle vibrazioni, giustificano l'estrema cautela con cui gli ingegneri si avvicinano alla progettazione dei sistemi nonlineari.

Tuttavia, grandi passi in avanti sono stati fatti nello studio e nella comprensione di tali fenomeni grazie al confronto fra i dati ottenuti sperimentalmente e quelli ottenuti per via analitico-numerica [27, 29]. Inoltre, occorre sottolineare che i fenomeni descritti finora sono caratteristici dei sistemi a bassa dissipazione di energia: la presenza di elevati smorzamenti, siano essi caratteristici del sistema oppure introdotti artificialmente mediante smorzatori, ne riduce fortemente gli effetti.

2.2 Metodi perturbativi per lo studio di problemi di dinamica nonlineare

Fra i numerosi metodi messi a punto per lo studio di sistemi debolmente nonlineari, si richiamerà l'attenzione sui due di più comune ed efficace impiego: il metodo delle scale multiple” ed i metodi di “averaging”.

Innanzitutto, occorre precisare che il termine “*debolmente*” nonlineare può indicare almeno due concetti differenti: il sistema ha caratteristiche tali da discostarsi solo leggermente dal comportamento lineare, oppure lo studio viene spinto in campo nonlineare solo per un intorno limitato della soluzione elastica.

Quest'ultimo caso è senz'altro il più frequente: impiegando un metodo perturbativo, infatti, lo studioso si prefigge di ottenere soluzioni approssimate ottenute dalla “perturbazione” di una soluzione già esistente, spesso coincidente con quella elastica, e valide soltanto in un intorno limitato di essa. D'altra parte, spingersi oltre nel comportamento nonlineare significa

Capitolo 2

incorrere in comportamenti complessi e difficilmente riproducibili mediante modelli analitici.

Tuttavia, come sarà precisato meglio in seguito, esistono metodi perturbativi che si prestano ad indagare anche il comportamento di sistemi con forti caratteristiche di nonlinearità, purchè, ovviamente, si possa pensare all'esistenza di soluzioni periodiche.

2.2.1 Il metodo delle scale multiple

Il moto della maggior parte dei sistemi nonlineari autonomi è riconducibile, una volta effettuate le opportune adimensionalizzazioni, ad una o più equazioni nella forma

$$\ddot{\eta} + K\eta + \varepsilon f(\eta) = 0 \quad (2.3)$$

dove K è la rigidità elastica del sistema, $f(\eta)$ è una funzione che racchiude i termini nonlineari, ε rappresenta un parametro adimensionale di piccolezza, tipico del problema in esame.

Il metodo delle scale multiple, che nella forma più semplice viene spesso indicato come “metodo del two-timing”, può essere considerato un'estensione del metodo di “Linsetdt–Poincaré” introdotto in [33].

Esso si basa sulla seguente, importante osservazione: se un problema dinamico nonlineare ammette una soluzione oscillatoria periodica o quasi-periodica, come succede nei problemi debolmente nonlineari, esistono alcuni parametri di tale soluzione che esibiscono variazioni temporali più lente rispetto ad altri. Ad esempio, se il sistema risponde ad una sollecitazione dinamica approssimabile come armonica semplice, si può far riferimento alla situazione descritta in figura 2.2, in cui a e β – rispettivamente l'ampiezza e lo sfasamento della risposta nonlineare – variano, su ogni ciclo, in maniera molto più lenta dello spostamento trasversale u .

Questa osservazione può essere descritta matematicamente mediante l'introduzione di più scale temporali T_n definite dalla relazione

$$T_n = \varepsilon^n \cdot t, \quad (2.4)$$

dove T_0 rappresenta, evidentemente, il tempo “vero” in cui avvengono le oscillazioni, mentre i T_i con $i > 0$ rappresentano le scale lente dei tempi in cui avvengono le variazioni dei parametri nonlineari. La soluzione del problema 2.3 viene sviluppata in serie di Taylor rispetto ad ε nella forma seguente:

$$\eta = \eta_0(T_0, T_i) + \varepsilon\eta_1(T_0, T_i) + \varepsilon^2\eta_2(T_0, T_i) + \dots \quad (2.5)$$

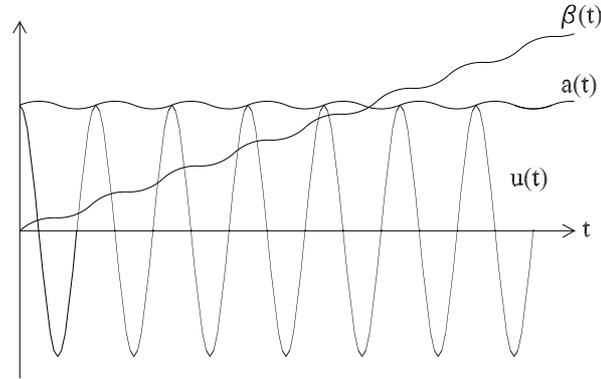


Figura 2.2. Variazione dell'ampiezza a , dello sfasamento β e dello spostamento trasversale u col tempo per un'oscillazione debolmente nonlineare.

La presenza nella 2.5 di un numero di variabili superiore a quello di partenza, pur aumentando l'onerosità dei calcoli, consente una maggior flessibilità nei passaggi intermedi che può essere sfruttata per imporre le condizioni di uniformità dello sviluppo o, il che è equivalente, di periodicità della soluzione; quindi, è possibile “riassorbire” le variabili in eccesso negli ultimi passaggi.

Sviluppata la $f(\eta)$ in serie di Taylor rispetto ad ε ed inserendo le 2.5 nelle equazioni del moto (ad esempio le 2.3) è possibile ottenere un gerarchia di equazioni, una per ogni ordine dello sviluppo, schematizzabile come segue

$$\begin{aligned} E_0[T_0, \eta_0] &= 0, \\ E_1[T_0, \eta_1] &= F_1[T_0, T_1, \eta_0], \\ E_n[T_0, \eta_n] &= F_n[T_0, \dots, T_n, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Le E_i , omogenee associate a ciascuna equazione, sono classiche equazioni di moto pendolare rispetto a T_0 e, pertanto, possono essere risolte senza problemi. Le F_i , invece, rappresentano i termini nonlineari di ordine i -esimo. Si osservi che le F_i dipendono esclusivamente dalle η calcolate agli ordini precedenti; pertanto, è possibile risolvere in sequenza tutte le equazioni del sistema 2.2.1².

Le soluzioni particolari di ciascuna delle 2.2.1 sono caratterizzate dalla presenza di termini che tendono a crescere col tempo. Tali termini, detti

²Si noti che le equazioni di ordine 0 sono caratterizzate dall'assenza della parte nonlineare.

Capitolo 2

“secolari”³, riducono l’intervallo di validità della soluzione che non è limitata nel tempo: si dice allora che la soluzione ottenuta non è uniformemente valida in t .

Imponendo la periodicità della $\eta(t)$, oppure, in modo equivalente, annullando i termini secolari si arriva alla scrittura delle *equazioni di modulazione del sistema*: si tratta delle equazioni che descrivono la variazione sui tempi lenti – da cui il termine “modulazione” – dei parametri nonlineari del sistema.

Si noti che, in generale, le equazioni di modulazione sono ancora nonlineari: tuttavia, la loro scrittura rappresenta un notevole progresso nella soluzione del problema. Infatti, esse spostano il problema dalla ricerca di una funzione velocemente oscillante – la $\eta(t)$ – a quella di funzioni – ampiezze e sfasamenti – lentamente variabili nel tempo: nell’impiego di soluzioni numeriche, questo fatto consente di utilizzare passi di integrazione molto grandi e di diminuire efficacemente i problemi di convergenza. Inoltre, in molte circostanze, esse possono essere risolte analiticamente, perché ridotte ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie o, addirittura, di equazioni algebriche.

Il metodo delle scale multiple è probabilmente il più impiegato fra i metodi perturbativi; se ne trovano dettagliate descrizioni da parte di numerosi autori, fra cui si ricordano [18, 27, 39].

Nel seguito della tesi tale metodo verrà impiegato nel capitolo 3 per la discussione di un approccio semplificato al problema delle vibrazioni flessionali di una trave di materiale NRT. Pertanto, si rimanda a tale capitolo per una descrizione più completa dei dettagli tecnici.

Il metodo delle scale multiple presenta alcuni importanti caratteristiche, che ne rendono sistematico l’impiego da parte degli studiosi: fra tutte, l’estrema semplicità e chiarezza concettuale e la versatilità nell’impiego per problemi a più gradi di libertà e per sviluppi di ordine superiore al primo.

Tuttavia, bisogna osservare che esso si presta esclusivamente allo studio di problemi debolmente nonlineari.

Infatti, condizione necessaria al suo impiego è che tutti i termini dell’equazione da risolvere siano sviluppati in forma polinomiale; inoltre, deve esistere una rigida gerarchia di grandezze fra i termini dell’equazione, che ne consenta successivamente la separazione per differenti ordini di ε . Tutto questo pone pesanti limitazioni qualora si vogliano studiare funzioni più

³Il termine “secolare” è di derivazione astronomica: nei problemi di astronomia, infatti, la nonlinearietà produce effetti che diventano apprezzabili in tempi lunghissimi, nell’ordine di un secolo.

complesse o quando risulti difficile stabilire, all'interno dell'equazione, la prevalenza di alcuni termini sugli altri.

2.2.2 I metodi di averaging

Le tecniche di “averaging” possono considerarsi una generalizzazione dell'idea proposta da Krylov e Bogoliubov in [19] nel 1937 e successivamente sviluppata per i sistemi non conservativi da Mitropolski.

Alla base del metodo, come nelle scale multiple, è l'idea di poter decomporre la soluzione in una parte velocemente variabile, associata al comportamento elastico, ed una variabile lentamente, associata a quello nonlineare.

Il primo passaggio, obbligato, consiste nell'ipotizzare una forma della soluzione ed effettuare un cambiamento di variabili, in modo da riportare il problema ad un sistema di equazioni in “forma standard” (terminologia introdotta da Bogoliubov).

Tipicamente, esprimendo la soluzione in serie di Fourier e troncando lo sviluppo al primo ordine, si scrive

$$\eta = a(t)\cos(\omega t + \beta(t)), \quad (2.7)$$

dove ω rappresenta la frequenza lineare del sistema.

Introducendo tale espressione all'interno della 2.3, dopo alcune manipolazioni si ottiene

$$\dot{w} = \varepsilon g(w, t) + O(\varepsilon^2) \quad (2.8)$$

con $w = [a(t), \beta(t)]^T$.

Le 2.8 rappresentano la forma standard dell'equazione 2.3. Si noti che la trasformazione effettuata ha ridotto un'equazione nonlineare del secondo ordine a due equazioni nonlineari del primo.

Le equazioni di modulazione si ottengono “mediando” – da cui il nome di metodo di “averaging” – le 2.8 sul periodo elastico dell'oscillazione: tale operazione viene effettuata ipotizzando i parametri a e β costanti durante l'integrazione, ipotesi che è tanto meglio verificata quanto più piccoli si mantengono i valori delle derivate a_t e β_t – si veda la figura 2.2.

È evidente l'equivalenza concettuale col metodo delle scale multiple: la periodicità della soluzione è stata imposta, in questo caso, direttamente nella forma della soluzione, mentre la separazione della parte nonlineare da quella elastica viene effettuata tramite l'integrazione su t – tempo “veloce” –, laddove, nelle scale multiple, si agiva sulla separazione degli ordini di grandezza.

Capitolo 2

Altri dettagli sulla manipolazione delle equazioni del moto con tecniche di averaging si possono reperire in numerosi articoli e libri di testo, fra cui si ricordano [18, 27].

In questa sede, invece, si è rivelata particolarmente interessante l'applicazione di tali tecniche in un contesto variazionale, partendo, cioè, non più dalle equazioni del moto ma dalla Lagrangiana del sistema.

I principi basilari che regolano tale approccio, noto come “metodo della Lagrangiana media”, vengono brevemente descritti nel paragrafo seguente; esso verrà esposto in dettaglio nei capitoli 3, 4, dove sarà presentata una sua applicazione allo studio del moto di una trave costituita da materiale N.R.T.

Il metodo della Lagrangiana media

Si consideri il seguente principio variazionale, derivato dal principio di minima azione di Hamilton

$$\delta J = \delta \int L(\eta, \eta_t) dt = 0, \quad (2.9)$$

dove $L = T - V$ è la Lagrangiana del sistema nonlineare descritto da 2.3.

Impiegando la trasformazione 2.7, si può definire la funzione

$$\mathcal{L} = \int_0^{T_{el}} L(\eta, \eta_t) dt = \mathcal{L}(a, a_t, \beta, \beta_t), \quad (2.10)$$

dove T_{el} rappresenta il periodo proprio elastico del sistema e l'integrazione viene fatta sotto l'ipotesi – tipica dei metodi di averaging – di costanza dei parametri a e β nell'intervallo di integrazione; tale ipotesi implica la piccolezza delle funzioni a_t e β_t e consente, generalmente, di trascurare nell'espressione della Lagrangiana i termini quadratici in $a_t^2, \beta_t^2, a_t\beta_t$.

La \mathcal{L} , una sorta di “Lagrangiana media” del sistema, è funzione dei soli parametri nonlineari a, β lentamente variabili nel tempo e delle loro derivate.

A questo punto, è possibile introdurre un nuovo principio variazionale “mediato” [29, 39]

$$\delta \bar{J} = \delta \int \mathcal{L}(a, a_t, \beta, \beta_t) dt = 0, \quad (2.11)$$

da cui, scrivendo le equazioni di Eulero–Lagrange su \mathcal{L} rispetto ai parametri a e β , è possibile ottenere le equazioni di modulazione del sistema.

Una dimostrazione rigorosa della 2.11 è nient'affatto banale; tuttavia, una sua giustificazione intuitiva è abbastanza agevole, chiamando nuovamente in causa il concetto delle scale multiple temporali.

L'operazione di integrazione della Lagrangiana sul periodo elastico dell'oscillazione ne elimina la dipendenza dai tempi "veloci", rispetto a cui i parametri a e β si possono considerare costanti; la funzione \mathcal{L} , che nel caso elastico è identicamente nulla, rappresenta una sorta di residuo nonlineare ed esprime la dipendenza del problema dai tempi "lenti". In questo senso, la 2.11 può considerarsi un principio variazionale scritto rispetto alla scala lenta dei tempi.

L'approccio variazionale, pur essendo più adatto alla descrizione dei sistemi conservativi, può essere impiegato anche in casi più generali. Infatti, a partire dal principio generalizzato di Hamilton, la 2.11 può essere generalizzata come segue

$$\delta \bar{J} = \int [\delta \mathcal{L}(a, a_t, \beta, \beta_t) - \delta \bar{W}_{nc}(a, a_t, \beta, \beta_t)] dt = 0, \quad (2.12)$$

essendo \bar{W}_{nc} il lavoro virtuale delle forze non conservative – generalmente smorzamento e forzanti esterne –, anch'esso mediato sul periodo elastico del sistema. La 2.12 viene generalmente impiegata sotto l'ipotesi

$$\bar{W}_{nc} = O(\varepsilon). \quad (2.13)$$

che obbliga i termini non conservativi ad apparire nella 2.12 nello stesso ordine di grandezza di quelli nonlineari.

Nel passaggio dai sistemi discreti a quelli continui è possibile un'ulteriore, importante generalizzazione del metodo. Partendo dal principio

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (L - W_{nc}) dx dt = 0, \quad (2.14)$$

valido per ogni coppia di istanti t_1 e t_2 e di punti x_1 e x_2 , è stato proposto da Nayfeh in [27] un principio variazionale "mediato", scritto per una trave di luce L . Esso è descritto dall'espressione

$$\delta \int (\bar{\mathcal{L}} - \bar{\bar{W}}_{nc}) dt = 0, \quad (2.15)$$

con

$$\bar{\mathcal{L}} - \bar{\bar{W}}_{nc} = \int_0^{T_{el}} \int_0^L (L - W_{nc}) dx dt, \quad (2.16)$$

dove T_{el} il periodo elastico fondamentale dell'oscillazione. Ad esempio, nell'impiego della 2.16 per lo studio di un fenomeno di risonanza primaria, T_{el} può esser fatto coincidere con la frequenza del primo modo di vibrare elastico della trave.

2.2.3 I sistemi continui; la trave

Il moto dei sistemi continui nonlineari è retto da una o più equazioni differenziali nonlineari alle derivate parziali e da un sistema di equazioni, anch'esse, in generale, nonlineari, che descrivono le condizioni al contorno.

In tale contesto, l'impiego di tecniche analitiche perturbative si presenta estremamente difficoltoso. In molti casi, tuttavia, quando è possibile impiegare il metodo di separazione delle variabili nella scrittura della soluzione, il problema può essere notevolmente semplificato.

È quanto accade, ad esempio, nello studio delle vibrazioni trasversali di una trave di lunghezza finita, soggetta a debole nonlinearietà. In questo caso, infatti, si può ritenere che, trascorso un breve transitorio, tutti i punti della trave si muovano di moto sincrono. Tale ipotesi, che equivale ad imporre una sorta di "stazionarietà" del moto in direzione longitudinale, consente di scrivere la soluzione nella forma seguente

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t), \quad (2.17)$$

dove v rappresenta lo spostamento trasversale dei punti della trave ed n è un numero intero, sufficientemente grande da consentire una descrizione accurata del moto⁴. Le funzioni ϕ_i rappresentano, a tutti gli effetti, delle "forme modali" nonlineari [27]: è facile intuire che, come nel caso elastico, le 2.17 consentono di descrivere il moto di ciascun punto della trave mediante un numero finito di funzioni oscillatorie, definite come *modi normali nonlineari*.

Per la costruzione dei tali modi nonlineari sono stati proposti in letteratura due approcci differenti: partendo dalla 2.17, si assumono in un caso note a priori le funzioni $q_i(t)$ – si parla di metodi di discretizzazione temporale –, nell'altro le funzioni $\phi_i(x)$ – metodi di discretizzazione spaziali.

Nel seguire il primo approccio, le funzioni $q_i(t)$ sono scelte armoniche, di frequenza coincidente con le frequenze proprie della trave o suoi multipli interi: è il metodo del *bilancio delle armoniche*. Questo metodo porta alla costruzione di un sistema di equazioni differenziali nonlineari ordinarie per le $\phi(x)$, da risolvere con l'aiuto delle condizioni al contorno.

Nel secondo approccio, invece, le $\phi_i(x)$ sono spesso scelte coincidenti con le forme modali elastiche della trave. Sfruttando le loro caratteristiche di ortogonalità, è possibile ridurre le equazioni che reggono il problema ad un insieme di equazioni differenziali ordinarie nonlineari per le $q_i(t)$, a cui

⁴La 2.17 viene comunemente impiegata in ambito lineare e costituisce il punto di partenza dell'analisi modale.

possono essere applicate le tecniche perturbative già discusse nei paragrafi precedenti. Tale procedura di discretizzazione spaziale, nota come *metodo di Galerkin*, è frequentemente impiegata anche nella risoluzione di problemi elastici.

In letteratura è più frequente il ricorso al secondo approccio piuttosto che al primo: i metodi di discretizzazione spaziale, infatti, hanno caratteristiche di maggiore semplicità e generalità rispetto al metodo del bilancio delle armoniche, per quanto quest'ultimo consenta, in alcuni casi, di ottenere soluzioni in maniera molto rapida ed efficiente [40].

Il problema fondamentale nell'impiego delle 2.17 consiste nell'individuare correttamente il numero n di modi di vibrare da inserire nel calcolo. Infatti, aumentare il numero di modi significa complicare notevolmente i passaggi; d'altra parte, impiegarne un numero insufficiente può portare ad errori clamorosi, specie quando siano presenti fenomeni di risonanza interna.

Molti degli studi presenti in letteratura vengono condotti impiegando un solo modo di vibrare: in effetti, tale approccio fornisce risultati più che adeguati quando si studino fenomeni di risonanza sul primo modo o oscillazioni libere con deformata iniziale isomorfa al primo modo, sempre che si possano escludere fenomeni di risonanza interna [27, 28, 29]. Negli altri casi, l'impiego di una soluzione unimodale va impiegato con la massima cautela.

Recentemente, un numero crescente di Autori sta sviluppando un nuovo approccio allo studio dei sistemi continui: si tratta di tecniche che non prevedono la discretizzazione del problema, ma, al contrario, impiegano metodi perturbativi tradizionali, come quello delle scale multiple, per “attaccare” direttamente le equazioni alle derivate parziali. In questo modo le equazioni originarie vengono ridotte ad un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali, da risolvere in sequenza. L'imposizione della periodicità della soluzione – the “solvability” condition – porta ad equazioni di modulazione che, in generale, differiscono da quelle ottenute con il metodo di Galerkin; inoltre, è possibile ottenere correzioni anche sulle forme modali, oltre che sulle frequenze e sulle ampiezze. Le differenze, in alcuni casi, possono essere rilevanti [28].

Tuttavia, occorre sottolineare che la tecnica di attacco diretto alle equazioni del moto si presenta molto onerosa dal punto di vista computazionale: infatti, almeno finora, le applicazioni sono state ristrette ad una casistica piuttosto limitata. Inoltre, gli studi effettuati sembrano mostrare una sostanziale equivalenza fra approccio diretto e tecniche di discretizzazione per quanto riguarda il calcolo delle deformate e delle caratteristiche dinamiche dei modi più bassi; la coincidenza dei risultati è ottima, in particolare, quando si studino fenomeni incentrati prevalentemente sul primo modo di vibrare.

Capitolo 3

Studio delle vibrazioni flessionali di una trave di lunghezza finita caratterizzata da un'equazione costitutiva di tipo cubico

3.1 La parabola cubica: un'espressione approssimata del legame $M - \chi$ per una sezione rettangolare costituita da materiale non resistente a trazione

Si consideri una trave di sezione rettangolare $b \times h$, costituita da un materiale non resistente a trazione ed in grado di sopportare tensioni di compressione infinite, soggetta a sforzo normale costante lungo l'asse.

L'equazione costitutiva che lega, per ciascuna sezione della trave, il momento flettente M alla curvatura χ assume la forma seguente, come illustrato nel capitolo 1

$$\frac{M}{\rho b h} = f(\chi) = c^2 \chi \quad \text{per } |\chi| \leq \alpha^* \quad (3.1a)$$

$$\frac{M}{\rho b h} = f(\chi) = c^2 \alpha^* \text{Sign}(\chi) \left(3 - 2 \sqrt{\frac{\alpha^*}{|\chi|}} \right) \quad \text{per } |\chi| > \alpha^*, \quad (3.1b)$$

essendo α^* il valore della curvatura per cui la sezione presenta la prima fessurazione.

Nella figura 3.1 è mostrata con la linea continua una rappresentazione grafica del legame costitutivo 3.1, ottenuta per $c = 200 \text{ m}^2/\text{sec}$ ed $\alpha^* = 0.0008 \text{ m}^{-1}$. Il grafico evidenzia il comportamento nonlineare della relazione costitutiva. In particolare, si può osservare che, una volta raggiunto il valore di prima fessurazione, all'aumentare della curvatura la sezione mostra un rapido abbattimento della rigidità, ed il momento flettente tende velocemente ad un asintoto orizzontale che costituisce il valore limite ultimo sopportabile dalla sezione; tale valore è di tre volte più grande del momento flettente di prima fessurazione.

Lo studio del moto di una trave con questo legame costitutivo presenta notevoli difficoltà sul piano analitico, a causa soprattutto delle diverse

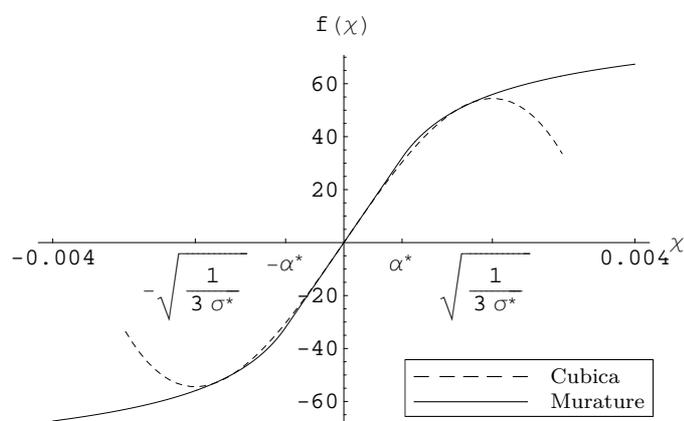


Figura 3.1. Legame costitutivo $M - \chi$

espressioni che esso assume a seconda che la sezione sia parzializzata o interamente reagente¹.

Una sua possibile approssimazione è rappresentata dalla seguente equazione

$$\frac{M}{\rho b h} = f(\chi) = c^2 \chi [1 - \sigma^*(N) \chi^2], \quad (3.2)$$

in cui il legame costitutivo è descritto da un polinomio di terzo grado; il parametro $\sigma^*(N)$, funzione dello sforzo normale agente sulla sezione, rappresenta il “grado” di nonlinearità dell’equazione, in quanto indica quanto velocemente la sezione abbatta la sua rigidità all’aumentare del momento flettente.

Il legame costitutivo descritto dalla 3.2, che nel seguito denomineremo “cubico”, presenta caratteristiche di semplicità e regolarità che semplificano notevolmente l’approccio analitico al problema. In figura 3.1 ne è visibile una rappresentazione grafica (linea tratteggiata) per $\sigma^* = 80000 \text{ m}^2$. Risulta evidente dalla figura che la 3.2 approssima le 3.1 in campo nonlineare soltanto in un intorno piuttosto piccolo della curvatura limite elastica. Tuttavia, l’estrema semplicità del legame costitutivo “cubico” consente di gestire molto efficacemente le corrispondenti equazioni del moto, permettendo di risolvere differenti tipologie di problemi. Pertanto, è sembrato interessante approfondirne lo studio, sia per illustrare alcuni dei fenomeni caratteristici del comportamento nonlineare, sia per impiegare e confrontare fra loro differenti tecniche risolutive.

¹ Nel passaggio da una regione all’altra, è garantita la continuità di f e della sua derivata prima, ma non della derivata seconda.

Come sarà mostrato nei capitoli seguenti, i risultati ottenuti mediante l'equazione cubica rappresentano una buona approssimazione, valida per piccoli valori della curvatura, di quelli ottenuti usando la relazione 3.1.

3.2 Scrittura ed adimensionalizzazione delle equazioni del moto

Si consideri una trave di lunghezza finita L , di sezione rettangolare con dimensioni costanti ($b \times h$) lungo l'asse. Sia lo sforzo normale agente sulla trave noto e costante lungo l'asse. Sia essa costituita da un materiale di densità ρ per cui valga, in ciascuna sezione, l'equazione costitutiva 3.2. Sia l'altezza h della sezione sufficientemente piccola rispetto alla luce, in modo da poter trascurare la deformabilità a taglio della trave; si ipotizzi, inoltre, piccolo lo spostamento trasversale della trave e si trascurino gli effetti dello sforzo assiale e dell'inerzia rotazionale.

Siano x^* l'ascissa lungo l'asse della trave, t^* il tempo, $v^*(x^*, t^*)$ lo spostamento trasversale dell'asse, C^* il coefficiente di smorzamento viscoso, definito per unità di lunghezza, e $p^*(x^*, t^*)$ il carico trasversale agente, definito anch'esso per unità di lunghezza.

Sotto queste ipotesi, come visto nel capitolo 1, le equazioni di equilibrio dinamico e di congruenza si scrivono

$$v_{t^*t^*}^* - f(\chi)_{x^*x^*} + \frac{C^*}{\rho bh} v_{t^*}^* = \frac{p^*(x^*, t^*)}{\rho bh} \quad (3.3)$$

$$v_{x^*x^*}^* + \chi = 0, \quad (3.4)$$

essendo, in questo caso, $f(\chi)$ definita dalla 3.2.

Dalle 3.3, 3.4 si deduce l'equazione del moto trasversale della trave, data dall'espressione

$$v_{t^*t^*}^* + c^2 [v_{x^*x^*}^* (1 - \sigma^* v_{x^*x^*}^{*2})]_{x^*x^*} + \frac{C^*}{\rho bh} v_{t^*}^* = \frac{p^*(x^*, t^*)}{\rho bh}. \quad (3.5)$$

Al fine di semplificare e generalizzare la trattazione, conviene procedere all'adimensionalizzazione della relazione 3.5. Allo scopo, siano

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad t = \frac{t^*}{T}, \quad v = \frac{v^*}{L}, \quad T = \frac{L^2}{c}, \quad (3.6)$$

da cui segue

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} = \frac{1}{T^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (3.7b)$$

Sostituendo le 3.6 e 3.7 nella 3.5 e posto

$$\sigma = \frac{\sigma^*}{L^2}, \quad C = \frac{C^*T}{\rho bh}, \quad p = \frac{p^*T^2}{\rho bhL}, \quad (3.8)$$

si ottiene la seguente espressione adimensionalizzata dell'equazione del moto della trave

$$v_{tt} + [v_{xx}(1 - \sigma v_{xx}^2)]_{xx} + Cv_t = p(x, t). \quad (3.9)$$

3.3 La trave semplicemente appoggiata: soluzioni approssimate ottenute con il metodo delle scale multiple

Nella sezione seguente si studierà l'equazione 3.9 per la condizione di vincolo di semplice appoggio (vedi fig. 3.2).

Seguendo il classico procedimento usato per lo studio delle vibrazioni flessionali nonlineari di travi di lunghezza finita [27, 29] e già descritto nel capitolo 2, si esprime la soluzione della 3.9 mediante l'espressione

$$v(x, t) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \phi_n(x), \quad (3.10)$$

dove $\phi_i(x)$ sono i modi di vibrare lineari elastici della trave, ε una misura dell'ampiezza del moto, supposta piccola.

Per la trave appoggiata la 3.10 si trasforma nel modo seguente

$$v(x, t) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \sin(n\pi x). \quad (3.11)$$

La sommatoria è estesa ad un numero illimitato di modi di vibrare; come nel caso elastico, maggiore è il numero di modi considerati, maggiore è l'accuratezza della soluzione. Tuttavia, per alcuni problemi, il contributo dei modi superiori al primo può ritenersi trascurabile, a condizione che questi non siano coinvolti in una risonanza interna²; è il caso,

²Si ricorda che per una trave appoggiata soggetta a nonlinearità di tipo cubico non si riscontrano fenomeni di risonanza interna [29].

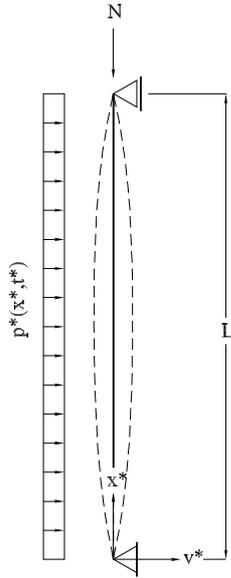


Figura 3.2. La trave semplicemente appoggiata: oscillazioni sul primo modo di vibrare.

ad esempio, delle oscillazioni libere della trave quando la sua deformazione iniziale sia isomorfa al primo modo di vibrare, oppure quello delle vibrazioni forzate in risonanza cosiddetta “primaria” (frequenza della forzante coincidente o molto vicina alla frequenza del primo modo di vibrare elastico). Come si può facilmente intuire, il troncamento della soluzione al primo modo di vibrare consente di semplificare i calcoli in maniera significativa.

La maggior parte dei risultati mostrati nel seguito sono stati ottenuti impiegando un solo modo di vibrare; tuttavia, verranno presentate anche alcune soluzioni ottenute con l’impiego di due modi di vibrare, sottolineando gli effetti sulle frequenze e sulle ampiezze modali dell’accoppiamento fra i modi indotto dalla non linearità .

3.3.1 Oscillazioni libere non smorzate

Soluzione approssimata ottenuta con un solo modo di vibrare

Nel caso di soluzione troncata al primo modo di vibrare, la 3.11 diventa

$$v(x, t) = \varepsilon \eta(t) \sin(\pi x). \quad (3.12)$$

Sostituendo la 3.12 nella 3.9 si ottiene

$$\varepsilon \eta''(t) \sin(\pi x) + \varepsilon \eta(t) \pi^4 \sin(\pi x) = \varepsilon^3 \sigma \eta^3(t) [\sin(\pi x)_{xx}]_{xx}^3. \quad (3.13)$$

Seguendo la procedura proposta in [7, 27, 29, 38] e descritta nel capitolo 2, si moltiplicano ambo i membri della 3.13 per $\sin(\pi x)$ e si integra sulla luce della trave. Procedendo in questo modo si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \eta''(t) \sin^2(\pi x) dx + \int_0^1 \eta(t) \pi^4 \sin^2(\pi x) dx = \\ = \varepsilon^2 \sigma \int_0^1 \eta^3(t) \sin(\pi x) [\sin(\pi x)_{xx}]_{xx}^3 dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Risolvendo gli integrali al primo membro della 3.14 ed integrando per parti il secondo si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \eta''(t) + \frac{1}{2} \pi^4 \eta(t) = \varepsilon^2 \sigma \eta^3(t) \\ \left\{ \sin(\pi x) [\sin(\pi x)_{xx}]_{xx}^3 \Big|_0^1 - \int_0^1 -\pi \cos(\pi x) [\sin(\pi x)_{xx}]_{xx}^3 dx \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

da cui, ricordando che $\sin(\pi x) = 0$ agli appoggi ($x = 0, x = 1$), si ottiene

$$\eta''(t) + \pi^4 \eta(t) = \frac{3}{4} \pi^8 \varepsilon^2 \sigma \eta^3(t). \quad (3.16)$$

Capitolo 3

Posto

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{4}\pi^4\varepsilon^2\sigma \quad (3.17)$$

la 3.17 diventa

$$\eta''(t) + \pi^4\eta(t) = \pi^4\bar{\varepsilon}\eta^3(t), \quad (3.18)$$

che rappresenta la classica equazione di un oscillatore semplice simmetrico tipo “Duffing”, di frequenza lineare adimensionale π^2 .

Nell'ipotesi di piccolezza del termine nonlineare al secondo membro, è possibile risolvere la 3.18 mediante metodi perturbativi. In questo paragrafo useremo il metodo delle scale multiple, descritto nel capitolo 1, sviluppando in serie di Taylor rispetto ad $\bar{\varepsilon}$. Tale coefficiente rappresenta il rapporto fra la rigidezza nonlineare e quella lineare della 3.18; il suo valore, in generale, è maggiore di quello del parametro ε legato all'ampiezza delle oscillazioni³.

Ponendo

$$\eta(t) = \eta_0(T_0, T_1) + \bar{\varepsilon}\eta_1(T_0, T_1) + O(\bar{\varepsilon}^2), \quad (3.19)$$

con

$$T_0 = t, \quad T_1 = t\bar{\varepsilon}, \quad (3.20)$$

dalle 3.20 discende

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \quad (3.21a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\bar{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1} + \bar{\varepsilon}^2\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + \dots \quad (3.21b)$$

Sostituendo la 3.19 nella 3.18, con l'aiuto di 3.21 si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2\eta_0}{\partial T_0^2} + 2\bar{\varepsilon}\frac{\partial^2\eta_0}{\partial T_0\partial T_1} + \bar{\varepsilon}^2\frac{\partial^2\eta_0}{\partial T_1^2} + \bar{\varepsilon}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial T_0^2} + 2\bar{\varepsilon}^2\frac{\partial^2\eta_1}{\partial T_0\partial T_1} + \bar{\varepsilon}^3\frac{\partial^2\eta_1}{\partial T_1^2} + \\ & + \pi^4(\eta_0 + \bar{\varepsilon}\eta_1) = \pi^4\bar{\varepsilon}(\eta_0^3 + 3\bar{\varepsilon}\eta_0^2\eta_1 + 3\bar{\varepsilon}^2\eta_1^2\eta_0 + \bar{\varepsilon}^3\eta_1^3) + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Trascurando i termini di ordine superiore ad $\bar{\varepsilon}$ ed uguagliando i coefficienti in $\bar{\varepsilon}^0$ ed $\bar{\varepsilon}$ si ricava il seguente sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie, da risolvere in sequenza

³Considerando che i valori di σ che approssimano le 3.1 per valori correnti di c , N ed L sono compresi nell'intervallo $[10^2, 10^4]$, per $\varepsilon \in [10^{-4}, 10^{-3}]$ i corrispondenti valori di $\bar{\varepsilon}$ oscillano nell'intervallo $[10^{-4}, 1]$.

ordine “0”:

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_0 = 0 \quad (3.23)$$

ordine “1”:

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_1 = \pi^4 \eta_0^3 - 2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0 \partial T_1}. \quad (3.24)$$

La soluzione della 3.23 è

$$\eta_0(t) = a(T_1) \cos(\pi^2 T_0 + \beta(T_1)), \quad (3.25)$$

dove $a(T_1)$ e $\beta(T_1)$ sono parametri non più costanti come nel caso elastico, ma variabili sulla scala lenta dei tempi.

Sostituendo la 3.25 nella 3.24 e sviluppando i termini trigonometrici al secondo membro si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_1 = & \frac{a^3 \pi^4}{4} [3 \cos(\pi^2 T_0 + \beta) + \cos(3\pi^2 T_0 + 3\beta)] + \\ & + 2\pi^2 \left[\frac{\partial a}{\partial T_1} \sin(\pi^2 T_0 + \beta) + a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} \cos(\pi^2 T_0 + \beta) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (3.26)$$

da cui, annullando i termini secolari, ossia i coefficienti delle funzioni $\cos(\pi^2 T_0 + \beta)$, $\sin(\pi^2 T_0 + \beta)$, si ottengono le equazioni di modulazione del problema

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0 \quad (3.27)$$

$$2\pi^2 a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} + \frac{3a^3 \pi^4}{4} = 0. \quad (3.28)$$

Da esse si ricava, nell'ordine di approssimazione (3.19),

$$a = \text{costante} \quad (3.29)$$

$$\beta = -\frac{3a^2 \pi^2}{8} T_1 + \bar{\beta}_0. \quad (3.30)$$

La 3.29 esprime la costanza dell'ampiezza massima delle oscillazioni, in linea con l'ipotesi di unimodalità della soluzione. La 3.30, invece, rappresenta la correzione da apportare alla frequenza lineare elastica dell'oscillazione per ottenere quella nonlineare. Si noti che nella 3.30 il termine proporzionale a T_1 è negativo, ad indicare una diminuzione di frequenza rispetto al caso elastico.

Capitolo 3

Utilizzando 3.29, 3.30, la 3.25 assume la forma seguente:

$$\eta_0(t) = a \cos(\omega t + \bar{\beta}_0) \quad (3.31)$$

con

$$\omega = \pi^2 - \frac{3}{8}\pi^2 a^2 \bar{\varepsilon} = \pi^2 - \frac{9}{32}\pi^6 \sigma a^2 \varepsilon^2 \quad (3.32)$$

l'espressione della frequenza fondamentale nonlineare del sistema.

La 3.26 diventa, dopo l'annullamento dei termini secolari

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_1 = \frac{a^3 \pi^4}{4} \cos(3\pi^2 T_0 + 3\beta). \quad (3.33)$$

Seguendo la tecnica suggerita e giustificata in [27, 29], si considera la sola soluzione particolare della 3.33, che è data dall'espressione seguente

$$\eta_1(T_0, T_1) = -\frac{a^3}{32} \cos(3\pi^2 T_0 + 3\beta). \quad (3.34)$$

Pertanto, la funzione $\eta(t)$ assume la forma

$$\eta(t) = a \cos(\omega t + \bar{\beta}_0) + \bar{\varepsilon} \left[-\frac{a^3}{32} \cos(3\omega t + 3\bar{\beta}_0) \right] + O(\bar{\varepsilon}^2), \quad (3.35)$$

dove ω è definito dalla 3.32.

Diversamente da quanto accade in campo lineare, la funzione $\eta(t)$ non è più rappresentata da un'oscillazione semplice, ma da una somma di termini di grandezza decrescente, ciascuno dei quali ha una frequenza proporzionale a quella dell'armonica fondamentale: è il fenomeno delle oscillazioni super-armoniche. In questo caso, la nonlinearietà di tipo "cubico" fa sì che compaiano nello sviluppo soltanto le superarmoniche di grado dispari (3ω , 5ω , 7ω , etc.).

Ricordando la 3.12, dalla 3.35 si ricava

$$v(x, t) = \sin(\pi x) \left[\varepsilon a \cos(\omega t + \bar{\beta}_0) - \frac{3}{128} \pi^4 \sigma (\varepsilon a)^3 \cos(3\omega t + 3\bar{\beta}_0) + \dots \right], \quad (3.36)$$

da cui, ponendo

$$\varepsilon a = A \quad (3.37)$$

si ha

$$v(x, t) = \sin(\pi x) \left[A \cos(\omega t + \bar{\beta}_0) - \frac{3}{128} \pi^4 \sigma A^3 \cos(3\omega t + 3\bar{\beta}_0) + \dots \right]. \quad (3.38)$$

La 3.38 descrive il nostro problema solo per valori della curvatura compresi nell'intervallo adimensionale $[-\sqrt{\frac{1}{3\sigma}}, \sqrt{\frac{1}{3\sigma}}]$, all'interno del quale il legame costitutivo 3.2 è crescente. Tale condizione, posto $\max |\eta(t)| \simeq |A|$, si traduce nella seguente limitazione per $|A|$

$$|A| \leq \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{1}{3\sigma}}. \quad (3.39)$$

Determinazione delle costanti iniziali

Le funzioni a (oppure A) e $\bar{\beta}_0$ sono costanti da determinare dalle condizioni iniziali.

Si consideri, ad esempio, la seguente coppia di condizioni iniziali

$$v(x, 0) = \varepsilon v_0 \sin(\pi x) \quad (3.40a)$$

$$v_t(x, 0) = 0. \quad (3.40b)$$

Seguendo la tecnica impiegata e giustificata in [27, 29] per la determinazione delle costanti iniziali, si scrivono le funzioni $a, \bar{\beta}_0$ nella maniera seguente

$$a = a_0 + \varepsilon^2 a_1 + \dots \quad (3.41a)$$

$$\bar{\beta}_0 = \beta_0 + \varepsilon^2 \beta_1 + \dots \quad (3.41b)$$

Introducendo le 3.41 nelle 3.40 e sviluppando le espressioni trigonometriche si ottiene

$$\begin{aligned} & \varepsilon (a_0 + \varepsilon^2 a_1) [\cos(\beta_0) - \varepsilon^2 \beta_1 \sin(\beta_0)] + \\ & - \frac{3}{128} \pi^4 \sigma \varepsilon^3 (a_0 + \varepsilon^2 a_1)^3 [\cos(3\beta_0) - 3\varepsilon^2 \beta_1 \sin(3\beta_0)] = \varepsilon v_0 \end{aligned} \quad (3.42a)$$

$$\begin{aligned} & - \varepsilon (a_0 + \varepsilon^2 a_1) [\sin(\beta_0) + \varepsilon^2 \beta_1 \cos(\beta_0)] + \\ & + \frac{9}{128} \pi^4 \sigma \varepsilon^3 (a_0 + \varepsilon^2 a_1)^3 [\sin(3\beta_0) + 3\varepsilon^2 \beta_1 \cos(3\beta_0)] = 0. \end{aligned} \quad (3.42b)$$

Uguagliando i coefficienti delle potenze di ε e trascurando i termini di ordine superiore ad ε^3 si ottengono i seguenti due sistemi di equazioni, da cui è possibile ricavare i valori delle costanti iniziali,

ordine "1"

$$\begin{cases} a_0 \cos \beta_0 = v_0 \\ -a_0 \sin \beta_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = v_0 \\ \beta_0 = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Capitolo 3

ordine “3”

$$\begin{cases} a_1 \cos \beta_0 - \frac{3}{128} \pi^4 \sigma a_0^3 \cos(3\beta_0) = 0 \\ -a_1 \sin \beta_0 + \frac{9}{128} \pi^4 \sigma a_0^3 \sin(3\beta_0) - a_0 \beta_1 \cos \beta_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3}{128} \pi^4 \sigma a_0^3 \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

La 3.36, pertanto, assume la forma

$$v(x, t) = \sin(\pi x) \left\{ \varepsilon v_0 \cos(\omega t) + (\varepsilon v_0)^3 \frac{3}{128} \pi^4 \sigma [\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)] \right\}, \quad (3.45)$$

essendo ω dato dalla 3.32. Si noti che il termine in εv_0 è nettamente prevalente sull'altro.

Posto

$$\varepsilon v_0 = V_0, \quad A \simeq V_0, \quad (3.46)$$

la 3.45 risulta valida per valori dell'ampiezza massima della deformata iniziale compresi nell'intervallo

$$|V_0| \leq \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{1}{3\sigma}}. \quad (3.47)$$

Soluzione esatta nello spazio delle fasi

L'equazione ordinaria nonlineare 3.18 ammette una soluzione esatta nello spazio delle fasi. Si ponga

$$\eta'(t) = y(t) \quad \text{da cui discende} \quad \eta''(t) = \frac{dy}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{d\eta} y. \quad (3.48)$$

Sostituendo le 3.48 nella 3.18 si ricava

$$y \frac{dy}{d\eta} = \pi^4 (\bar{\varepsilon} \eta^3 - \eta), \quad (3.49)$$

integrando la quale si ottiene

$$\frac{y^2}{2} = H - \pi^4 \left(\frac{\eta^2}{2} - \bar{\varepsilon} \frac{\eta^4}{4} \right). \quad (3.50)$$

E' facile riconoscere nella 3.50 un'equazione di bilancio energetico, in cui H rappresenta l'energia totale del sistema, $\frac{y^2}{2}$ l'energia cinetica, la funzione $\psi(\eta, \bar{\varepsilon}) = \pi^4 \left(\frac{\eta^2}{2} - \bar{\varepsilon} \frac{\eta^4}{4} \right)$ l'energia potenziale.

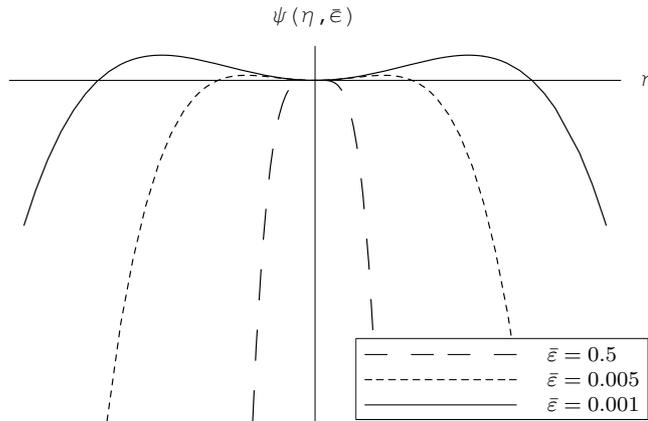


Figura 3.3. Funzioni energia potenziale per diversi valori di $\bar{\varepsilon}$

In figura 3.3 sono rappresentate alcune curve $\psi(\eta, \bar{\varepsilon})$ per diversi valori di $\bar{\varepsilon}$. Le coordinate dei punti di massimo delle $\psi(\eta, \bar{\varepsilon})$ sono

$$M^- = \left(-\sqrt{\frac{1}{\bar{\varepsilon}}}, \frac{\pi^4}{4\bar{\varepsilon}}\right) \quad M^+ = \left(\sqrt{\frac{1}{\bar{\varepsilon}}}, \frac{\pi^4}{4\bar{\varepsilon}}\right). \quad (3.51)$$

Dalla 3.49 discende che il moto nello spazio delle fasi (η, η') è rappresentato dall'equazione

$$y = \eta'(t) = \pm \sqrt{2} \sqrt{H - \psi(\eta, \bar{\varepsilon})} \quad (3.52)$$

e quindi, affinché la 3.52 ammetta soluzioni reali, deve essere

$$H - \psi(\eta, \bar{\varepsilon}) \geq 0. \quad (3.53)$$

La figura 3.4 mostra che esistono soluzioni per qualunque valore di H . Infatti, comunque scelto un valore di H – che si può immaginare rappresentato in figura da una retta orizzontale –, esistono uno o più intervalli dell'asse η per cui la 3.53 è soddisfatta.

In particolare, è possibile individuare tre regioni per H , ciascuna delle quali è caratterizzata da differenti tipi di soluzione.

- 1) Per $H \geq \frac{\pi^4}{4\bar{\varepsilon}}$ le soluzioni sono curve aperte simmetriche rispetto all'asse η (curve a tratto continuo in figura 3.4). Il corrispondente moto del sistema è non periodico. In particolare, per $H = \frac{\pi^4}{4\bar{\varepsilon}}$, le soluzioni sono due curve, dette “separatrici”, che si incontrano sull'asse η in due punti cosiddetti “di sella”, ubicati in corrispondenza dei punti di massimo di $\psi(\eta, \bar{\varepsilon})$.

Capitolo 3

- 2) Per $0 \leq H \leq \frac{\pi^4}{4\bar{\varepsilon}}$ sono possibili tre soluzioni: un'orbita chiusa intorno all'origine, cui corrisponde una soluzione periodica e due curve aperte simmetriche rispetto all'asse η' (linee a tratteggio fine in figura 3.4).
- 3) Per $H \leq 0$ le soluzioni sono ancora due curve aperte simmetriche rispetto all'asse η' (linee a tratteggio grosso in figura 3.4).

In figura 3.4 sono riportate, per $\bar{\varepsilon} = 0.001$, la funzione $\psi(\eta)$ ed una rappresentazione delle diverse soluzioni possibili per l'equazione del moto, al variare di H .

Si noti che gli unici valori di H per cui sono ammesse soluzioni periodiche sono quelli compresi nell'intervallo $0 \leq H \leq \frac{\pi^4}{4\bar{\varepsilon}}$.

Confronto fra la soluzione esatta e quella approssimata

Si considerino le seguenti condizioni iniziali, coincidenti con le 3.40

$$v(x, 0) = \varepsilon v_0 \sin(\pi x) \quad (3.54a)$$

$$v_t(x, 0) = 0 \quad (3.54b)$$

che portano alle seguenti condizioni iniziali per $\eta(t)$

$$\eta(0) = v_0 \sin(\pi x) \quad (3.55a)$$

$$\eta_t(0) = 0. \quad (3.55b)$$

Si vuole determinare, a partire dalla 3.52, il periodo fondamentale esatto di oscillazione della $\eta(t)$, confrontandolo, per diversi valori di $\bar{\varepsilon}$ e di v_0 , con la soluzione approssimata ottenuta con il metodo delle scale multiple. A tale scopo si riscrive la 3.52 nella forma seguente

$$\frac{d\eta}{\sqrt{2H - 2F(\eta, \bar{\varepsilon})}} = dt, \quad (3.56)$$

dove, in virtù delle 3.55,

$$H = H_0 = \pi^4 \left(\frac{v_0^2}{2} - \bar{\varepsilon} \frac{v_0^4}{4} \right). \quad (3.57)$$

Integrando l'equazione 3.56 sull'intervallo t sull'intervallo $[0, t]$ e tenendo conto della 3.57 si ottiene:

$$t = \pm \frac{1}{\pi^2} \int_{v_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(v_0^2 - \eta^2) \left(1 - \frac{\bar{\varepsilon} v_0^2}{2} - \frac{\bar{\varepsilon} \eta^2}{2} \right)}} \quad (3.58)$$

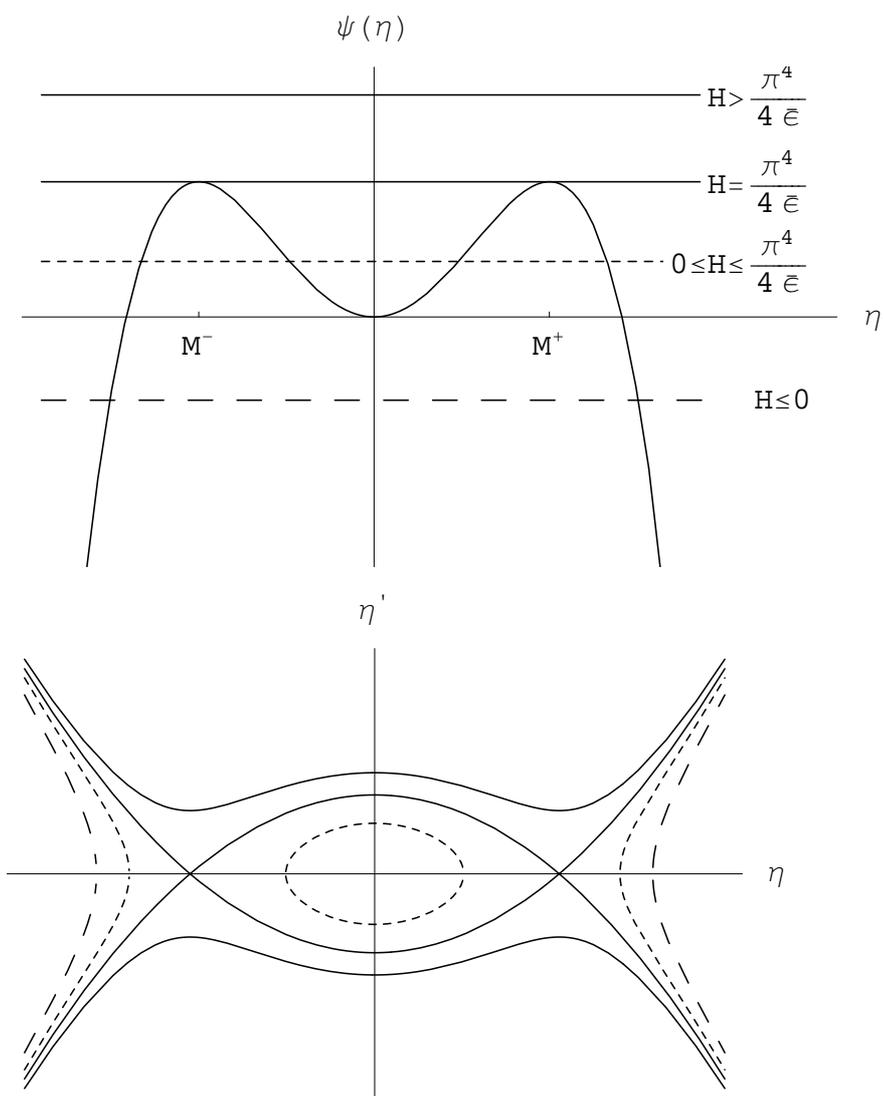


Figura 3.4. Soluzioni dell'equazione del moto per $\bar{\epsilon} = 0.001$

Capitolo 3

Al fine di determinare il periodo fondamentale di oscillazione della $\eta(t)$, si introduce la trasformazione

$$\eta = -v_0 \cos(\vartheta) \quad (3.59a)$$

$$d\eta = v_0 \sin(\vartheta) d\vartheta, \quad (3.59b)$$

con la quale la 3.58 diviene:

$$t = \pm \frac{1}{\pi^2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{\bar{\varepsilon}v_0^2}{2} - \frac{\bar{\varepsilon}v_0^2 \cos(\vartheta)^2}{2}}}. \quad (3.60)$$

Tenendo conto della simmetria dell'orbita rispetto agli assi η ed η' e ricordando che si ha $\vartheta_0 = \pi$ per $\eta = v_0$ e $\vartheta_0 = 0$ per $\eta = -v_0$, l'espressione del periodo di oscillazione diventa

$$T = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{\varepsilon}v_0^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{\bar{\varepsilon}v_0^2}{2\bar{\varepsilon}v_0^2 - 2} \sin(\vartheta)^2}}. \quad (3.61)$$

L'integrale nell'espressione precedente è un integrale ellittico completo del primo tipo, di modulo $\frac{\bar{\varepsilon}v_0^2}{2\bar{\varepsilon}v_0^2 - 2}$, tabellabile in funzione di $(\bar{\varepsilon}v_0^2)$. La 3.61 ammette soluzioni reali se e solo se risulta

$$v_0^2 < \frac{1}{\bar{\varepsilon}}. \quad (3.62)$$

Tale condizione, ricordando le 3.17 ed 3.46, implica

$$|V_0| < \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{1}{3\sigma}}. \quad (3.63)$$

Si noti che l'intervallo prescritto da 3.63 ha ampiezza doppia rispetto a quello consentito dalle 3.47.

Dalla 3.53 si sarebbe dedotto, invece,

$$|V_0| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \sqrt{\frac{1}{3\sigma}}. \quad (3.64)$$

Pertanto, nell'ambito di validità dell'equazione costitutiva 3.2, il periodo T dato da 3.61 è sempre ben definito.

Da 3.61 si deduce la frequenza fondamentale di oscillazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi^3 \sqrt{1 - \bar{\varepsilon}v_0^2}}{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{\bar{\varepsilon}v_0^2}{2\bar{\varepsilon}v_0^2 - 2} \sin \vartheta^2}}}. \quad (3.65)$$

$\bar{\varepsilon}v_0^2$	0	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.25
$\frac{\omega}{\omega_a}$	1	0.999625	0.998132	0.996279	0.98196	0.965257	0.921995

Tabella 3.1.

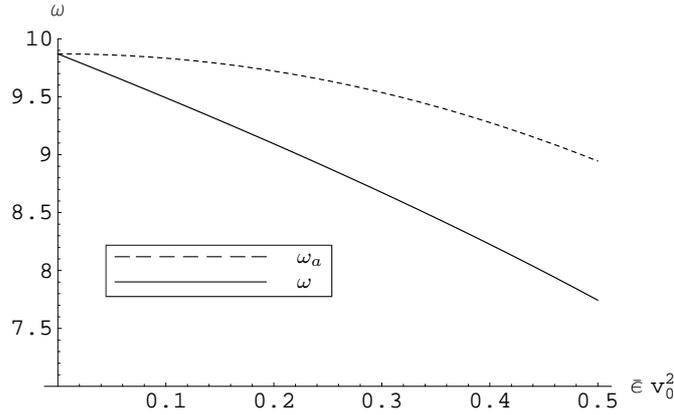


Figura 3.5. Confronto fra le frequenze fondamentali nonlineari teorica ed approssimata.

E' possibile ora confrontare il valore di ω dato da 3.65 con quello ottenuto mediante il metodo delle scale multiple (si vedano le 3.17, 3.32),

$$\omega_a \simeq \pi^2 - \frac{3}{8}\pi^2\bar{\varepsilon}v_0^2. \quad (3.66)$$

Nella tabella 3.1 si riportano i valori del rapporto $\frac{\omega}{\omega_a}$ per diversi valori di $(\bar{\varepsilon}v_0^2)$,⁴ mentre in figura 3.5 sono disegnati gli andamenti delle funzioni ω ed ω_a , sempre in funzione di $(\bar{\varepsilon}v_0^2)$. I valori di ω_a sono sempre maggiori di quelli di ω , in altre parole la frequenza nonlineare approssimata decresce meno velocemente di quella teorica. Tuttavia, è possibile osservare dalla tabella 3.1 come l'errore nella valutazione approssimata della frequenza si mantenga contenuto. Infatti, per $\bar{\varepsilon}v_0^2 = 0.25$, che è il massimo valore consentito dalla 3.47, le due frequenze differiscono meno dell'8%.

Soluzione approssimata ottenuta con due modi di vibrare

Se si considerano due modi di vibrare, la 3.11 diventa

$$v(x, t) = \varepsilon [\eta_1(t) \sin(\pi x) + \eta_2(t) \sin(2\pi x)], \quad (3.67)$$

⁴Si ricorda che $\bar{\varepsilon}v_0^2 = \frac{3}{4}\sigma\pi^4V_0^2$.

Capitolo 3

che, sostituita nella 3.9, porge

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\{ \sin(\pi x) \left[\eta_1'' + \pi^4 \eta_1 \right] + \sin(2\pi x) \left[\eta_2'' + 16\pi^4 \eta_2 \right] \right\} = \\ = \sigma \varepsilon^3 \left[-\pi^2 \eta_1 \sin(\pi x) - 4\pi^2 \eta_2 \sin(2\pi x) \right]_{xx}^3. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Seguendo la procedura proposta in [7, 27, 29, 38], si moltiplicano ambo i membri della 3.68 alternativamente per $\sin(\pi x)$ e $\sin(2\pi x)$ e si integra sulla luce della trave, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(\pi x)^2 \left[\eta_1'' + \pi^4 \eta_1 \right] dx + \int_0^1 \sin(\pi x) \sin(2\pi x) \left[\eta_2'' + 16\pi^4 \eta_2 \right] dx = \\ = \sigma \varepsilon^2 \int_0^1 \left[-\pi^2 \eta_1 \sin(\pi x) - 4\pi^2 \eta_2 \sin(2\pi x) \right]_{xx}^3 \sin(\pi x) dx \end{aligned} \quad (3.69a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(2\pi x) \sin(\pi x) \left[\eta_1'' + \pi^4 \eta_1 \right] dx + \int_0^1 \sin(2\pi x)^2 \left[\eta_2'' + 16\pi^4 \eta_2 \right] dx = \\ = \sigma \varepsilon^2 \int_0^1 \left[-\pi^2 \eta_1 \sin(\pi x) - 4\pi^2 \eta_2 \sin(2\pi x) \right]_{xx}^3 \sin(2\pi x) dx \end{aligned} \quad (3.69b)$$

Ricordando le proprietà di ortogonalità dei modi di vibrare elastici ed eseguendo le integrazioni nelle 3.69, la 3.68 viene ricondotta al sistema di equazioni differenziali ordinarie nonlineari

$$\begin{cases} \eta_1'' + \pi^4 \eta_1 = \sigma \varepsilon^2 \left(\frac{3}{4} \pi^8 \eta_1^3 + 24\pi^8 \eta_1 \eta_2^2 \right) \\ \eta_2'' + 16\pi^4 \eta_2 = \sigma \varepsilon^2 \left(192\pi^8 \eta_2^3 + 24\pi^8 \eta_1^2 \eta_2 \right). \end{cases} \quad (3.70)$$

Si osservi che, posto $\eta_2 = 0$, dalle 3.70 si riottiene la 3.16.

Al contrario di quanto accade nel caso elastico, le 3.70 presentano dei termini misti in $\eta_1 \eta_2^2$ ed $\eta_1^2 \eta_2$, a coefficienti simmetrici, che rendono accoppiato il sistema 3.70. Inoltre, è possibile dimostrare per una trave appoggiata che, anche nel caso in cui si considerino più di due modi di vibrare, le η_i risultano accoppiate dai termini misti sempre a due a due. Tale circostanza spiega l'assenza di fenomeni di risonanza interna, tipica della trave appoggiata soggetta a nonlinearità di tipo “cubico”⁵.

⁵Si ricorda che, per una trave appoggiata e per una nonlinearità di tipo “cubico”, le uniche frequenze che potrebbero dar luogo ad una risonanza interna sono le prime tre, che presentano fra loro il seguente rapporto: $\omega_3 = 2\omega_2 + \omega_1$ – si vedano in proposito [27, 29] –.

Ricordando la 3.17, le 3.70 si scrivono

$$\begin{cases} \eta_1'' + \pi^4 \eta_1 = \bar{\varepsilon} \pi^4 (\eta_1^3 + 32\eta_1 \eta_2^2) \\ \eta_2'' + 16\pi^4 \eta_2 = \bar{\varepsilon} 16\pi^4 (16\eta_2^3 + 2\eta_1^2 \eta_2). \end{cases} \quad (3.71)$$

Le 3.71 possono essere risolte con il metodo delle scale multiple, sviluppando in serie di potenze rispetto a $\bar{\varepsilon}$. Si noti che, ancora una volta, si è scelto di introdurre un nuovo parametro di nonlinearietà, che si considera rappresentativo della piccolezza della parte nonlineare delle 3.70 rispetto a quella lineare. Posto

$$\eta_1(t) = \eta_{10}(T_0, T_1) + \bar{\varepsilon} \eta_{11}(T_0, T_1) + O(\bar{\varepsilon}^2) \quad (3.72a)$$

$$\eta_2(t) = \eta_{20}(T_0, T_1) + \bar{\varepsilon} \eta_{21}(T_0, T_1) + O(\bar{\varepsilon}^2) \quad (3.72b)$$

con T_0 e T_1 definiti dalle 3.20, ricordando le regole di derivazione 3.21 e trascurando i termini di ordine superiore ad $\bar{\varepsilon}$ si ottiene da 3.71

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_{10} + \bar{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \eta_{11}}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_{11} \right) + 2\bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} = \\ = \bar{\varepsilon} \pi^4 (\eta_{10}^3 + 32\eta_{20}^2 \eta_{10}) + O(\bar{\varepsilon}^2) \end{aligned} \quad (3.73a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_{20}}{\partial T_0^2} + 16\pi^4 \eta_{20} + \bar{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \eta_{21}}{\partial T_0^2} + 16\pi^4 \eta_{21} \right) + 2\bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \eta_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} = \\ = \bar{\varepsilon} 16\pi^4 (16\eta_{20}^3 + 2\eta_{10}^2 \eta_{20}) + O(\bar{\varepsilon}^2), \end{aligned} \quad (3.73b)$$

da cui, uguagliando i coefficienti delle potenze di $\bar{\varepsilon}$, si ottengono i seguenti sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie, da risolvere in sequenza:

ordine “0”:

$$\frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_{10} = 0, \quad (3.74a)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_{20}}{\partial T_0^2} + 16\pi^4 \eta_{20} = 0; \quad (3.74b)$$

ordine “1”:

$$\frac{\partial^2 \eta_{11}}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_{11} = \pi^4 (\eta_{10}^3 + 32\eta_{20}^2 \eta_{10}) - 2 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial T_0 \partial T_1}, \quad (3.75a)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_{21}}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_{21} = 16\pi^4 (16\eta_{20}^3 + 2\eta_{10}^2 \eta_{20}) - 2 \frac{\partial^2 \eta_{20}}{\partial T_0 \partial T_1}. \quad (3.75b)$$

Capitolo 3

La soluzione delle 3.74 è

$$\eta_{10} = a_1(T_1) \cos(\pi^2 T_0 + \beta_1(T_1)) \quad (3.76a)$$

$$\eta_{20} = a_2(T_1) \cos(4\pi^2 T_0 + \beta_2(T_1)), \quad (3.76b)$$

con $a_1(T_1), a_2(T_1), \beta_1(T_1), \beta_2(T_1)$ parametri variabili sulla scala lenta dei tempi, da determinarsi in base alle equazioni di modulazione.

Sostituendo le 3.76 nelle 3.75 e sviluppando i termini trigonometrici si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_{11}}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_{11} = & \left(\frac{3}{4} \pi^4 a_1^3 + 16\pi^4 a_2^2 a_1 + 2\pi^2 a_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial T_1} \right) \cos(\pi^2 T_0 + \beta_1) + \\ & + 2\pi^2 \frac{\partial a_1}{\partial T_1} \sin(\pi^2 T_0 + \beta_1) + \frac{1}{4} \pi^4 a_1^3 \cos(3\pi^2 T_0 + 3\beta_1) + 16\pi^4 a_2^2 a_1 \cdot \quad , \\ & \left[\frac{1}{2} \cos(9\pi^2 T_0 + \beta_1 + 2\beta_2) + \frac{1}{2} \cos(7\pi^2 T_0 - \beta_1 + 2\beta_2) \right] \end{aligned} \quad (3.77a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_{21}}{\partial T_0^2} + 16\pi^4 \eta_{21} = & \left(192\pi^4 a_2^3 + 16\pi^4 a_2 a_1^2 + 8\pi^2 a_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial T_1} \right) \cdot \\ & \cos(4\pi^2 T_0 + \beta_2) + 8\pi^2 \frac{\partial a_2}{\partial T_1} \sin(4\pi^2 T_0 + \beta_2) + 64\pi^4 a_2^3 \cdot \\ & \cos(12\pi^2 T_0 + 3\beta_2) + 16\pi^4 a_2 a_1^2 \cdot \\ & \left[\frac{1}{2} \cos(6\pi^2 T_0 + 2\beta_1 + \beta_2) + \frac{1}{2} \cos(2\pi^2 T_0 - 2\beta_1 + \beta_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.77b)$$

Annullando i termini secolari nelle 3.77 si ottengono le equazioni di modulazione del sistema

$$2\pi^2 \frac{\partial a_1}{\partial T_1} = 0 \quad (3.78a)$$

$$8\pi^2 \frac{\partial a_2}{\partial T_1} = 0 \quad (3.78b)$$

$$\frac{3}{4} \pi^4 a_1^3 + 16\pi^4 a_2^2 a_1 + 2\pi^2 a_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial T_1} = 0 \quad (3.78c)$$

$$192\pi^4 a_2^3 + 16\pi^4 a_2 a_1^2 + 8\pi^2 a_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial T_1} = 0, \quad (3.78d)$$

da cui si ricava

$$a_1 = \text{costante} \quad (3.79)$$

$$a_2 = \text{costante} \quad (3.80)$$

$$\beta_1 = \left(-\frac{3}{8}\pi^2 a_1^2 - 8\pi^2 a_2^2 \right) T_1 + \bar{\beta}_1 \quad (3.81)$$

$$\beta_2 = \left(-24\pi^2 a_2^2 - 2\pi^2 a_1^2 \right) T_1 + \bar{\beta}_2. \quad (3.82)$$

Da 3.79 e 3.80 si deduce che le ampiezze relative a ciascun modo di vibrare si mantengono costanti e determinabili in funzione delle condizioni iniziali del problema, e che sono esclusi fenomeni di risonanza interna⁶.

Ricordando la posizione 3.17, dalle 3.81, 3.82 si possono ricavare le espressioni approssimate delle frequenze nonlineari relative a ciascun modo di vibrare

$$\omega_1 \simeq \pi^2 - \varepsilon^2 \left(\frac{9}{32}\pi^6 \sigma a_1^2 + 6\pi^6 \sigma a_2^2 \right), \quad (3.83a)$$

$$\omega_2 \simeq 4\pi^2 - \varepsilon^2 \left(\frac{3}{2}\pi^6 \sigma a_1^2 + 18\pi^6 \sigma a_2^2 \right). \quad (3.83b)$$

Posto $a_2 = 0$, dalla 3.83 si ritrova la 3.32.

Si osservi come ciascuna frequenza venga influenzata da entrambe le ampiezze modali. In particolare, nell'espressione della prima frequenza modale, il coefficiente relativo all'ampiezza modale a_2 risulta maggiore di quello relativo ad a_1 . Tale risultato può apparire in contrasto con l'idea di convergenza dello sviluppo modale della soluzione; tuttavia, come si vedrà nel seguito, nella realtà il fenomeno viene attenuato notevolmente dalla presenza dello smorzamento.

Una volta annullati i termini secolari, le soluzioni particolari delle 3.77 diventano

$$\begin{aligned} \eta_{11} = & -\frac{1}{32}a_1^3 \cos(3\pi^2 T_0 + 3\beta_1) - \frac{1}{6}a_2^2 a_1 \cos(7\pi^2 T_0 - \beta_1 + 2\beta_2) + \\ & -\frac{1}{10}a_2^2 a_1 \cos(9\pi^2 T_0 + \beta_1 + 2\beta_2), \end{aligned} \quad (3.84a)$$

$$\begin{aligned} \eta_{21} = & -\frac{1}{2}a_2^3 \cos(12\pi^2 T_0 + 3\beta_2) - \frac{2}{5}a_2 a_1^2 \cos(6\pi^2 T_0 + 2\beta_1 + \beta_2) + \\ & + \frac{2}{3}a_2 a_1^2 \cos(2\pi^2 T_0 - 2\beta_1 + \beta_2). \end{aligned} \quad (3.84b)$$

⁶Nel caso di risonanza interna fra due o più modi, le ampiezze relative a ciascun modo coinvolto nella risonanza non si mantengono più costanti durante il moto della trave [27, 29].

Capitolo 3

Seguendo ancora una volta quanto suggerito in [27, 29] e ricordando le 3.83, è possibile scrivere la soluzione approssimata delle 3.70, che è data dalle espressioni

$$\begin{aligned} \eta_1 = & a_1 \cos(\omega_1 t + \bar{\beta}_1) + \bar{\varepsilon} \left\{ -\frac{1}{32} a_1^3 \cos(3\omega_1 t + 3\bar{\beta}_1) - \frac{1}{6} a_2^2 a_1 \right. \\ & \left. \cos\left[7\pi^2 t - \bar{\varepsilon} \left(\frac{29}{8} \pi^2 a_1^2 + 40\pi^2 a_2^2\right) t - \bar{\beta}_1 + 2\bar{\beta}_2\right] - \frac{1}{10} a_2^2 a_1 \cdot \right. \end{aligned} \quad (3.85a)$$

$$\left. \cos\left[9\pi^2 t - \bar{\varepsilon} \left(\frac{35}{8} \pi^2 a_1^2 + 56\pi^2 a_2^2\right) t + \bar{\beta}_1 + 2\bar{\beta}_2\right]\right\},$$

$$\begin{aligned} \eta_2 = & a_2 \cos(\omega_2 t + \bar{\beta}_2) + \bar{\varepsilon} \left\{ -\frac{1}{2} a_2^3 \cos(3\omega_2 t + 3\bar{\beta}_2) - \frac{2}{5} a_2 a_1^2 \cdot \right. \\ & \left. \cos\left[6\pi^2 t - \bar{\varepsilon} \left(\frac{11}{4} \pi^2 a_1^2 + 40\pi^2 a_2^2\right) t + 2\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2\right] + \frac{2}{3} a_2 a_1^2 \cdot \right. \end{aligned} \quad (3.85b)$$

$$\left. \cos\left[2\pi^2 t - \bar{\varepsilon} \left(\frac{5}{4} \pi^2 a_1^2 + 8\pi^2 a_2^2\right) t - 2\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2\right]\right\},$$

essendo ω_1 ed ω_2 definite dalle 3.83 e $a_1, \bar{\beta}_1, a_2, \bar{\beta}_2$ costanti da determinarsi in base alle condizioni iniziali.

Determinazione delle costanti iniziali

Si consideri la coppia di condizioni iniziali

$$v(x, t) = \varepsilon [v_0 \sin(\pi x) + r v_0 \sin(2\pi x)], \quad r \in [-1, 1] \quad (3.86a)$$

$$v_t(x, t) = 0 \quad (3.86b)$$

che descrivono una deformazione iniziale, data da una combinazione dei primi due modi di vibrare, con una prevalenza del primo modo sul secondo⁷.

Seguendo la tecnica già applicata nel paragrafo 3.3.1, le costanti iniziali del problema si scrivono

$$a_1 = a_{10} + \varepsilon^2 a_{11} + \dots \quad (3.87a)$$

$$a_2 = a_{20} + \varepsilon^2 a_{21} + \dots \quad (3.87b)$$

$$\bar{\beta}_1 = \beta_{10} + \varepsilon^2 \beta_{12} + \dots \quad (3.87c)$$

$$\bar{\beta}_2 = \beta_{20} + \varepsilon^2 \beta_{22} + \dots \quad (3.87d)$$

⁷Tale condizione può descrivere, ad esempio, una deformata vicina al primo modo di vibrare, “disturbata” da una leggera asimmetria.

Inserendo le 3.87 nelle 3.85, sviluppando in serie le espressioni trigonometriche e trascurando i termini di ordine superiore a ε^3 si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} \varepsilon\eta_1(0) = & \varepsilon\{(a_{10} + \varepsilon^2 a_{11})[\cos(\beta_{10}) - \varepsilon^2 \beta_{11} \sin(\beta_{10})] + \\ & + \frac{3}{4}\pi^4 \sigma \varepsilon^2 [-\frac{1}{32}a_{10}^3 \cos(3\beta_{10}) - \frac{1}{6}a_{20}^2 a_{10} \cos(-\beta_{10} + 2\beta_{20}) + \\ & - \frac{1}{10}a_{20}^2 a_{10} \cos(\beta_{10} + 2\beta_{20})]\} + O(\varepsilon^4) = \varepsilon v_0, \end{aligned} \quad (3.88a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\eta_2(0) = & \varepsilon\{(a_{20} + \varepsilon^2 a_{21})[\cos(\beta_{20}) - \varepsilon^2 \beta_{21} \sin(\beta_{20})] + \\ & + \frac{3}{4}\pi^4 \sigma \varepsilon^2 [-\frac{1}{2}a_{20}^3 \cos(3\beta_{20}) - \frac{2}{5}a_{20}a_{10}^2 \cos(2\beta_{10} + \beta_{20}) + \\ & + \frac{2}{3}a_{20}a_{10}^2 \cos(-2\beta_{10} + \beta_{20})]\} + O(\varepsilon^4) = \varepsilon r v_0, \end{aligned} \quad (3.88b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\eta'_1(0) = & \varepsilon\{-(a_{10} + \varepsilon^2 a_{11})\omega_1[\sin(\beta_{10}) + \varepsilon^2 \beta_{11} \cos(\beta_{10})] + \\ & + \frac{3}{4}\pi^4 \sigma \varepsilon^2 [\frac{1}{32}a_{10}^3 3\omega_1 \sin(3\beta_{10}) + \frac{1}{6}a_{20}^2 a_{10} 7\pi^2 \sin(-\beta_{10} + 2\beta_{20}) + \\ & + \frac{1}{10}a_{20}^2 a_{10} 9\pi^2 \sin(\beta_{10} + 2\beta_{20})]\} + O(\varepsilon^4) = 0, \end{aligned} \quad (3.88c)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\eta'_2(0) = & \varepsilon\{-(a_{20} + \varepsilon^2 a_{21})\omega_2[\sin(\beta_{20}) + \varepsilon^2 \beta_{21} \cos(\beta_{20})] + \\ & + \frac{3}{4}\pi^4 \sigma \varepsilon^2 [\frac{1}{2}a_{20}^3 3\omega_2 \sin(3\beta_{20}) + \frac{2}{5}a_{20}a_{10}^2 6\pi^2 \sin(2\beta_{10} + \beta_{20}) + \\ & - \frac{2}{3}a_{20}a_{10}^2 2\pi^2 \sin(-2\beta_{10} + \beta_{20})]\} + O(\varepsilon^4) = 0. \end{aligned} \quad (3.88d)$$

Dalle 3.88, uguagliando i coefficienti delle potenze di ε , si ottengono, per le costanti iniziali, i valori

ordine "1":

$$a_{10} = v_0, \quad a_{20} = r v_0, \quad \beta_{10} = 0, \quad \beta_{20} = 0; \quad (3.89)$$

ordine "3":

$$a_{11} = \sigma \pi^4 v_0^3 \left(\frac{3}{128} + \frac{1}{5} r^2 \right), \quad a_{21} = \sigma \pi^4 v_0^3 r \left(\frac{3}{8} r^2 - \frac{1}{5} \right), \quad (3.90a)$$

$$\beta_{11} = 0, \quad \beta_{21} = 0. \quad (3.90b)$$

Capitolo 3

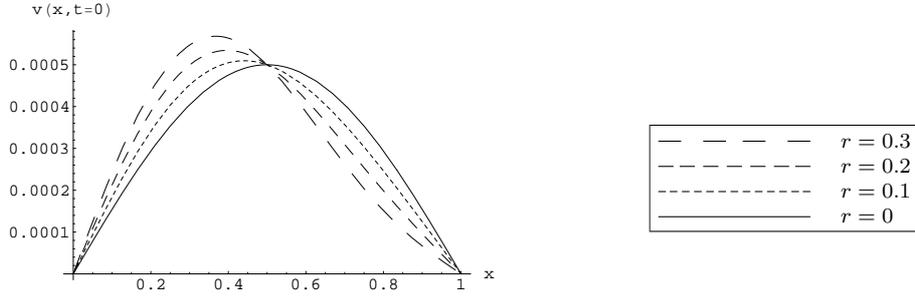


Figura 3.6(a). Deformate iniziali della trave per diversi valori di r .

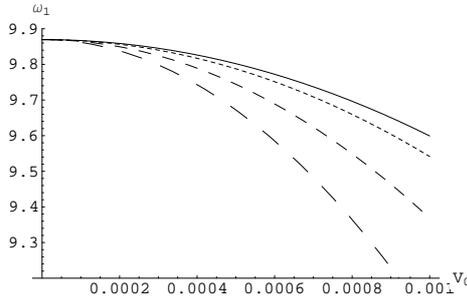


Figura 3.6(b). Curve $\omega_1(V_0, r, \sigma = 1000)$.

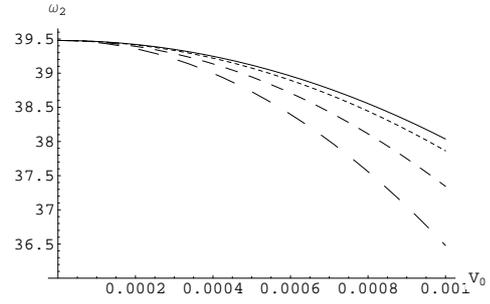


Figura 3.6(c). Curve $\omega_2(V_0, r, \sigma = 1000)$.

Figura 3.6. Variazione delle frequenze modali al variare della deformazione iniziale della trave.

Con l'aiuto delle 3.89 e 3.90, posto $\varepsilon v_0 = V_0$ e trascurando i termini di ordine superiore ad ε^2 si ottengono le espressioni delle frequenze modali:

$$\omega_1 \simeq \pi^2 - V_0^2 \pi^6 \sigma \left(\frac{9}{32} + 6r^2 \right), \quad (3.91a)$$

$$\omega_2 \simeq 4\pi^2 - V_0^2 \pi^6 \sigma \left(\frac{3}{2} + 18r^2 \right), \quad (3.91b)$$

mentre, per le ampiezze modali si ha

$$a_1 \simeq V_0 + \sigma \pi^4 V_0^3 \left(\frac{3}{128} + \frac{1}{5} r^2 \right), \quad (3.92a)$$

$$a_2 \simeq r \left[V_0 + \sigma \pi^4 V_0^3 \left(\frac{3}{8} r^2 - \frac{1}{5} \right) \right]. \quad (3.92b)$$

In figura 3.6 viene mostrata la variazione delle frequenze modali, date dalle 3.91, al variare del parametro r . Per $r = 0$ la deformata iniziale della trave coincide col primo modo di vibrare e l'espressione di ω_1 coincide con

quella trovata nel paragrafo 3.3.1. Aumentando il valore di r , e, di conseguenza, l'asimmetria della deformata iniziale, aumenta il valore assoluto di $\frac{\partial \omega_1}{\partial V_0}$ e le curve ω_1 decrescono via via più velocemente. Il fenomeno è abbastanza significativo: ad esempio, già per $r = 0.1$, la $\frac{\partial \omega_1}{\partial V_0}$ incrementa il suo valore assoluto di circa il 20%. Pertanto, è possibile affermare che, in assenza di smorzamento, imprimendo alla trave una deformata iniziale vicina ma non coincidente col primo modo di vibrare, i valori assunti dalle frequenze modali nonlineari risultano sensibilmente diversi da quelli calcolati nell'ipotesi di unimodalità della soluzione.

Per quanto riguarda le ampiezza modali, invece, dalle 3.92 si deduce che l'influenza del termine nonlineare rispetto al caso elastico ($a_1 = V_0$ e $a_2 = rV_0$) è abbastanza contenuta e, nelle applicazioni, generalmente trascurabile.

Come già precedentemente osservato per la soluzione unimodale, gli sviluppi ottenuti in questo paragrafo sono validi soltanto per curvatures comprese nell'intervallo $\left[-\sqrt{\frac{1}{3\sigma}}, \sqrt{\frac{1}{3\sigma}}\right]$, dove il momento flettente è una funzione crescente della curvatura.

Quando si considerano due modi di vibrare, posto $\varepsilon \eta_{1max}(t) \simeq V_0$ e $\varepsilon \eta_{2max}(t) \simeq rV_0$, in vista di 3.86 tale condizione diventa

$$|V_0| \leq \frac{1}{\sqrt{3\sigma} \bar{f}(r)} \quad (3.93)$$

con

$$\bar{f}(r) = \pi^2 \left(\frac{3 + \sqrt{1 + 512r^2}}{64\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\sqrt{-1 + 256r^2 + \sqrt{1 + 512r^2}}}{r^2} \right)^8. \quad (3.94)$$

3.3.2 Oscillazioni libere smorzate

Dall'equazione generale 3.9, ponendo $p = 0$, si ottiene l'equazione del moto che descrive le oscillazioni libere smorzate di una trave di lunghezza finita, scritta in termini adimensionali

$$v_{tt} + [v_{xx}(1 - \sigma v_{xx}^2)]_{xx} + Cv_t = 0. \quad (3.95)$$

Per la soluzione di una trave semplicemente appoggiata si assume, anche in questo caso, l'espressione

$$v(x, t) = \varepsilon [\eta_1(t) \sin(\pi x) + \eta_2(t) \sin(2\pi x)]. \quad (3.96)$$

⁸Si noti che è $\lim_{r \rightarrow 0} \bar{f}(r) = \pi^2$.

Capitolo 3

	$\bar{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-4}$	$\bar{\varepsilon} = 10^{-3}$	$\bar{\varepsilon} = 10^{-2}$	$\bar{\varepsilon} = 10^{-1}$
$\bar{\mu}_1$	5.06	2.53	0.253	0.0253
$\bar{\mu}_2$	20.26	10.13	1.013	0.101

Tabella 3.2. Valori di $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ al variare di $\bar{\varepsilon}$ per $\zeta_i = 0.05$.

Come descritto nei paragrafi 3.3.1,3.3.1, inserendo la 3.96 nella 3.95, integrando rispetto ad x e facendo l'ipotesi di smorzamento modale si ottiene il sistema di equazioni differenziali ordinarie nonlineari

$$\eta_1'' + \pi^4 \eta_1 = \bar{\varepsilon} \pi^4 \left(\eta_1^3 + 32 \eta_1 \eta_2^2 - 4 \bar{\mu}_1 \eta_1' \right) \quad (3.97a)$$

$$\eta_2'' + 16 \pi^4 \eta_2 = \bar{\varepsilon} 16 \pi^4 \left(16 \eta_2^3 + 2 \eta_1^2 \eta_2 - \frac{1}{4} \bar{\mu}_2 \eta_2' \right) \quad (3.97b)$$

con

$$2\mu_i = \int_0^1 C \sin(n\pi x)^2 dx = \zeta_i \omega_i \quad (3.98)$$

$$\bar{\mu}_i = \frac{\mu_i}{\bar{\varepsilon} \pi^4}. \quad (3.99)$$

Nelle relazioni 3.97 e 3.98, ω_i e ζ_i rappresentano rispettivamente la frequenza ed il coefficiente di smorzamento relativi a ciascun modo di vibrare e $\bar{\varepsilon}$ è definita dalle 3.17.

Si osservi che nelle 3.97 i termini relativi allo smorzamento sono stati opportunamente scalati, e compaiono con lo stesso ordine di grandezza del termine nonlineare. Tale operazione di scalatura, essenziale ai fini dell'intero procedimento seguito successivamente⁹, impone dei requisiti di piccolezza al coefficiente di smorzamento viscoso della trave (ipotesi di struttura "lightly damped").

Nella tabella 3.2 si riportano i valori di $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ al variare di $\bar{\varepsilon}$, avendo assunto, come suggerito per le strutture in muratura dalla Normativa italiana, $\zeta_1 = \zeta_2 = 5\%$. Tali valori rappresentano, per ciascun modo, l'ordine di grandezza del rapporto fra il termine di smorzamento e quello nonlineare; come si può vedere dalla tabella, essi si mantengono, al variare di $\bar{\varepsilon}$, sempre comparabili con quelli assunti dagli altri coefficienti che compaiono nelle parentesi delle relazioni 3.97.

⁹Nel caso in cui si volessero considerare valori dello smorzamento viscoso più elevati, il procedimento delle scale multiple non condurrebbe alla scrittura di equazioni di modulazione, in quanto le soluzioni particolari delle equazioni differenziali di ordine superiore al primo non conterrebbero termini secolari; pertanto, le frequenze nonlineari risulterebbero coincidenti con quelle lineari.

Pertanto, si può affermare che i valori normalmente assunti dai coefficienti di smorzamento modale di una trave rispettano i requisiti di piccolezza imposti dalle 3.97.

Si scriva la soluzione del sistema 3.97 nel modo seguente

$$\eta_1(t) = \eta_{10}(T_0, T_1) + \bar{\varepsilon}\eta_{11}(T_0, T_1) + O(\bar{\varepsilon}^2) \quad (3.100a)$$

$$\eta_2(t) = \eta_{20}(T_0, T_1) + \bar{\varepsilon}\eta_{21}(T_0, T_1) + O(\bar{\varepsilon}^2), \quad (3.100b)$$

essendo T_0 e T_1 definiti dalle 3.20.

Sostituendo le 3.100 nelle 3.97, ricordando le regole di derivazione 3.21 e trascurando i termini in $\bar{\varepsilon}$ di ordine superiore al primo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_{10} + \bar{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \eta_{11}}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_{11} \right) + 2\bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} = \\ = \bar{\varepsilon} \pi^4 \left(\eta_{10}^3 + 32\eta_{20}^2 \eta_{10} - 4\bar{\mu}_1 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial T_0} \right) + O(\bar{\varepsilon}^2), \end{aligned} \quad (3.101a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_{20}}{\partial T_0^2} + 16\pi^4 \eta_{20} + \bar{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \eta_{21}}{\partial T_0^2} + 16\pi^4 \eta_{21} \right) + 2\bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \eta_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} = \\ = \bar{\varepsilon} 16\pi^4 \left(16\eta_{20}^3 + 2\eta_{10}^2 \eta_{20} - \frac{1}{4}\bar{\mu}_2 \frac{\partial \eta_{20}}{\partial T_0} \right) + O(\bar{\varepsilon}^2), \end{aligned} \quad (3.101b)$$

da cui, uguagliando i coefficienti delle potenze di $\bar{\varepsilon}$, si ottengono i seguenti sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie, da risolvere in sequenza

ordine “0”:

$$\frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_{10} = 0 \quad (3.102a)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_{20}}{\partial T_0^2} + 16\pi^4 \eta_{20} = 0 \quad (3.102b)$$

ordine “1”:

$$\frac{\partial^2 \eta_{11}}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_{11} = \pi^4 \left(\eta_{10}^3 + 32\eta_{20}^2 \eta_{10} - 4\bar{\mu}_1 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial T_0} \right) - 2 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (3.103a)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_{21}}{\partial T_0^2} + 16\pi^4 \eta_{21} = 16\pi^4 \left(16\eta_{20}^3 + 2\eta_{10}^2 \eta_{20} - \frac{1}{4}\bar{\mu}_2 \frac{\partial \eta_{20}}{\partial T_0} \right) - 2 \frac{\partial^2 \eta_{20}}{\partial T_0 \partial T_1}. \quad (3.103b)$$

Capitolo 3

La soluzione delle 3.102 è data, come visto precedentemente, dalle espressioni

$$\eta_{10} = a_1(T_1) \cos(\pi^2 T_0 + \beta_1(T_1)) \quad (3.104a)$$

$$\eta_{20} = a_2(T_1) \cos(4\pi^2 T_0 + \beta_2(T_1)). \quad (3.104b)$$

Sostituendo le 3.104 nelle 3.103, sviluppando i termini trigonometrici ed annullando i termini secolari, si ottengono le equazioni di modulazione

$$2\pi^2 \frac{\partial a_1}{\partial T_1} + 4\bar{\mu}_1 \pi^6 a_1 = 0 \quad (3.105a)$$

$$8\pi^2 \frac{\partial a_2}{\partial T_1} + 16\bar{\mu}_2 \pi^6 a_2 = 0 \quad (3.105b)$$

$$\frac{3}{4} \pi^4 a_1^3 + 16\pi^4 a_2^2 a_1 + 2\pi^2 a_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial T_1} = 0 \quad (3.105c)$$

$$192\pi^4 a_2^3 + 16\pi^4 a_2 a_1^2 + 8\pi^2 a_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial T_1} = 0 \quad (3.105d)$$

da cui si ricava

$$a_1 = \bar{a}_1(T_2, \dots, T_n) e^{-2\pi^4 \bar{\mu}_1 T_1} = \bar{a}_1 e^{-2\pi^4 \bar{\mu}_1 T_1} \quad (3.106)$$

$$a_2 = \bar{a}_2(T_2, \dots, T_n) e^{-2\pi^4 \bar{\mu}_2 T_1} = \bar{a}_2 e^{-2\pi^4 \bar{\mu}_2 T_1} \quad (3.107)$$

$$\beta_1 = \bar{a}_1^2 \frac{3e^{-4\pi^4 \bar{\mu}_1 T_1}}{32\pi^2 \bar{\mu}_1} + \bar{a}_2^2 \frac{2e^{-4\pi^4 \bar{\mu}_2 T_1}}{\pi^2 \bar{\mu}_2} + \bar{\beta}_1(T_2, \dots, T_n) \quad (3.108)$$

$$\beta_2 = \bar{a}_1^2 \frac{e^{-4\pi^4 \bar{\mu}_1 T_1}}{2\pi^2 \bar{\mu}_1} + \bar{a}_2^2 \frac{6e^{-4\pi^4 \bar{\mu}_2 T_1}}{\pi^2 \bar{\mu}_2} + \bar{\beta}_2(T_2, \dots, T_n) \quad (3.109)$$

essendo $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ costanti da determinare mediante le condizioni iniziali.

Dalle equazioni di modulazione si deduce che lo smorzamento riduce nel tempo non soltanto l'ampiezza dell'oscillazione, ma anche il termine nonlineare delle frequenze modali: esse, pertanto, tendono ad assumere nel tempo valori prossimi – uguali al limite per $t \rightarrow \infty$ – a quelli elastici. Inoltre, essendo $\bar{\mu}_2 > \bar{\mu}_1$, i contributi dei modi di vibrare superiori al primo vengono smorzati in misura maggiore.

Considerando che, come già osservato nel caso non smorzato, la nonlinearità non incide in maniera significativa sulle ampiezze modali, una buona

approssimazione delle η_i è rappresentata dalle espressioni

$$\begin{aligned} \eta_{10} &\simeq a_{10}e^{-\zeta_1\pi^2t} \cdot \cos\left(\pi^2t + \varepsilon^2\frac{9}{64\zeta_1}\pi^4\sigma a_{10}^2e^{-2\zeta_1\pi^2t} + \varepsilon^2\frac{3}{4\zeta_2}\pi^4\sigma a_{20}^2e^{-8\zeta_2\pi^2t} + \beta_{10}\right), \\ &\hspace{15em} (3.110a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{20} &\simeq a_{20}e^{-4\zeta_2\pi^2t} \cdot \cos\left(4\pi^2t + \varepsilon^2\frac{3}{4\zeta_1}\pi^4\sigma a_{10}^2e^{-2\zeta_1\pi^2t} + \varepsilon^2\frac{9}{4\zeta_2}\pi^4\sigma a_{20}^2e^{-8\zeta_2\pi^2t} + \beta_{20}\right) \\ &\hspace{15em} (3.110b) \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\bar{a}_1 \simeq a_{10}, \quad \bar{a}_2 \simeq a_{20} \quad \bar{\beta}_1 \simeq \beta_{10} \quad \bar{\beta}_2 \simeq \beta_{20}. \quad (3.111)$$

Posto $r = 0$ e considerate le condizioni iniziali 3.40 già studiate al paragrafo 3.3.1, la soluzione approssimata del problema assume l'espressione seguente

$$v(x, t) = V_0e^{-\zeta\pi^2t} \cos\left(\pi^2t + V_0^2\frac{9}{64\zeta}\pi^4\sigma(e^{-2\zeta\pi^2t} - 1)\right). \quad (3.112)$$

Si noti che, sviluppando in serie di Taylor l'espressione assunta da $\beta(t)$ nella 3.112, si ottiene

$$\beta(t) = V_0^2\frac{9}{64\zeta}\pi^4\sigma(e^{-2\zeta\pi^2t} - 1) \simeq -V_0^2\frac{9}{32}\pi^6\sigma t + O(t^2). \quad (3.113)$$

La 3.113 coincide con l'espressione dello sfasamento nonlineare ottenuto nella 3.32 per le oscillazioni non smorzate.

In figura 3.7 vengono rappresentate, per la sezione di mezzeria ($x = 0.5$), la soluzione smorzata 3.112 e la corrispondente soluzione non smorzata, confrontandole con il caso lineare. E' possibile notare dalla figura come le soluzioni smorzate, elastica e nonlineare, siano praticamente coincidenti, pur essendo notevolmente differenti le corrispondenti frequenze non smorzate.

3.3.3 Oscillazioni forzate in risonanza primaria

Si consideri la trave semplicemente appoggiata di figura 3.2, soggetta ad un carico distribuito rappresentato dalla seguente espressione adimensionale

$$p(x, t) = k \sin(\Omega t), \quad (3.114)$$

Capitolo 3

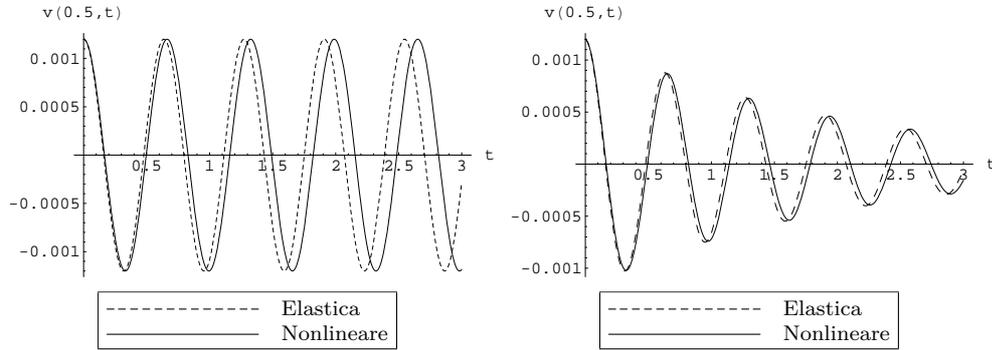


Figura 3.7(a). Oscillazioni non smorzate. **Figura 3.7(b).** Oscill. smorzate per $\zeta_1 = 0.05$.

Figura 3.7. Oscillazioni libere della sezione di mezzeria, in assenza e presenza di smorzamento, per $V_0 = 0.0012, \sigma = 1000$.

dove la frequenza Ω della forzante è prossima a quella fondamentale elastica della trave.

L'equazione 3.9 del moto della trave si scrive allora

$$v_{tt} + [v_{xx}(1 - \sigma v_{xx}^2)]_{xx} + Cv_t = k \sin(\Omega t). \quad (3.115)$$

Nel caso studiato di risonanza primaria, come già evidenziato nel capitolo 2, è lecito approssimare la soluzione del problema arrestando lo sviluppo al primo modo di vibrare [27, 29]. Pertanto, la soluzione della 3.114 viene scritta ancora una volta nel modo seguente:

$$v(x, t) = \varepsilon \sin(\pi x)\eta(t). \quad (3.116)$$

Introducendo la 3.116 nella 3.115, impiegando la procedura già descritta ai paragrafi precedenti e ricordando la 3.17, si riconduce il problema alla risoluzione della seguente equazione nonlineare ordinaria

$$\eta'' + \pi^4 \eta = \bar{\varepsilon} \pi^4 \left(\eta^3 - 4\bar{\mu} \eta' + \frac{4}{\pi} \bar{k} \sin(\Omega t) \right), \quad (3.117)$$

dove

$$2\mu = \int_0^1 C \sin(\pi x)^2 dx = \zeta \pi^2, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\bar{\varepsilon} \pi^4}, \quad \bar{k} = \frac{k}{\varepsilon \bar{\varepsilon} \pi^4}. \quad (3.118)$$

Si noti che nella 3.117 i termini relativi allo smorzamento ed alla forzante sono stati scalati in modo da apparire con lo stesso ordine di grandezza del termine nonlineare. Nel paragrafo 3.3.2 è stata già discussa la validità di tale

ipotesi per i valori comunemente attribuiti allo smorzamento viscoso di una trave di muratura. Per quanto riguarda la forzante, l'ipotesi di piccolezza di k^{10} risulta sempre ben verificata nei limiti imposti alla trattazione dalla limitazione 3.39 sul valore della massima ampiezza ammissibile lungo la trave.

Come già fatto nei paragrafi precedenti, si scrive la soluzione della 3.117 nella maniera seguente

$$\eta(t) = \eta_0(T_0, T_1) + \bar{\varepsilon}\eta_1(T_0, T_1) + O(\bar{\varepsilon}^2) \quad (3.119)$$

per esprimere la vicinanza della frequenza della forzante a quella fondamentale del primo modo di vibrare, si pone

$$\Omega = \pi^2 + \bar{\lambda}\bar{\varepsilon} \quad (3.120)$$

essendo $\bar{\lambda} = O(1)$ il parametro cosiddetto di "detuning" del problema.

Sostituendo le 3.119, 3.120 nella 3.117, ricordando le 3.20, 3.21 e trascurando i termini di ordine superiore ad $\bar{\varepsilon}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0^2} + 2\bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial T_0^2} + \pi^4(\eta_0 + \bar{\varepsilon}\eta_1) = \pi^4 \bar{\varepsilon} \cdot \\ \left[\eta_0^3 - 4\bar{\mu} \frac{\partial \eta_0}{\partial T_0} + \frac{4}{\pi} \bar{k} \sin[(\pi^2 + \bar{\lambda}\bar{\varepsilon})t] \right] + O(\bar{\varepsilon}^2), \end{aligned} \quad (3.121)$$

da cui, uguagliando i coefficienti delle potenze di $\bar{\varepsilon}$ si ottengono i seguenti sistemi di equazioni differenziali ordinarie, da risolvere in sequenza:

ordine "0":

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_0 = 0 \quad (3.122)$$

ordine "1":

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_1 = -2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \pi^4 \left(\eta_0^3 - 4\bar{\mu} \frac{\partial \eta_0}{\partial T_0} + \frac{4}{\pi} \bar{k} \sin(\pi^2 T_0 + \bar{\lambda} T_1) \right). \quad (3.123)$$

Convien scrivere la soluzione della 3.122 nella maniera seguente

$$\eta_0(t) = a(T_1) \sin(\pi^2 T_0 + \beta(T_1)). \quad (3.124)$$

¹⁰Si ricorda che k , che rappresenta l'intensità della forzante espressa in termini adimensionali – si vedano le 3.8 –, è un numero notevolmente più piccolo del corrispondente valore dimensionale.

Capitolo 3

Inserendo la 3.124 nella 3.123 e sviluppando i termini trigonometrici si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial T_0^2} + \pi^4 \eta_1 = & -2\pi^2 \left(\dot{a} \cos(\pi^2 T_0 + \beta) - \dot{\beta} a \sin(\pi^2 T_0 + \beta) \right) + \pi^4 a^3 \cdot \\ & \left(\frac{3}{4} \sin(\pi^2 T_0 + \beta) - \frac{1}{4} \cos(3\pi^2 T_0 + 3\beta) \right) - 4\bar{\mu}\pi^6 a \cos(\pi^2 T_0 + \beta) + \\ & + 4\pi^3 \bar{k} \left[\sin(\pi^2 T_0 + \beta) \cos(\bar{\lambda} T_1 - \beta) + \cos(\pi^2 T_0 + \beta) \sin(\bar{\lambda} T_1 - \beta) \right], \end{aligned} \quad (3.125)$$

da cui, annullando i termini secolari, si ottengono le equazioni di modulazione del sistema

$$-2\pi^2 \dot{a} - 4\bar{\mu}\pi^6 a + 4\pi^3 \bar{k} \sin(\bar{\lambda} T_1 - \beta) = 0, \quad (3.126a)$$

$$2\pi^2 a \dot{\beta} + \frac{3}{4} \pi^4 a^3 + 4\pi^3 \bar{k} \cos(\bar{\lambda} T_1 - \beta) = 0. \quad (3.126b)$$

Dalle 3.126 è possibile determinare l'evoluzione nel tempo dei parametri a e β , una volta fissati i valori iniziali $a(0)$ e $\beta(0)$.

Tuttavia, è noto che sia nei problemi lineari che in quelli con piccola non-linearità, il moto di un oscillatore soggetto ad una forzante sinusoidale tende velocemente a diventare “stazionario” e può essere descritto mediante valori costanti dell'ampiezza e della fase [27, 29, 36]. L'ipotesi di stazionarietà della soluzione consente di semplificare notevolmente le 3.126.

Detto

$$\gamma = \bar{\lambda} T_1 - \beta, \quad (3.127)$$

la condizione di “stazionarietà” si esprime ponendo

$$\dot{a} = \dot{\gamma} = 0. \quad (3.128)$$

Introducendo le 3.127 e 3.128 nelle 3.126, si ottiene il seguente sistema:

$$2\bar{\mu}\pi^6 a - 2\pi^3 \bar{k} \sin \gamma = 0, \quad (3.129a)$$

$$\pi^2 a \bar{\lambda} + \frac{3}{8} \pi^4 a^3 + 2\pi^3 \bar{k} \cos \gamma = 0. \quad (3.129b)$$

Ricordando le 3.17, 3.118 e ponendo

$$A = \varepsilon a, \quad \lambda = \bar{\lambda} \varepsilon, \quad (3.130)$$

le 3.126 si diventano

$$2\mu A = \frac{2k}{\pi^3} \sin \gamma, \quad (3.131a)$$

$$A\lambda + \frac{9}{32}\pi^6\sigma A^3 = -\frac{2k}{\pi^3} \cos \gamma. \quad (3.131b)$$

Elevando al quadrato le due 3.131 e sommandole membro a membro¹¹, si ottiene la seguente equazione, che, noti σ , μ e k , rappresenta un legame tra la frequenza della forzante – rappresentata nell’equazione dal parametro λ – e l’ampiezza della oscillazione A

$$4\mu^2 A^2 + \left(A\lambda + \frac{9}{32}\pi^6\sigma A^3 \right)^2 = \frac{4k^2}{\pi^6}. \quad (3.132)$$

Risolviendo la 3.132 rispetto a λ , si ottiene la seguente espressione, il cui grafico nel piano (λ, A) costituisce la curva “F.R.F.” (frequency-response-function) delle ampiezze di oscillazione

$$\lambda = -\frac{9}{32}\pi^6\sigma A^2 \pm \frac{2}{A} \sqrt{\frac{k^2}{\pi^6} - \mu^2 A^2}. \quad (3.133)$$

Dalle 3.131 è possibile ricavare anche l’espressione dello sfasamento γ della risposta stazionaria rispetto alla forzante

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\mu A \pi^3}{k}\right) + 2n\pi, \quad \gamma = \pi - \arcsin\left(\frac{\mu A \pi^3}{k}\right) + 2n\pi, \quad (3.134)$$

dove n è un numero intero.

Utilizzando le 3.124, 3.127, 3.128, è possibile scrivere una prima soluzione approssimata dell’equazione di moto 3.115, ottenuta fermando lo sviluppo della $\eta(t)$ al termine di ordine “0”

$$v(x, t) \simeq A \sin(\pi x) \sin((\pi^2 + \lambda)t - \gamma), \quad (3.135)$$

dove A e γ sono dati dalle equazioni di modulazione 3.126 o, per la soluzione stazionaria, dalle 3.133, 3.134.

In figura 3.8 è rappresentata una curva ampiezza-frequenza relativa alla sezione di mezzera della trave. L’ inclinazione verso sinistra della curva è tipica dei sistemi di tipo “softening”. Infatti, per tali sistemi, la rigidezza

¹¹Si noti che nelle 3.131 è scomparsa la dipendenza diretta dal parametro ε .

Capitolo 3

e, di conseguenza le frequenze proprie, diminuiscono all'aumentare della curvatura della trave. In conseguenza di ciò, tali strutture tendono ad andare in risonanza sotto l'azione di forzanti aventi una frequenza minore di quella fondamentale elastica.

Si noti che per $\lambda = 0$, ossia per una forzante avente frequenza uguale a quella fondamentale elastica della trave, l'ampiezza dello spostamento trasversale risulta, nel caso nonlineare, notevolmente inferiore a quella che si sarebbe osservata nel caso elastico. Ad esempio, per il sistema studiato in figura 3.8, il rapporto fra l'ampiezza elastica e quella nonlineare è: $A_{lin}/A_{nlin} = 0.002/0.0011 = 1.82$.

Altra conseguenza rilevante dell'inclinazione della curva F.R.F. è la comparsa, per un dato valore della frequenza dell'eccitazione, di più soluzioni stazionarie. Dalla figura 3.8, si può osservare come, per $\lambda \geq \lambda_c$, con $\lambda_c \simeq -1.34$, ad ogni valore della frequenza corrisponda un unico valore dell'ampiezza del moto della sezione. Invece, per $\lambda < \lambda_c$, la 3.132 fornisce tre possibili soluzioni; il verificarsi di una o dell'altra dipende dai valori iniziali assegnati ai parametri.

Nel caso illustrato nella figura, non sono ammissibili frequenze di eccitazione o condizioni iniziali che conducano a valori dell'ampiezza superiori a quello limite dato dalla 3.39; tale limitazione è rappresentata graficamente da una retta orizzontale tratteggiata.

Lo studio della dipendenza delle soluzioni stazionarie dalle condizioni iniziali può essere effettuato integrando per via numerica le equazioni di modulazione 3.126.

In figura 3.9 è riportata, ad esempio, l'evoluzione nel tempo dei parametri A e β per $\lambda = 0$ e due diverse condizioni iniziali. I parametri convergono, dopo un breve transitorio, su un'unica coppia di valori, coincidente con quella fornita dalle equazioni di modulazione in fase stazionaria.

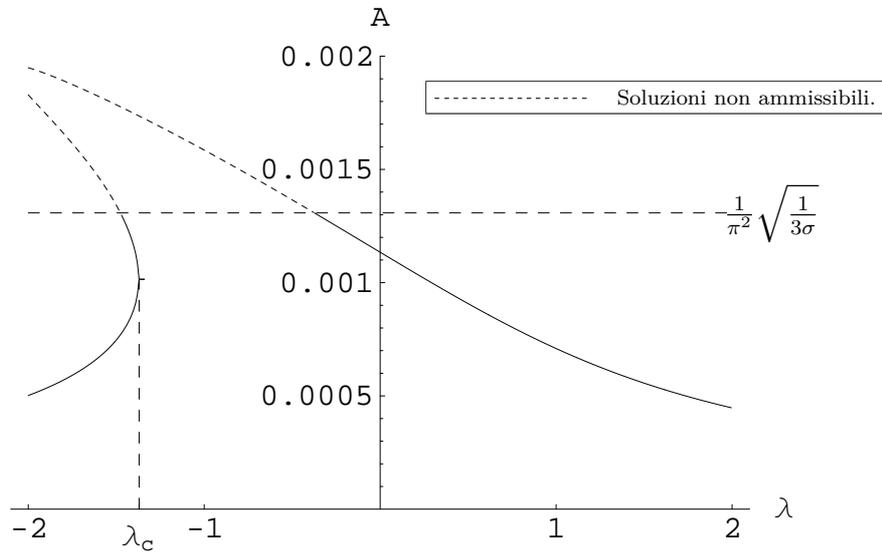


Figura 3.8. Curva frequenza–ampiezza per la sezione di mezzeria della trave. Valori dei parametri impiegati: $\sigma = 2000$; $\zeta = 0.05$; $k = 0.015$.

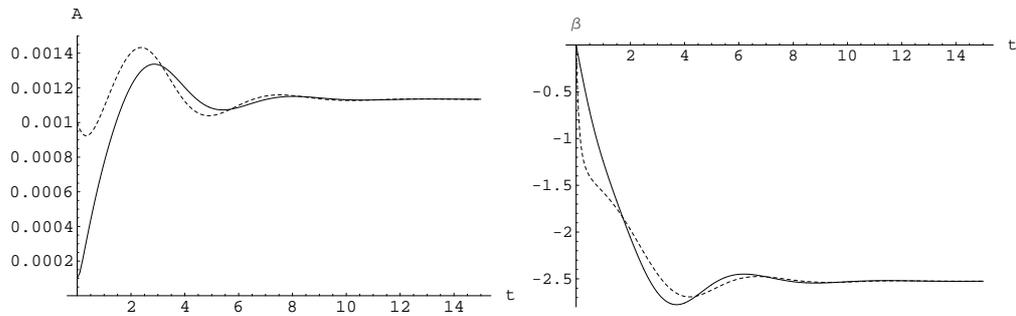


Figura 3.8(a).

Figura 3.8(b).

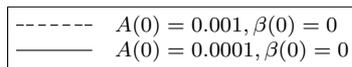


Figura 3.9. Evoluzione nel tempo dei parametri A e β per $\lambda = 0$ e per diverse condizioni iniziali.

3.4 La mensola: soluzioni approssimate ottenute con il metodo delle scale multiple

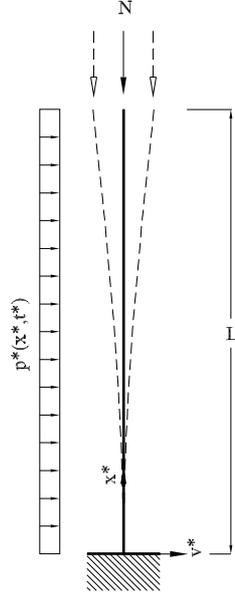


Figura 3.10. La trave semplicemente appoggiata: oscillazioni sul primo modo di vibrare.

Nella sezione seguente si studierà l'equazione 3.9 per una trave di luce L , cui siano impediti gli spostamenti e le rotazioni alla base e libera all'altro estremo (vedi figura 3.10).

Ancora una volta, si esprime la soluzione della 3.9 mediante l'espressione 3.10, dove le funzioni $\phi_i(x)$ sono scelte coincidenti con le forme modali elastiche della struttura.

Per una mensola, tali forme modali sono date dall'espressione dimensionale

$$\phi_i^*(x^*) = B \left\{ -\cos(\bar{\Lambda}_i x^*) + \cosh(\bar{\Lambda}_i x^*) - K_i \left[-\sin(\bar{\Lambda}_i x^*) + \sinh(\bar{\Lambda}_i x^*) \right] \right\}, \quad (3.136)$$

essendo B una costante di normalizzazione, K_i una costante relativa all' i -esimo modo di vibrare avente valore

$$K_i = \frac{\cos(\bar{\Lambda}_i L) + \cosh(\bar{\Lambda}_i L) - \sin(\bar{\Lambda}_i L) + \sinh(\bar{\Lambda}_i L)}{\cos(\bar{\Lambda}_i L) + \cosh(\bar{\Lambda}_i L) + \sin(\bar{\Lambda}_i L) + \sinh(\bar{\Lambda}_i L)} \quad (3.137)$$

ed essendo le $\bar{\Lambda}_i$ radici dell'equazione trascendente

$$\cos(\bar{\Lambda} L) \cosh(\bar{\Lambda} L) + 1 = 0. \quad (3.138)$$

Ricordando le 3.7 e posto

$$B = \frac{1}{2}, \quad L\bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1, \quad (3.139)$$

la forma adimensionale del primo modo di vibrare diventa

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2} \left\{ -\cos(\Lambda_1 x) + \cosh(\Lambda_1 x) - K_1 \left[-\sin(\Lambda_1 x) + \sinh(\Lambda_1 x) \right] \right\},$$

$$(3.140)$$

dove le costanti Λ_1 e K_1 assumono i valori

$$\Lambda_1 = 1.8751, \quad K_1 = 0.7341. \quad (3.141)$$

Si noti che Λ_1^2 rappresenta, in base alle regole 3.7, la frequenza adimensionale del primo modo di vibrare.

Sostituendo la 3.140 nella 3.10 si ottiene l'espressione unimodale approssimata della soluzione

$$v(x, t) \simeq \frac{1}{2} \varepsilon \eta(t) \{-\cos(\Lambda_1 x) + \cosh(\Lambda_1 x) - K_1 [-\sin(\Lambda_1 x) + \sinh(\Lambda_1 x)]\}. \quad (3.142)$$

La soluzione approssimata 3.142 verrà impiegata in tutte le applicazioni mostrate nei paragrafi seguenti.

3.4.1 Le equazioni di modulazione

Sostituendo la 3.142 nell'equazione del moto 3.9, si ottiene l'espressione

$$\phi_1(x) \eta_{tt} + \Lambda_1^4 \phi_1(x) \eta(t) + C \phi_1(x) \eta_t(t) = \varepsilon^2 \sigma (\phi_{1x,x})_{xx}^3 \eta(t) + \frac{p(x, t)}{\varepsilon}. \quad (3.143)$$

Scelta per $p(x, t)$ l'espressione 3.114 e seguendo la procedura più volte impiegata nei paragrafi precedenti, si ottiene

$$\eta'' + \Lambda_1^4 \eta = \bar{\varepsilon} \Lambda_1^4 \left(\eta^3 - 8\bar{\mu} \eta' + \bar{k} \sin(\Omega t) \right), \quad (3.144)$$

dove

$$\bar{\varepsilon} = 0.58716 \varepsilon^2 \sigma \Lambda_1^4, \quad 2\mu = \int_0^1 C \phi_1(x)^2 dx = \frac{\zeta_i \omega_i}{2}, \quad (3.145a)$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\bar{\varepsilon} \Lambda_1^4}, \quad \bar{k} = 1.56598 \frac{k}{\varepsilon \bar{\varepsilon} \Lambda_1^4}. \quad (3.145b)$$

Impiegando il metodo delle scale multiple, la soluzione della 3.144 si scrive

$$\eta(t) = \eta_0(T_0, T_1) + \bar{\varepsilon} \eta_1(T_0, T_1) + O(\bar{\varepsilon}^2) \quad (3.146)$$

e si pone

$$\Omega = \pi^2 + \bar{\lambda} \bar{\varepsilon}, \quad (3.147)$$

Capitolo 3

con $\bar{\lambda} = O(1)$ un parametro di “detuning” che esprime la vicinanza della frequenza della forzante a quella del primo modo di vibrare.

Sostituendo le 3.146, 3.147 nella 3.144 e trascurando i termini di ordine superiore ad $\bar{\varepsilon}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0^2} + 2\bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial T_0^2} + \Lambda_1^4 (\eta_0 + \bar{\varepsilon} \eta_1) = \Lambda_1^4 \bar{\varepsilon} \cdot \\ \left[\eta_0^3 - 8\bar{\mu} \frac{\partial \eta_0}{\partial T_0} + \bar{k} \sin [(\Lambda_1^2 + \bar{\lambda} \bar{\varepsilon}) t] \right] + O(\bar{\varepsilon}^2). \end{aligned} \quad (3.148)$$

Uguagliando i coefficienti delle potenze di $\bar{\varepsilon}$ si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari ordinarie, da risolvere in sequenza

ordine “0”:

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0^2} + \Lambda_1^4 \eta_0 = 0 \quad (3.149)$$

ordine “1”:

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial T_0^2} + \Lambda_1^4 \eta_1 = -2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \Lambda_1^4 \left(\eta_0^3 - 8\bar{\mu} \frac{\partial \eta_0}{\partial T_0} + \bar{k} \sin(\Lambda_1^2 T_0 + \bar{\lambda} T_1) \right). \quad (3.150)$$

Scritta la soluzione della 3.149 nella forma

$$\eta_0(t) = a(T_1) \sin(\Lambda_1^2 T_0 + \beta(T_1)), \quad (3.151)$$

inserita la 3.151 nella 3.150 e sviluppati i termini trigonometrici si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial T_0^2} + \Lambda_1^4 \eta_1 = -2\Lambda_1^2 \left(\dot{a} \cos(\Lambda_1^2 T_0 + \beta) - a\dot{\beta} \sin(\Lambda_1^2 T_0 + \beta) \right) + \Lambda_1^4 a^3 \cdot \\ \left(\frac{3}{4} \sin(\Lambda_1^2 T_0 + \beta) - \frac{1}{4} \cos(3\Lambda_1^2 T_0 + 3\beta) \right) - 8\bar{\mu} \Lambda_1^6 a \cos(\pi^2 T_0 + \beta) + \\ + \bar{k} \Lambda_1^4 \left[\sin(\Lambda_1^2 T_0 + \beta) \cos(\bar{\lambda} T_1 - \beta) + \cos(\Lambda_1^2 T_0 + \beta) \sin(\bar{\lambda} T_1 - \beta) \right]. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Annullando i termini secolari – ossia i termini proporzionali a $\sin(\Lambda_1^2 T_0 + \beta)$ e $\cos(\Lambda_1^2 T_0 + \beta)$ – nella 3.152 si ottengono le equazioni di modulazione del sistema

$$-2\Lambda_1^2 \dot{a} - 8\bar{\mu} \Lambda_1^6 a + \Lambda_1^4 \bar{k} \sin \gamma = 0, \quad (3.153a)$$

$$2\Lambda_1^2 a \dot{\beta} + \frac{3}{4} \Lambda_1^4 a^3 + \Lambda_1^4 \bar{k} \cos \gamma = 0, \quad (3.153b)$$

dove si è posto

$$\gamma = \bar{\lambda} T_1 - \beta. \quad (3.154)$$

3.4.2 Oscillazioni libere non smorzate

Dalle 3.153, ponendo $\bar{\mu} = 0$ e $\bar{k} = 0$, si ottengono le equazioni di modulazione per oscillazioni libere smorzate, date dal sistema

$$-2\Lambda_1^2 \dot{a} = 0 \quad (3.155a)$$

$$2\Lambda_1^2 a \dot{\beta} + \frac{3}{4}\Lambda_1^4 a^3 = 0, \quad (3.155b)$$

da cui si deduce

$$a = \text{costante}, \quad (3.156a)$$

$$\beta = -\frac{3}{8}\Lambda_1^2 a^2 T_1 + \bar{\beta}_0. \quad (3.156b)$$

Inoltre, ricordando le 3.145 e ponendo

$$\varepsilon a = A, \quad (3.157)$$

si ottiene da 3.156

$$\beta = -0.58716 \frac{3}{8}\Lambda_1^6 \sigma A^2 t + \bar{\beta}_0. \quad (3.158)$$

Pertanto, con l'aiuto di 3.10 e 3.151, una soluzione approssimata del moto della trave è data dall'espressione

$$v(x, t) \simeq A\phi_1(x) \sin \left[(\lambda_1^2 - 0.58716 \frac{3}{8}\Lambda_1^6 \sigma A^2) t + \beta_0 \right], \quad (3.159)$$

con A e β_0 costanti da determinare in base alle condizioni iniziali. Da 3.159 è possibile ricavare l'espressione della frequenza nonlineare adimensionale della mensola,

$$\omega = \lambda_1^2 - 0.58716 \frac{3}{8}\Lambda_1^6 \sigma A^2. \quad (3.160)$$

Si noti che la 3.160 rappresenta l'equivalente per la mensola dell'espressione 3.32, trovata per la trave appoggiata.

Come per la trave appoggiata, la 3.159 descrive il nostro problema solo per valori della curvatura compresi nell'intervallo adimensionale $[-\sqrt{\frac{1}{3\sigma}}, \sqrt{\frac{1}{3\sigma}}]$. Tale condizione, tenendo presente che il massimo valore della curvatura lungo la trave è attinto per $x = 0$, si traduce nella seguente limitazione per $|A|$,

$$|A| \leq \frac{1}{\Lambda_1^2} \sqrt{\frac{1}{3\sigma}}. \quad (3.161)$$

3.4.3 Oscillazioni libere smorzate

Dalle 3.153, ponendo $\bar{k} = 0$, si ottengono le equazioni di modulazione delle oscillazioni libere smorzate di una mensola, date dal sistema

$$-2\Lambda_1^2 \dot{a} - 8\bar{\mu}\Lambda_1^6 a = 0 \quad (3.162a)$$

$$2\Lambda_1^2 a \dot{\beta} + \frac{3}{4}\Lambda_1^4 a^3 = 0. \quad (3.162b)$$

Dalle 3.162, risolvendo per a e β e ricordando le 3.145 si ottiene

$$a = a_0 e^{-\zeta\Lambda_1^2 t}, \quad (3.163a)$$

$$\beta = \left(0.58716 \frac{3}{16\zeta} \Lambda_1^4 \sigma \varepsilon^2 a_0^2 \right) e^{-2\zeta\Lambda_1^2 t} + \beta_0, \quad (3.163b)$$

da cui, con l'aiuto di 3.151 e la 3.157, si ottiene la soluzione approssimata delle equazioni del moto

$$v(x, t) = A e^{-\zeta\Lambda_1^2 t} \phi(x) \sin \left(\Lambda_1^2 t + 0.58716 \frac{3}{16\zeta} \Lambda_1^4 \sigma A^2 e^{-2\zeta\Lambda_1^2 t} + \beta_0 \right), \quad (3.164)$$

con A e β_0 costanti da determinarsi in base alle condizioni iniziali.

3.4.4 Oscillazioni forzate

Le equazioni di modulazione 3.153, come nel caso della trave appoggiata, forniscono l'andamento dei parametri a e β nel tempo, note che siano le condizioni iniziali del problema – ossia i campi iniziali di spostamento e di velocità della trave –.

Tuttavia, le 3.153 possono essere notevolmente semplificate, se ci si limita ad ottenere i valori dei parametri in fase stazionaria. In questo caso, infatti, imponendo la condizione di stazionarietà

$$\dot{a} = \dot{\gamma} = 0, \quad (3.165)$$

le 3.153 diventano

$$8\bar{\mu}\Lambda_1^6 a = \Lambda_1^4 \bar{k} \sin \gamma, \quad (3.166a)$$

$$2\Lambda_1^2 a \bar{\lambda} + \frac{3}{4}\Lambda_1^4 a^3 = -\Lambda_1^4 \bar{k} \cos \gamma. \quad (3.166b)$$

Si noti che la condizione 3.165 trasforma le 3.153 in un sistema di equazioni algebriche.

Elevando al quadrato le due 3.166 e sommandole membro a membro si ottiene

$$64\bar{\mu}^2\Lambda_1^{12}a^2 + (2\Lambda_1^2a\bar{\lambda} + \frac{3}{4}\Lambda_1^4)^2 = \Lambda_1^8\bar{k}^2, \quad (3.167)$$

da cui, con l'aiuto della 3.145 e della posizione

$$A = \varepsilon a, \quad \lambda = \bar{\lambda}\bar{\varepsilon}, \quad (3.168)$$

si ottiene

$$\lambda = -0.58716\frac{3}{8}\Lambda_1^6\sigma A^2 \pm \frac{1}{2A\Lambda_1^2}\sqrt{1.56598^2k^2 - 64\mu^2\Lambda_1^4A^2}. \quad (3.169)$$

La 3.169, che trova il suo analogo per la trave appoggiata nella 3.133, rappresenta il legame che lega, in ciascun punto della trave, la frequenza dell'eccitazione all'ampiezza A dell'oscillazione, all'intensità k e, tramite σ , alle caratteristiche di nonlinearità del sistema.

3.5 Il metodo della Lagrangiana media

I principi del metodo della Lagrangiana media sono stati precedentemente illustrati nel capitolo 2. Nel seguito si propone una applicazione di tale procedura ad una trave costituita da materiale non resistente a trazione, utilizzando l'equazione costitutiva cubica 3.2. Nell'ipotesi di soluzione unimodale, verranno scritte le equazioni di modulazione che reggono il moto trasversale di una trave appoggiata e di una mensola, mostrando che esse coincidono con quelle ottenute mediante il metodo delle scale multiple.

Nelle ipotesi descritte all'inizio del paragrafo 3.2, la funzione Lagrangiana, per unità di lunghezza, è data dall'espressione

$$\mathcal{L}^* = \left[\frac{1}{2}(v_{t^*}^*)^2 - f'(\chi)\chi_{x^*}v_{x^*}^* + \frac{1}{2}g(\chi) \right] \rho bh + p^*(x^*, t^*)v^*, \quad (3.170)$$

già ottenuta in precedenza nel capitolo 1.

Nella 3.170 la $f(\chi)$ coincide, in questo caso, con l'equazione costitutiva 3.2, mentre

$$g(\chi) = 2(\chi f - F), \quad (3.171)$$

dove F è la primitiva di f , con $F(0) = 0$.

Capitolo 3

Come illustrato nel capitolo 1, la trattazione consente di tener conto dei termini dissipativi introducendo il vettore

$$Q^* = (-C^*v_{t^*}^*, 0)^T, \quad (3.172)$$

le cui componenti rappresentano la proiezione lungo le coordinate generalizzate (v^*, χ) della forza di smorzamento viscoso per unità di lunghezza.

3.5.1 La trave appoggiata in risonanza primaria.

Integrazione sulla luce della trave

Sia $\bar{\mathcal{L}}^*(t^*)$ la funzione Lagrangiana mediata sulla luce L della trave. Facendo l'ipotesi di simmetria del problema rispetto a $x^* = \frac{L}{2}$, si ha

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^*(t^*) &= \int_0^L \mathcal{L}(v^*(x^*, t^*), \chi(x^*, t^*)) dx^* = \\ &= 2\rho bh \left[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} (v_{t^*}^*)^2 dx^* - \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\partial f}{\partial x^*} v_{x^*}^* dx^* + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} 2(\chi f - F) dx^* \right] + \\ &+ 2 \int_0^{\frac{L}{2}} p^*(x^*, t^*) v^* dx^*. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Questa relazione può essere notevolmente semplificata. Infatti, ricordando l'equazione di congruenza 3.4 e osservando che per una trave appoggiata si ha $f(x^* = 0, t^*) = 0$ e $v_{x^*}^*(x^* = \frac{L}{2}, t^*) = 0$, è possibile scrivere

$$- \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\partial f}{\partial x^*} v_{x^*}^* dx^* = -f v_{x^*}^* \Big|_0^{\frac{L}{2}} + \int_0^{\frac{L}{2}} f v_{x^* x^*}^* dx^* = - \int_0^{\frac{L}{2}} f \chi dx^*, \quad (3.174)$$

che, introdotta nella 3.173, fornisce

$$\bar{\mathcal{L}}^*(t^*) = \rho bh \left[\int_0^{\frac{L}{2}} (v_{t^*}^*)^2 dx^* - 2 \int_0^{\frac{L}{2}} F(x^*, t^*) dx^* \right] + 2 \int_0^{\frac{L}{2}} p^*(x^*, t^*) v^* dx^*. \quad (3.175)$$

Ricordando che, in vista della relazione costitutiva considerata in questo capitolo, si ha

$$F(x^*, t^*) = \frac{c^2 \chi^2}{2} - \frac{\sigma^* c^2 \chi^4}{4} = c^2 \frac{v_{x^* x^*}^{*2}}{2} - c^2 \sigma^* \frac{v_{x^* x^*}^{*4}}{4} \quad (3.176)$$

e scegliendo come forzante

$$p(x^*, t^*) = k^* \sin(\Omega^* t^*), \quad (3.177)$$

con k^* costante lungo l'asse della trave, la 3.175 diventa

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^*(t^*) = & \rho b h \left[\int_0^{\frac{L}{2}} (v_{t^*}^*)^2 dx^* - 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \left(c^2 \frac{v_{x^* x^*}^{*2}}{2} - c^2 \sigma^* \frac{v_{x^* x^*}^{*4}}{4} \right) dx^* \right] + \\ & + 2 \int_0^{\frac{L}{2}} k^* \sin(\Omega^* t^*) v^* dx^*. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Anche in questo caso, conviene considerare una forma adimensionale del problema. Ricordando le regole di derivazione 3.6, 3.7, 3.8 e ponendo

$$\bar{\mathcal{L}}(t) = \bar{\mathcal{L}}^*(t^*) \frac{L}{\rho b h c^2}, \quad (3.179)$$

si ha, in sostituzione di 3.178,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(t) = & \left[\int_0^{\frac{1}{2}} (v_t)^2 dx - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{v_{xx}^2}{2} - \sigma \frac{v_{xx}^4}{4} \right) dx \right] + \\ & + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} k \sin(\Omega t) v dx. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Inoltre, poniamo

$$\Omega = \pi^2 + \lambda, \quad (3.181)$$

con $\lambda = O(1)$ il parametro che esprime la vicinanza della frequenza della forzante alla frequenza del primo modo di vibrare elastico della trave.

In questo caso, è possibile scrivere la soluzione nella forma

$$v(x, t) = A(t) \sin(\pi x) \sin((\pi^2 + \lambda)t - \gamma(t)) = A(t) \sin(\pi x) \sin(\pi^2 t + \beta(t)), \quad (3.182)$$

dove

$$\beta(t) = \lambda t - \gamma(t) \quad (3.183)$$

e $A(t), \gamma(t)$ sono parametri variabili lentamente nel tempo. In altre parole, si richiede che siano $\dot{A} = O(1), \dot{\gamma} = O(1)$ – si veda il capitolo 2 –, in modo da poter considerare i parametri A e γ costanti sul periodo dell'oscillazione. Si osservi che il parametro β definito dalla 3.183 è anch'esso, in

Capitolo 3

virtù della piccolezza di λ , un parametro variabile lentamente nel tempo, con $\dot{\beta} = O(1)$. Nel seguito, per garantire maggiore semplicità ed uniformità alla trattazione, si è preferito scegliere come coordinate indipendenti generalizzate i parametri A e β , piuttosto che A e γ .

Inserendo la 3.182 nelle 3.180 si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}(t) = & \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)^2 \left[\dot{A} \sin(\pi^2 t + \beta) + A \cos(\pi^2 t + \beta)(\pi^2 + \dot{\beta}) \right]^2 dx + \\ & - \int_0^{\frac{1}{2}} A^2 \pi^4 \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi^2 t + \beta) dx + \\ & + \frac{\sigma}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} A^4 \pi^8 \sin^4(\pi x) \sin^4(\pi^2 t + \beta) dx + \\ & + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} Ak \sin(\pi x) \sin(\pi^2 t + \beta + \gamma) \sin(\pi^2 t + \beta) dx,\end{aligned}\tag{3.184}$$

da cui, trascurando i termini in $\dot{A}^2, \dot{A}\dot{\beta}, \dot{\beta}^2$ e calcolando gli integrali si ha

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}(t) = & \frac{1}{4} \left[A^2 \cos^2(\pi^2 t + \beta)(\pi^4 + 2\pi^2 \dot{\beta}) + 2A\dot{A}\pi^2 \sin(\pi^2 t + \beta) \cos(\pi^2 t + \beta) \right] + \\ & - \frac{A^2 \pi^4}{4} \sin^2(\pi^2 t + \beta) + \frac{3\sigma A^4 \pi^8}{32} \sin^4(\pi^2 t + \beta) + \\ & + \frac{2Ak}{\pi} \sin(\pi^2 t + \beta + \gamma) \sin(\pi^2 t + \beta).\end{aligned}\tag{3.185}$$

Per quanto riguarda il termine dissipativo, detta Q_1^* l'unica componente non nulla del vettore Q^* , posto

$$Q_1 = Q_1^* \frac{L^2}{\rho b h c^2},\tag{3.186}$$

ricordando le regole di derivazione 3.6, 3.7, 3.8 e la 3.182, si deduce l'espressione adimensionale

$$Q_1 = -Cv_t = -C \sin(\pi x) \left[\dot{A} \sin(\pi^2 t + \beta) + A \cos(\pi^2 t + \beta)(\pi^2 + \dot{\beta}) \right].\tag{3.187}$$

Conviene scomporre da subito la 3.187 nelle sue componenti lungo i nuovi parametri lagrangiani A e β . Ricordando la 1.13, si può scrivere

$$\begin{aligned} Q_A = Q_1 \frac{\partial v}{\partial A} &= \\ &= -C \sin^2(\pi x) \left[\dot{A} \sin(\pi^2 t + \beta) + A \cos(\pi^2 t + \beta)(\pi^2 + \dot{\beta}) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \sin(\pi^2 + \beta) \simeq -\pi^2 AC \sin^2(\pi x) \sin(\pi^2 + \beta) \cos(\pi^2 t + \beta) \end{aligned} \quad (3.188)$$

$$\begin{aligned} Q_\beta = Q_1 \frac{\partial v}{\partial \beta} &= \\ &= -AC \sin^2(\pi x) \left[\dot{A} \sin(\pi^2 t + \beta) + A \cos(\pi^2 t + \beta)(\pi^2 + \dot{\beta}) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \cos(\pi^2 + \beta) \simeq -\pi^2 A^2 C \sin^2(\pi x) \cos^2(\pi^2 t + \beta) \end{aligned} \quad (3.189)$$

Nelle 3.188, 3.189 è stata accettata l'ipotesi di *piccolo smorzamento*, come già fatto nella risoluzione del problema col metodo delle scale multiple, ossia si è ipotizzato $C = O(1)$ e sono stati trascurati i termini in $\dot{A}C, \dot{\beta}C$.

Integrando le 3.188, 3.189 lungo l'asse della trave e ricordando le 3.98 si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{Q}_A &= - \int_0^1 \pi^2 AC \sin^2(\pi x) \sin(\pi^2 + \beta) \cos(\pi^2 t + \beta) dx = \\ &= -2\mu\pi^2 A \sin(\pi^2 + \beta) \cos(\pi^2 t + \beta) \end{aligned} \quad (3.190)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_\beta &= - \int_0^1 \pi^2 A^2 C \sin^2(\pi x) \cos^2(\pi^2 t + \beta) dx \\ &= -2\mu\pi^2 A^2 \cos^2(\pi^2 t + \beta). \end{aligned} \quad (3.191)$$

Integrazione sul semiperiodo elastico dell'oscillazione

Integrando la 3.185 sul semiperiodo elastico dell'oscillazione $\frac{1}{\pi}$ e considerando A, β, \dot{A} e $\dot{\beta}$ costanti durante l'integrazione si ottiene ¹²

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathcal{L}}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) &= \int_{-\frac{\beta}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi}}^{\frac{3}{2\pi} - \frac{\beta}{\pi^2}} \bar{\mathcal{L}}(t) dt = \\ &= \frac{1}{4} A^2 (\pi^4 + 2\pi^2 \dot{\beta}) \frac{1}{2\pi} - \frac{A^2 \pi^4}{4} \frac{1}{2\pi} + \frac{3\sigma A^4 \pi^8}{32} \frac{3}{8\pi} + \\ &\quad + \frac{Ak}{\pi^2} \cos(\lambda t - \beta). \end{aligned} \quad (3.192)$$

¹²In virtù della piccolezza di λ , lo stesso risultato si sarebbe ottenuto scegliendo come coordinate generalizzate indipendenti A e γ e integrando sul semiperiodo $\frac{\pi}{\Omega}$.

Capitolo 3

Con lo stesso procedimento, le 3.190, 3.191 diventano

$$\bar{Q}_A = \int_{-\frac{\beta}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi}}^{\frac{3}{2\pi} - \frac{\beta}{\pi^2}} -2\mu\pi^2 A \sin(\pi^2 t + \beta) \cos(\pi^2 t + \beta) dt = 0 \quad (3.193)$$

$$\bar{Q}_\beta = \int_{-\frac{\beta}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi}}^{\frac{3}{2\pi} - \frac{\beta}{\pi^2}} -2\mu\pi^2 A^2 \cos^2(\pi^2 t + \beta) dt = -\mu\pi A^2. \quad (3.194)$$

Scrittura delle equazioni di modulazione

Le equazioni di Eulero–Lagrange, per la Lagrangiana $\bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta})$, con il vettore delle forze generalizzate $\bar{Q} = (\bar{Q}_A, \bar{Q}_\beta)^T$, sono

$$\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{A}} \right)' - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial A} = \bar{Q}_A \quad (3.195a)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\beta}} \right)' - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \beta} = \bar{Q}_\beta. \quad (3.195b)$$

Inserendo le 3.192, 3.193, 3.194 nelle 3.195 si ottengono le relazioni

$$A\dot{\beta} + \frac{9}{32}\sigma A^3 \pi^6 + \frac{2k}{\pi^3} \cos(\lambda t - \beta) = 0, \quad (3.196a)$$

$$\dot{A} + 2\mu A - \frac{2k}{\pi^3} \sin(\lambda t - \beta) = 0, \quad (3.196b)$$

che costituiscono le equazioni di modulazione del sistema. Si noti che le 3.196 sono identiche, di fatto, alle 3.126 ottenute col metodo delle scale multiple.

Si ritiene opportuno, a questo punto, fare le seguenti considerazioni:

1) Le relazioni 3.196 sono state ottenute senza fare alcuna considerazione preliminare sugli ordini di grandezza di A e k , contrariamente a quanto accade con il metodo delle scale multiple. Tuttavia, l'ipotesi di piccolezza di A e k è implicita nell'altra fatta sulla forma della soluzione, che si mantiene unimodale fino a quando si mantengono limitati il grado di nonlinearietà del problema e, di conseguenza, anche l'ampiezza delle oscillazioni e l'intensità della forzante.

2) Per un sistema elastico in fase stazionaria, posto

$$\dot{A} = 0, \quad \dot{\beta} = \lambda, \quad \sigma = 0, \quad (3.197)$$

le 3.198 forniscono

$$\gamma = \arccos \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\mu^2}} \simeq \frac{\pi}{2}, \quad (3.198a)$$

$$A = \frac{2k}{\pi^3} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 + 4\mu^2}} \simeq \frac{k}{\mu\pi^3}. \quad (3.198b)$$

Tenuto conto di 3.197 e 3.198, la 3.192 fornisce:

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{4}A^2\pi^4 \frac{1}{2\pi} - \frac{A^2\pi^4}{4} \frac{1}{2\pi} + \frac{Ak}{\pi^2} \cos \gamma \simeq 0, \quad (3.199)$$

con $\bar{\mathcal{L}} = 0$ per $\lambda = 0$ o per $k = 0$.

3.5.2 La mensola: risonanza primaria.

Integrazione sulla luce della trave

Sia $\bar{\mathcal{L}}^*(t^*)$ la funzione Lagrangiana mediata sulla luce L della trave. Analogamente a quanto fatto per la trave semplicemente appoggiata e considerando che è $v_{x^*}^*(x^* = 0, t) = 0$ e $f(x^* = L, t) = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^*(t^*) &= \int_0^L \mathcal{L}(v^*(x^*, t^*), \chi(x^*, t^*)) dx^* = \\ &= \rho b h \left[\frac{1}{2} \int_0^L v^{*2}(t^*) dx^* - \int_0^L F(x^*, t^*) dx^* \right] + \int_0^L p^*(x^*, t^*) v^* dx^*, \end{aligned} \quad (3.200)$$

Con $F(x^*, t^*)$ e $p^*(x^*, t^*)$ definiti rispettivamente da 3.176 e 3.177, la 3.200 diventa

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^*(t^*) &= \rho b h \left[\int_0^L \frac{1}{2} (v_{t^*}^*)^2 dx^* - \int_0^L \left(c^2 \frac{v_{x^* x^*}^{*2}}{2} - c^2 \sigma^* \frac{v_{x^* x^*}^{*4}}{4} \right) dx^* \right] + \\ &+ \int_0^L k^* \sin(\Omega^* t^*) v^* dx^*. \end{aligned} \quad (3.201)$$

Ricordando le regole 3.6, 3.7, 3.8, 3.179, la 3.201 assume l'espressione adimensionale

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(t) &= \int_0^1 \frac{1}{2} (v_t)^2 dx - \int_0^1 \left(\frac{v_{xx}^2}{2} - \sigma \frac{v_{xx}^4}{4} \right) dx + \\ &+ \int_0^1 k \sin(\Omega t) v dx. \end{aligned} \quad (3.202)$$

Capitolo 3

Si scelga per Ω l'espressione

$$\Omega = \Lambda_1^2 + \lambda, \quad (3.203)$$

essendo $\lambda = O(1)$ il parametro che esprime la vicinanza della frequenza della forzante alla frequenza del primo modo di vibrare elastico della trave.

Anche in questo caso, come per la trave appoggiata, è possibile scrivere la soluzione nella forma

$$v(x, t) = A(t)\phi_1(x) \sin((\Lambda_1^2 + \lambda)t - \gamma(t)) = A(t)\phi_1(x) \sin(\Lambda_1^2 t + \beta(t)), \quad (3.204)$$

dove $\phi_1(x)$ è il primo modo di vibrare della mensola, definito dalla 3.140, e si è posto

$$\beta(t) = \lambda t - \gamma(t), \quad (3.205)$$

con $A(t), \gamma(t), \beta(t)$ parametri variabili lentamente nel tempo. Come per la trave appoggiata, si sceglie di utilizzare come coordinate indipendenti generalizzate i parametri A e β .

Inserendo la 3.204 nella 3.202 si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(t) = & \frac{1}{2} \int_0^1 \phi_1(x)^2 \left[\dot{A} \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) + A \cos(\Lambda_1^2 t + \beta)(\Lambda_1^2 + \dot{\beta}) \right]^2 dx + \\ & - \frac{1}{2} \int_0^1 A^2 \phi_1''(x)^2 \sin^2(\Lambda_1^2 t + \beta) dx + \\ & + \frac{\sigma}{4} \int_0^1 A^4 \phi_1''(x)^4 \sin^4(\Lambda_1^2 t + \beta) dx + \\ & + \int_0^1 Ak \phi_1(x) \sin(\Lambda_1^2 t + \beta + \gamma) \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) dx. \end{aligned} \quad (3.206)$$

Trascurando nella 3.206 i termini in $\dot{A}^2, \dot{A}\dot{\beta}, \dot{\beta}^2$ e svolgendo gli integrali si ha

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(t) = & \frac{1}{8} \left[A^2 \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta)(\Lambda_1^4 + 2\Lambda_1^2 \dot{\beta}) + 2A\dot{A}\Lambda_1^2 \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta) \right] + \\ & - \frac{A^2 \Lambda_1^4}{8} \sin^2(\Lambda_1^2 t + \beta) + 0.58716 \frac{\sigma A^4 \Lambda_1^8}{16} \sin^4(\Lambda_1^2 t + \beta) + \\ & + 1.56598 \frac{Ak}{4} \sin(\Lambda_1^2 t + \beta + \gamma) \sin(\Lambda_1^2 t + \beta). \end{aligned} \quad (3.207)$$

Per quanto riguarda il termine dissipativo Q_1^* , con l'aiuto delle regole 3.6, 3.7, 3.8, 3.186 e di 3.204, si ottiene la seguente espressione adimensionale

$$Q_1 = -Cv_t = -C\phi_1(x) \left[\dot{A} \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) + A \cos(\Lambda_1^2 t + \beta)(\Lambda_1^2 + \dot{\beta}) \right]. \quad (3.208)$$

Ricordando la 1.13, è possibile scomporre la 3.208 nelle sue componenti rispetto ai parametri A e β ; accettata l'ipotesi di piccolo smorzamento e trascurati i termini in $\dot{A}C, \dot{\beta}C$, si deduce

$$\begin{aligned} Q_A = Q_1 \frac{\partial v}{\partial A} &= \\ &= -AC\phi_1^2(x) \left[\dot{A} \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) + A \cos(\Lambda_1^2 t + \beta)(\Lambda_1^2 + \dot{\beta}) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \sin(\Lambda_1^2 + \beta) \simeq -\Lambda_1^2 A^2 C \phi^2(x) \sin(\Lambda_1^2 + \beta) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta), \end{aligned} \quad (3.209)$$

$$\begin{aligned} Q_\beta = Q_1 \frac{\partial v}{\partial \beta} &= \\ &= -AC\phi^2(x) \left[\dot{A} \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) + A \cos(\Lambda_1^2 t + \beta)(\Lambda_1^2 + \dot{\beta}) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \cos(\Lambda_1^2 + \beta) \simeq -\Lambda_1^2 A^2 C \phi^2(x) \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta). \end{aligned} \quad (3.210)$$

Integrando le 3.209, 3.210 lungo l'asse della trave e ricordando le 3.145 si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{Q}_A &= - \int_0^1 \Lambda_1^2 A^2 C \phi^2(x) \sin(\Lambda_1^2 + \beta) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta) dx \simeq \\ &\simeq -2\mu \Lambda_1^2 A^2 \sin(\Lambda_1^2 + \beta) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta), \end{aligned} \quad (3.211)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_\beta &= - \int_0^1 \Lambda_1^2 A^2 C \phi^2(x) \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta) dx \simeq \\ &\simeq -2\mu \Lambda_1^2 A^2 \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta). \end{aligned} \quad (3.212)$$

Capitolo 3

Integrazione sul semiperiodo elastico dell'oscillazione

Integrando la 3.207 sul semiperiodo elastico dell'oscillazione $\frac{\pi}{\Lambda_1}$ e considerando A , β , \dot{A} e $\dot{\beta}$ costanti durante l'integrazione si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) &= \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2} + \frac{\pi}{2\lambda_1^2}}^{\frac{3\pi}{2\Lambda_1^2} - \frac{\beta}{\Lambda_1^2}} \bar{\mathcal{L}}(t) dt = \\ &= \frac{A^2\pi}{16\Lambda_1^2} (\Lambda_1^4 + 2\Lambda_1^2\dot{\beta}) - \frac{A^2\pi\Lambda_1^2}{16} + 0.58716 \frac{3\sigma\pi A^4\Lambda_1^6}{128} + \\ &+ 1.56598 \frac{Ak\pi \cos(\lambda t - \beta)}{8\Lambda_1^2}.\end{aligned}\quad (3.213)$$

Con lo stesso procedimento, le 3.211, 3.212 diventano

$$\bar{Q}_A = \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2} + \frac{\pi}{2\lambda_1^2}}^{\frac{3\pi}{2\Lambda_1^2} - \frac{\beta}{\Lambda_1^2}} -2\mu\Lambda_1^2 A^2 \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta) dt = 0 \quad (3.214)$$

$$\bar{Q}_\beta = \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2} + \frac{\pi}{2\lambda_1^2}}^{\frac{3\pi}{2\Lambda_1^2} - \frac{\beta}{\Lambda_1^2}} -2\mu\Lambda_1^2 A^2 \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta) dt = -\mu\pi A^2. \quad (3.215)$$

Scrittura delle equazioni di modulazione

Le equazioni di Eulero–Lagrange 3.195, applicate alla Lagrangiana 3.213 ed al vettore di componenti 3.214, 3.215, forniscono le relazioni

$$A\dot{\beta} + \frac{3}{8} 0.58716\sigma A^3\Lambda_1^6 + \frac{1.56598k}{2\Lambda_1^2} \cos(\lambda t - \beta) = 0 \quad (3.216a)$$

$$\dot{A} + 4\mu A - \frac{1.56598k}{2\Lambda_1^2} \sin(\lambda t - \beta) = 0, \quad (3.216b)$$

che rappresentano le equazioni di modulazione del sistema. Si noti che le 3.216 sono identiche, di fatto, alle 3.153 ottenute col metodo delle scale multiple.

Capitolo 4

Studio delle vibrazioni flessionali di una trave di lunghezza finita costituita da materiale non resistente a trazione

Si consideri una trave con asse verticale di luce L , sezione rettangolare di altezza h e larghezza b , costanti lungo l'asse. Facciamo l'ipotesi che la trave sia costituita da materiale non resistente a trazione in direzione longitudinale e sia soggetta ad uno sforzo normale N costante lungo l'asse, in modo che siano valide, sezione per sezione, le equazioni costitutive 1.10.

Supponiamo, inoltre, trascurabile la deformabilità a taglio della trave e sufficientemente piccoli gli spostamenti trasversali da poter considerare trascurabili gli effetti dello sforzo normale sull'equilibrio dinamico della trave. Si suppongano, infine, trascurabili gli effetti dell'inerzia rotazionale lungo l'asse della trave.

Sotto queste ipotesi, come visto precedentemente nel capitolo 1, detti x^* l'ascissa lungo l'asse della trave, t^* il tempo, $v(x^*, t^*)$ lo spostamento trasversale, $\chi(x^*, t^*)$ il cambiamento di curvatura e $p(x^*, t^*)$ il carico trasversale per unità di lunghezza, è possibile scrivere la Lagrangiana del sistema, espressa per unità di lunghezza, dalla relazione

$$\mathcal{L}^* = \left[\frac{1}{2}(v_{t^*}^*)^2 - f'(\chi)\chi_{x^*}v_{x^*}^* + \frac{1}{2}g(\chi) \right] \rho b h + p(x^*, t^*)v^*, \quad (4.1)$$

con $f(\chi)$, $f'(\chi)$, $g(\chi)$ definite, rispettivamente, da 1.10, 1.21, 1.22.

In presenza di forze dissipative di tipo viscoso, detto C^* il coefficiente di smorzamento viscoso per unità di lunghezza, è possibile introdurre il vettore

$$Q^* = (-C^*v_{t^*}^*, 0)^T, \quad (4.2)$$

le cui componenti, come visto nel capitolo 1, rappresentano la proiezione lungo le coordinate generalizzate (v^*, χ) della forza di smorzamento viscoso

Capitolo 4

per unità di lunghezza. Nelle pagine seguenti, come già fatto nelle precedenti applicazioni, verrà considerata valida l'ipotesi di *piccolo smorzamento*.

In questo capitolo si procederà allo studio delle vibrazioni trasversali della trave sopra descritta mediante il metodo della “Lagrangiana media”, considerando due differenti condizioni di vincolo: la trave semplicemente appoggiata e la mensola.

Il metodo della Lagrangiana media è stato già descritto nel capitolo 2 ed impiegato nel capitolo 3 per lo studio dell'equazione costitutiva semplificata di tipo “cubico”.

Contrariamente alla Lagrangiana “cubica” definita in 3.175, la 4.1 presenta una diversa definizione a seconda che la sezione considerata sia interamente reagente – $\chi(x^*, t^*) \leq \alpha^*$, con α^* coincidente con la curvatura limite elastica definita dalla 1.9 – o fessurata – $\chi(x^*, t^*) > \alpha^*$ –. Infatti, al generico istante t^* , in base all'andamento del momento flettente ed all'entità dello sforzo normale, è possibile individuare lungo l'asse alcune regioni in cui la sezione della trave è parzialmente reagente, altre, invece, in cui si mantiene interamente in campo elastico.

Nella trattazione seguente si accetta l'ipotesi che la deformata della trave coincida col primo modo di vibrare elastico della trave e, quindi, che il raccordo fra regioni elastiche e fessurate sia di classe C^∞ .

Sotto questa ipotesi, è possibile individuare tali regioni lungo l'asse della trave mediante l'ascissa $x_0^*(t^*)$ che corrisponde, al generico istante t^* , alla posizione, rispetto all'origine del sistema di riferimento, della sezione la cui curvatura coincide con quella limite elastica. La trattazione viene quindi uniformata mediante l'integrazione lungo l'asse della trave.

Altra importante differenza fra la 4.1 e la Lagrangiana “cubica” approssimata consiste nel tipo di funzioni coinvolte, che non sono più di tipo polinomiale. La procedura di doppia integrazione della Lagrangiana e la compresenza di comportamenti elastico e fessurato lungo la trave, durante il periodo di oscillazione, generano funzioni complicate, come, in particolare, alcuni integrali ellittici del secondo tipo. Di conseguenza, le equazioni di modulazione ottenute non risultano risolubili esplicitamente, nemmeno nel caso più semplice di oscillazioni stazionarie.

Appare opportuno, prima di procedere con le applicazioni, ricordare le ipotesi alla base del metodo della Lagrangiana media:

1. Si ipotizza per la soluzione del problema la forma seguente

$$v^*(x^*, t^*) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^*(t^*) \phi_i(x^*) \cos(\omega_i t^* + \beta_i(t^*)), \quad (4.3)$$

con $\phi_i(x^*)$ e ω_i coincidenti rispettivamente con i modi di vibrare elastici e le frequenze proprie elastiche della trave. In particolare, per i problemi trattati successivamente, si accetta l'ipotesi di *soluzione unimodale* e si pone

$$v^*(x^*, t^*) \simeq A^*(t^*)\phi(x^*) \cos(\omega t^* + \beta(t^*)). \quad (4.4)$$

2. I parametri $A^*(t^*), \beta(t^*)$ sono ipotizzati *variabili lentamente nel tempo*, ossia si considerano piccole le derivate $\dot{A}^*(t^*), \dot{\beta}(t^*)$ e trascurabili i termini in $\dot{A}^{*2}, \dot{A}^*\dot{\beta}, \dot{\beta}^2$. Tuttavia, nel caso del materiale non resistente a trazione, il parametro $\dot{\beta}$ risulta, in alcune situazioni, velocemente crescente con l'ampiezza delle oscillazioni; si vedrà nel seguito come sia possibile adeguare la trattazione per tener conto di valori di $\dot{\beta}$ maggiori.
3. Si considera accettabile l'ipotesi di *leggero smorzamento*, nel senso già precisato nel capitolo 3.

4.1 La trave semplicemente appoggiata

4.1.1 Oscillazioni libere non smorzate

Nel paragrafo seguente ci si propone di studiare le oscillazioni libere non smorzate – $C^* = 0, p^* = 0$ – di una trave semplicemente appoggiata soggetta ad una deformata iniziale del tipo

$$v^*(x^*, 0) = A_0^* \sin\left(\pi \frac{x^*}{L}\right), \quad \text{con } A_0^* > 0. \quad (4.5)$$

Come già affermato più volte nei capitoli precedenti, tale problema ammette con ottima approssimazione una soluzione unimodale del tipo descritto dalla 4.4.

La geometria della trave è illustrata in figura 4.1.

Integrazione sulla luce della trave

Detta $x_0^*(t^*)$ l'ascissa della sezione in cui si è attinto il valore della curvatura limite elastica – si veda la figura 4.1 – e ricordando l'espressione 3.175 già ricavata per la trave appoggiata, la Lagrangiana mediata sulla luce della

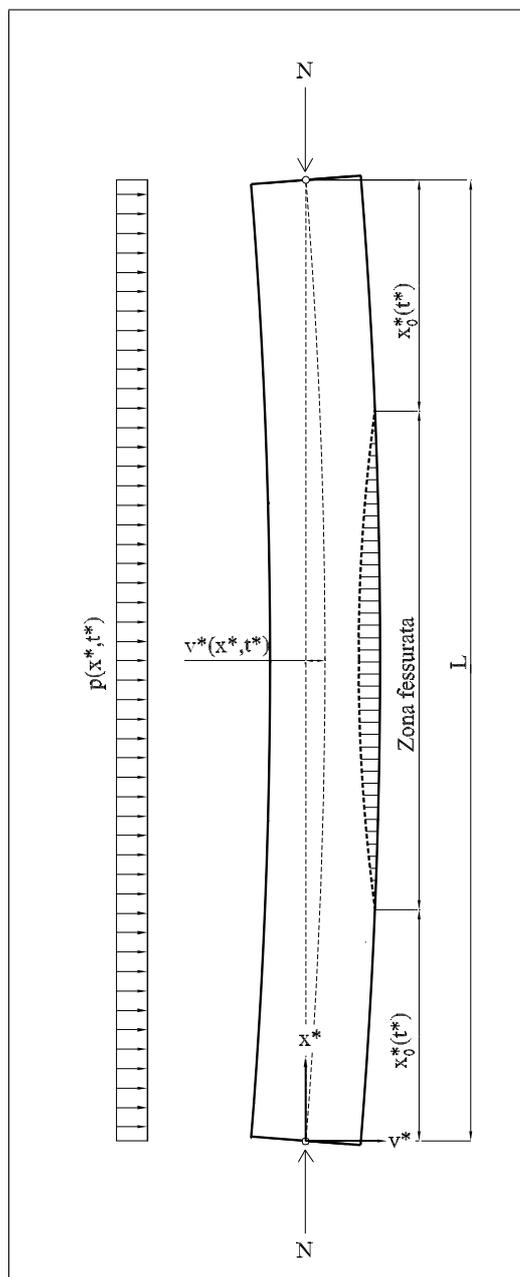


Figura 4.1. La trave semplicemente appoggiata.

trave diventa

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^*(t^*) = & \rho b h \left[\int_0^{\frac{L}{2}} (v_{t^*}^*)^2 dx^* \right] + \\ & - 2\rho b h \left[\int_0^{x_0^*} F(x^*, t^*) dx^* + \int_{x_0^*}^{\frac{L}{2}} F(x^*, t^*) dx^* \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

essendo la funzione $F(x^*, t^*)$ definita da

$$F(x^*, t^*) = c^2 \frac{v_{x^* x^*}^{*2}}{2} \quad \text{per } x^* \leq x_0^* \quad (4.7a)$$

$$\begin{aligned} F(x^*, t^*) = & c^2 \alpha^* \left(3|-v_{x^* x^*}| - 4\sqrt{\alpha^* |-v_{x^* x^*}|} \right) + \\ & + \frac{3}{2} c^2 \alpha^{*2} \quad \text{per } x^* > x_0^*. \end{aligned} \quad (4.7b)$$

Le 4.7 sono state ottenute sostituendo nelle 3.175 l'espressione 1.30 che fornisce la curvatura in funzione dello spostamento trasversale.

Ricordando le regole 3.6, 3.7, 3.8, 3.179 e posto

$$\alpha = -\frac{2N}{Ebh^3}L = \alpha^*L, \quad x_0 = \frac{x_0^*}{L}, \quad (4.8)$$

si ottiene la seguente espressione adimensionale della 4.6

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(t) = & \int_0^{\frac{1}{2}} v_t^2 dx - 2 \int_0^{x_0} \frac{v_{xx}^2}{2} dx + \\ & - 2 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \alpha \left(3|-v_{xx}| - 4\sqrt{\alpha |-v_{xx}|} + \frac{3}{2}\alpha \right) dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Per una trave semplicemente appoggiata l'espressione 4.4 dello spostamento trasversale, opportunamente adimensionalizzata, diventa

$$v(x, t) \simeq A(t) \sin(\pi x) \cos(\pi^2 t + \beta(t)) \quad \text{con } A(t) \geq 0 \quad (4.10)$$

Capitolo 4

che, sostituita in 4.9, fornisce

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{L}}(t) = & \left[\dot{A} \cos(\pi^2 t + \beta) - A(\pi^2 + \dot{\beta}) \sin(\pi^2 t + \beta) \right]^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)^2 dx + \\
 & - A^2 \pi^4 \cos^2(\pi^2 t + \beta) \int_0^{x_0} \sin^2(\pi x) dx + \\
 & - 6\alpha A \pi^2 |\cos(\pi^2 t + \beta)| \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x) dx + \\
 & + 8\sqrt{\alpha^3 A \pi^2 |\cos(\pi^2 t + \beta)|} \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sin(\pi x)} dx + \\
 & - 3\alpha^2 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} dx.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Svolgendo gli integrali nella 4.11 e trascurando i termini in $\dot{A}^2, \dot{A}\dot{\beta}, \dot{\beta}^2$ si ottiene

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{L}}(t) \simeq & \frac{1}{4} \left[A^2 \pi^2 \sin^2(\pi^2 t + \beta)(\pi^2 + 2\dot{\beta}) - 2A\dot{A}\pi^2 \sin(\pi^2 t + \beta) \cos(\pi^2 t + \beta) \right] + \\
 & - \frac{A^2 \pi^4}{2} \cos^2(\pi^2 t + \beta) x_0 + \frac{A^2 \pi^3}{4} \cos^2(\pi^2 t + \beta) \sin(2\pi x_0) + \\
 & - 6\alpha A \pi |\cos(\pi^2 t + \beta)| \cos(\pi x_0) + \\
 & + \frac{16}{\pi} \sqrt{\alpha^3 A \pi^2 |\cos(\pi^2 t + \beta)|} E\left(\frac{\pi}{4}(1 - 2x_0), 2\right) + \\
 & + 3\alpha^2 x_0 - \frac{3}{2}\alpha^2,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

dove la funzione $E\left(\frac{\pi}{4}(1 - 2x_0), 2\right)$ rappresenta l'integrale ellittico del secondo tipo,

$$E\left(\frac{\pi}{4}(1 - 2x_0), 2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}(1-2x_0)} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin^2(\theta)}} d\theta. \tag{4.13}$$

Il caso elastico può essere recuperato dalla 4.12 ponendo $x_0 = \frac{1}{2}$; in questo caso, la Lagrangiana mediata sulla luce della trave assume l'espressione

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{L}}(t)_{el} \simeq & \frac{1}{4} \left[A^2 \pi^2 \sin^2(\pi^2 t + \beta)(\pi^2 + 2\dot{\beta}) - 2A\dot{A}\pi^2 \sin(\pi^2 t + \beta) \cos(\pi^2 t + \beta) \right] + \\
 & - \frac{A^2 \pi^4}{4} \cos^2(\pi^2 t + \beta).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

La funzione $x_0(t)$

La funzione $x_0(t)$ rappresenta, al generico istante t , l'ascissa della sezione più vicina all'origine in cui si verifica

$$|\chi(x_0, t)| = \alpha. \quad (4.15)$$

Per la simmetria del problema, l'altra sezione della trave in cui è verificata la condizione 4.15 ha ascissa $(L - x_0)$. Come è possibile verificare dalla figura 4.1, la funzione $x_0(t) = \frac{x_0^*}{L}$ è compresa nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$.

Ricordando l'equazione di congruenza 1.30 e l'espressione 4.10 dello spostamento trasversale, la condizione 4.15 diventa

$$|-v_{xx}(x_0, t)| = \pi^2 A \sin(\pi x_0) |\cos(\pi^2 t + \beta)| = \alpha, \quad (4.16)$$

da cui si ricava la relazione

$$\sin(\pi x_0) = \frac{\alpha}{A\pi^2 |\cos(\pi^2 t + \beta)|}, \quad (4.17)$$

e quindi

$$x_0(t) = \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{\alpha}{A\pi^2 |\cos(\pi^2 t + \beta)|} \right); \quad (4.18)$$

la 4.18 è definita negli intervalli temporali

$$t'_p \leq t \leq t_p, \quad (4.19)$$

dove

$$t'_p = \frac{1}{\pi^2} \left(\arccos\left(-\frac{\alpha}{A\pi^2}\right) - \beta + n\pi \right) \quad (4.20)$$

$$t_p = \frac{1}{\pi^2} \left(\arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right) - \beta + n\pi \right), \quad (4.21)$$

ed n è un numero intero.

La funzione x_0 , valutata in t'_p e t_p , assume valore $\frac{1}{2}$: in tali istanti, infatti, l'unica sezione che raggiunge il limite elastico è quella di mezzeria. Per valori esterni agli intervalli 4.19, la funzione x_0 non è definita, in quanto nessun punto della trave raggiunge il valore limite della curvatura elastica, ma può essere estesa con continuità, ponendo

$$x_0(t) = \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad t_p \leq t \leq t'_p. \quad (4.22)$$

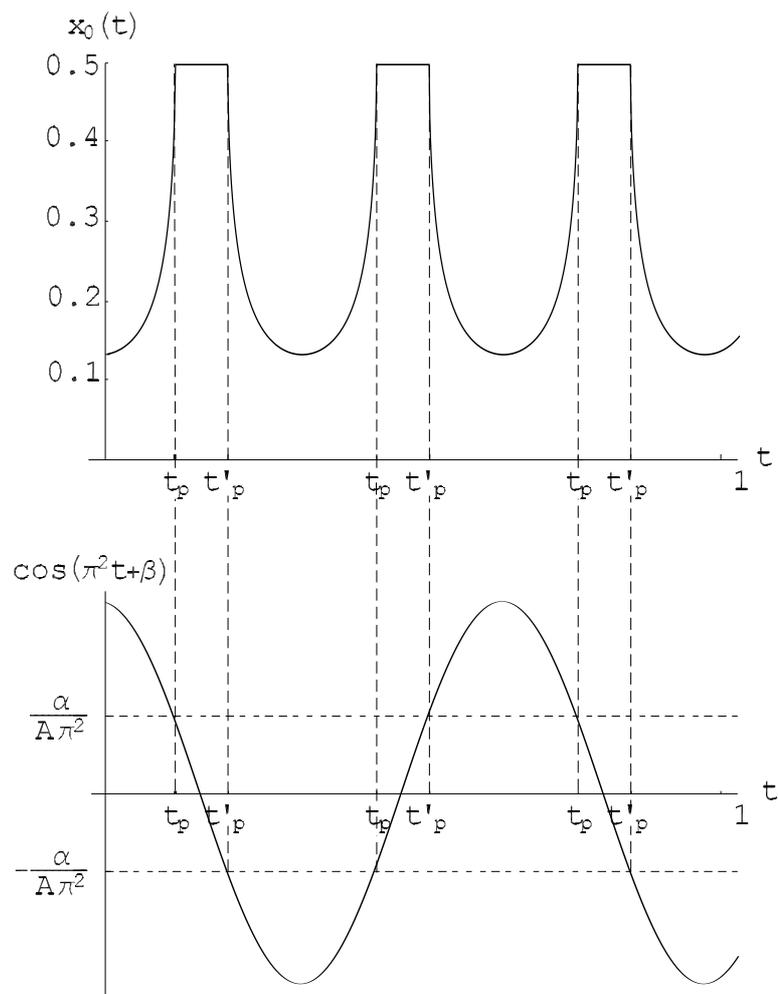


Figura 4.2. La funzione $x_0(t)$ confrontata con le oscillazioni trasversali elastiche di una sezione della trave.

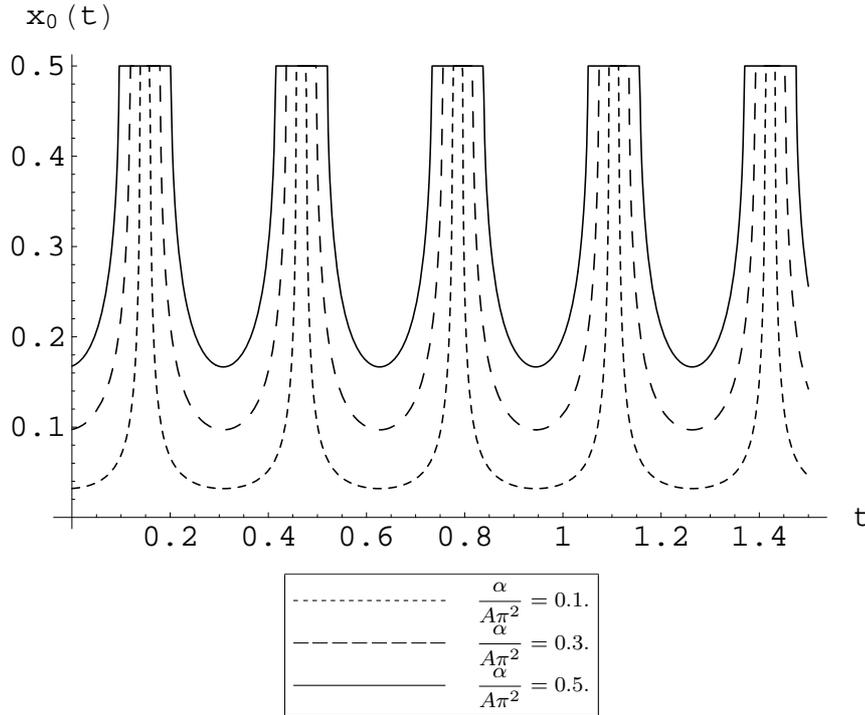


Figura 4.3. La funzione $x_0(t)$ al variare del rapporto $\frac{\alpha}{A\pi^2}$.

La funzione $x_0(t)$ definita dalle 4.18, 4.19, 4.22 è disegnata nelle figure 4.2, 4.3. In particolare, in figura 4.2 è mostrato un confronto fra la funzione x_0 e la parte oscillatoria della soluzione 4.10. Si può notare che la funzione x_0 , sempre positiva, ha periodo $\frac{1}{\pi}$, mentre l'oscillazione elastica ha periodo $\frac{2}{\pi}$.

In figura 4.3, invece, la funzione x_0 è stata disegnata per diversi valori del rapporto $\frac{\alpha}{A\pi^2}$. Fissato il valore dell'ampiezza A delle oscillazioni, al diminuire di α – ossia all'aumentare del grado di nonlinearity del problema – la funzione x_0 tende puntualmente a zero per tutti i valori di t interni all'intervallo 4.19. Questo comportamento indica che solo piccole porzioni vicine agli appoggi rimangono non fessurate e che tale condizione di diffusa parzializzazione permane nel tempo per buona parte del periodo dell'oscillazione.

Integrazione sul semiperiodo elastico delle oscillazioni

Per semplicità, si integra la Lagrangiana 4.12 sul semiperiodo elastico, anziché sull'intero periodo dell'oscillazione. Precisamente, si sceglie di inte-

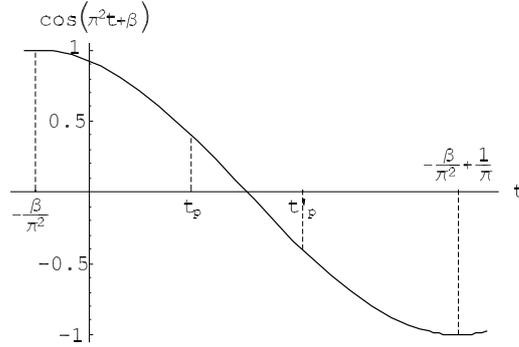


Figura 4.4. Integrazione sul semiperiodo elastico.

grare sull'intervallo temporale $[-\frac{\beta}{\pi^2}, \frac{1}{\pi} - \frac{\beta}{\pi^2}]$ mostrato in figura 4.4, essendo t_p e t'_p dati dalle 4.20, 4.21 con $n = 0$.

Osserviamo che, analogamente alla funzione x_0 , tutte le funzioni in 4.12, tranne la funzione $\sin(\pi^2 t + \beta) \cos(\pi^2 t + \beta)$ che si annulla nell'integrazione sul semiperiodo elastico ed il termine $(-\frac{3}{2} \alpha^2)$ che è positivo ed indipendente dal tempo, sono positive e periodiche di periodo $\frac{1}{\pi}$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\beta}{\pi^2}}^{\frac{1}{\pi} - \frac{\beta}{\pi^2}} \bar{\mathcal{L}}(t) dt &= \int_{-\frac{\beta}{\pi^2}}^{t_p} \bar{\mathcal{L}}(t) dt + \int_{t_p}^{t'_p} \bar{\mathcal{L}}(t)_{el} dt + \int_{t'_p}^{\frac{1}{\pi} - \frac{\beta}{\pi^2}} \bar{\mathcal{L}}(t) dt = \\ &= 2 \int_{-\frac{\beta}{\pi^2}}^{t_p} \bar{\mathcal{L}}(t) dt + \int_{t_p}^{t'_p} \bar{\mathcal{L}}(t)_{el} dt. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Tenuto conto di 4.17, nell'intervallo $[-\frac{\beta}{\pi^2}, t_p]$ in cui è $\cos(\pi^2 t + \beta) > 0$, l'espressione 4.12 diventa

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(t) &\simeq \frac{1}{4} \left[A^2 \pi^2 \sin^2(\pi^2 t + \beta) (\pi^2 + 2\dot{\beta}) - 2A\dot{A}\pi^2 \sin(\pi^2 t + \beta) \cos(\pi^2 t + \beta) \right] + \\ &\quad - \frac{A^2 \pi^4}{2} \cos^2(\pi^2 t + \beta) x_0 - \frac{11\alpha}{2\pi} \sqrt{A^2 \pi^4 \cos^2(\pi^2 t + \beta) - \alpha^2} + \\ &\quad + \frac{16}{\pi} \sqrt{\alpha^3 A \pi^2 \cos(\pi^2 t + \beta)} E\left(\frac{\pi}{4} (1 - 2x_0), 2\right) + \\ &\quad + 3\alpha^2 x_0 - \frac{3}{2} \alpha^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pertanto, utilizzando le 4.14, 4.24, e considerando costanti durante l'integrazione i parametri A e β , in virtù dell'ipotesi di piccolezza delle loro

derivate \dot{A} e $\dot{\beta}$, è possibile scrivere la seguente espressione della Lagrangiana media del sistema

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) &= \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\beta}{\pi^2}}^{\frac{1}{\pi} - \frac{\beta}{\pi^2}} [A^2 \pi^2 \sin^2(\pi^2 t + \beta)(\pi^2 + 2\dot{\beta}) + \\
 &- 2A\dot{A}\pi^2 \sin(\pi^2 t + \beta) \cos(\pi^2 t + \beta)] dt + \\
 &- \frac{A^2 \pi^4}{4} \int_{t_p}^{t'_p} \cos^2(\pi^2 t + \beta) dt + \\
 &- A^2 \pi^4 \int_{\frac{\beta}{\pi^2}}^{t_p} \cos^2(\pi^2 t + \beta) x_0 dt + \\
 &- \frac{11\alpha}{\pi} \int_{\frac{\beta}{\pi^2}}^{t_p} \sqrt{A^2 \pi^4 \cos^2(\pi^2 t + \beta) - \alpha^2} dt + \\
 &+ \frac{32}{\pi} \int_{\frac{\beta}{\pi^2}}^{t_p} \sqrt{\alpha^3 A \pi^2 \cos(\pi^2 t + \beta)} E\left(\frac{\pi}{4}(1 - 2x_0), 2\right) dt + \\
 &+ \int_{\frac{\beta}{\pi^2}}^{t_p} (6\alpha^2 x_0 - 3\alpha^2) dt.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Calcolando, quando è possibile, gli integrali esplicitamente, ricordando l'espressione 4.21 per la funzione t_p e tenendo conto dell'ipotesi di costanza sull'intervallo di integrazione dello sfasamento β e dell'ampiezza A , si ottiene

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) &= \\
 &= \frac{A^2 \pi^3}{8} + \frac{A^2 \pi}{4} \dot{\beta} - \frac{A^2 \pi^2}{4} \arcsin\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right) + \\
 &+ \frac{\alpha}{4\pi^2} \sqrt{\pi^4 A^2 - \alpha^2} + \\
 &- A^2 \pi^4 \int_0^{\frac{1}{\pi^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right)} \cos^2(\pi^2 t) x_0 dt + \\
 &- \frac{11\alpha}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\pi^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right)} \sqrt{A^2 \pi^4 \cos^2(\pi^2 t) - \alpha^2} dt + \\
 &+ 16 \int_0^{\frac{1}{\pi^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right)} \sqrt{\alpha^3 A \pi^2 \cos(\pi^2 t)} \left(\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sin \pi x} dx \right) dt + \\
 &+ 6\alpha^2 \int_0^{\frac{1}{\pi^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right)} x_0 dt - \frac{3\alpha^2}{\pi^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right),
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

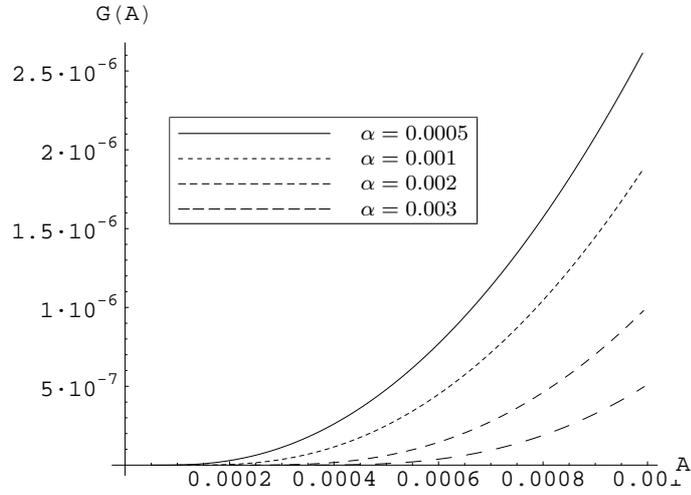


Figura 4.5. La funzione $G(A)$ al variare di α .

dove si è utilizzata la relazione

$$\frac{2}{\pi} E\left(\frac{\pi}{4}(1-2x_0), 2\right) = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sin \pi x} dx \quad (4.27)$$

e si è posto

$$x_0 = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{\alpha}{A\pi^2 \cos(\pi^2 t)}\right). \quad (4.28)$$

Convienne scrivere la 4.26 nella forma

$$\bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) = G(A) + \frac{A^2 \pi}{4} \dot{\beta}. \quad (4.29)$$

Il caso elastico può essere recuperato nella 4.29 ponendo

$$A = \frac{\alpha}{\pi^2} = A_{el}, \quad (4.30)$$

dove A_{el} rappresenta il valore massimo dell'ampiezza delle oscillazioni per cui la trave rimane interamente in campo elastico. Si noti che è

$$\lim_{A^+ \rightarrow A_{el}} G(A) = 0 \quad \lim_{A^+ \rightarrow A_{el}} \bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}_{el} = \frac{A_{el}^2 \pi}{4} \dot{\beta}. \quad (4.31)$$

In figura 4.5 è riportata la funzione $G(A)$ per diversi valori della curvatura limite elastica α . Si noti che ciascuna curva è definita solo per $A \geq A_{el}$, e

ha tangente orizzontale per $A = A_{el}$. All'aumentare di α , ossia al diminuire del grado di nonlinearità del problema, le curve $G(A)$ tendono puntualmente all'asse delle ascisse.

Un'ultima, importante considerazione sulla Lagrangiana media $\bar{\mathcal{L}}$ riguarda gli ordini di grandezza dei termini che la costituiscono. Infatti, tenuto conto della piccolezza della curvatura limite elastica α , è facile dimostrare che, per $A \gg \alpha$, la Lagrangiana 4.26 può essere approssimata impiegando i soli termini proporzionali ad A^2 ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} \simeq & \frac{A^2\pi^3}{8} + \frac{A^2\pi}{4}\dot{\beta} - \frac{A^2\pi^2}{4} \arcsin\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right) + \\ & - A^2\pi^4 \int_0^{\frac{1}{\pi^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right)} \cos^2(\pi^2 t) x_0 dt. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Al contrario, per $A \rightarrow \frac{\alpha}{\pi^2}$, ossia nelle vicinanze della soluzione elastica, tutti i termini 4.26 diventano proporzionali ad α^2 , pesando, di conseguenza, allo stesso modo nella descrizione della Lagrangiana.

In effetti, i calcoli si sono rivelati estremamente sensibili a piccoli valori delle ampiezze di oscillazione, al punto che trascurare o approssimare uno qualunque dei termini della 4.26 può portare ad errori notevoli nella valutazione dei parametri.

Per questo motivo si è scelto di non ricercare espressioni approssimate della 4.26, ma di risolvere per via numerica gli integrali non calcolabili in forma chiusa.

Le equazioni di modulazione

Le equazioni di Eulero–Lagrange, applicate alla Lagrangiana $\bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta})$, si scrivono

$$\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{A}}\right)' - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial A} = 0 \quad (4.33a)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\beta}}\right)' - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \beta} = 0. \quad (4.33b)$$

Sostituendo nelle 4.33 l'espressione 4.29 della Lagrangiana media, si ottengono le equazioni di modulazione del problema

$$\dot{\beta} = -\frac{2}{A\pi} \frac{dG}{dA} \quad (4.34)$$

$$A\dot{A} = 0. \quad (4.35)$$

Capitolo 4

Dalla 4.35, essendo $A \neq 0$, si deduce

$$\dot{A} = 0 \qquad A = A_0, \qquad (4.36)$$

con A_0 l'ampiezza massima della deformata iniziale. Il risultato descritto dalla 4.36 è congruente con le ipotesi di unimodalità della soluzione e di assenza di smorzamento.

Sempre in virtù della costanza di A , espressa dalla 4.36, si deduce da 4.34

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}(A) = \text{cost.} \qquad \beta = \dot{\beta}t + \beta_0. \qquad (4.37)$$

Per il calcolo di $\dot{\beta}$ è necessario derivare la funzione $G(A)$. A tale scopo, è necessario utilizzare la regola di derivazione di un integrale dipendente da un parametro,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dA} \left(\int_{I(A)}^{M(A)} H(A, t) dt \right) &= \\ &= \int_{I(A)}^{M(A)} \frac{\partial}{\partial A} H(A, t) dt + H[A, M(A)]M'(A) - H[A, I(A)]I'(A). \end{aligned} \qquad (4.38)$$

Utilizzando la 4.38 e le 4.17, 4.28 che definiscono la funzione $x_0(A, t)$, è possibile ottenere, dopo alcuni passaggi, l'espressione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dA} G(A) &= \\ &= \frac{A\pi^3}{4} - \frac{A\pi^2}{2} \arcsin\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right) + \frac{A\pi^2}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{A^2\pi^4 - \alpha^2}} + \\ &- 2A\pi^4 \int_0^{\frac{1}{\pi^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right)} \cos^2(\pi^2 t) x_0 dt - \frac{\alpha^3}{2A\pi^2} \frac{1}{\sqrt{A^2\pi^4 - \alpha^2}} + \\ &- 10\pi^3 \alpha A \int_0^{\frac{1}{\pi^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right)} \frac{\cos^2(\pi^2 t)}{\sqrt{A^2\pi^4 \cos^2(\pi^2 t) - \alpha^2}} dt + \\ &+ 8\pi\alpha^2 \int_0^{\frac{1}{\pi^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right)} \sqrt{\frac{\cos(\pi^2 t)}{\alpha A}} \left(\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sin \pi x} dx \right) dt + \\ &+ \frac{10\alpha^3}{A\pi} \int_0^{\frac{1}{\pi^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\pi^2}\right)} \frac{1}{\sqrt{A^2\pi^4 \cos^2(\pi^2 t) - \alpha^2}} dt. \end{aligned} \qquad (4.39)$$

Si noti che in corrispondenza del caso elastico si ha, come, peraltro, è possibile dedurre anche dalla figura 4.5

$$\lim_{A^+ \rightarrow \frac{\alpha}{\pi^2}} \frac{dG}{dA} = 0. \qquad (4.40)$$

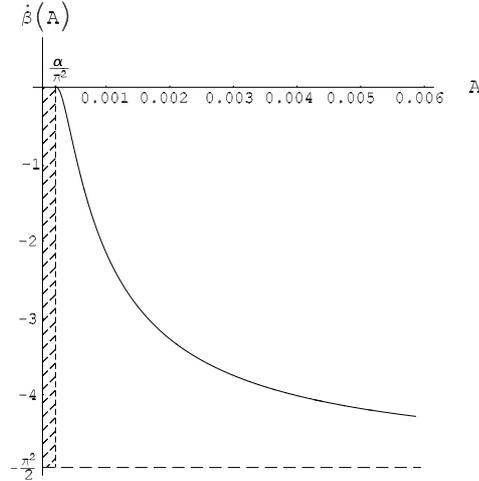


Figura 4.6. La curva $\dot{\beta}(A)$ disegnata per $\alpha = 0.002$.

Sostituendo 4.39 in 4.34 si ottiene un'equazione trascendente che, risolta numericamente per differenti valori dell'ampiezza A delle oscillazioni, fornisce la funzione $\dot{\beta}(A)$.

Per $A^+ \rightarrow \frac{\alpha}{\pi^2}$ dalla 4.34 si deduce

$$\dot{\beta} = 0 \qquad \beta = \beta_0 \qquad (4.41)$$

che, sostituita nella 4.10, fornisce l'espressione della soluzione elastica

$$v(x, t) \simeq A_0 \sin(\pi x) \cos(\pi^2 t + \beta_0), \qquad (4.42)$$

dove la frequenza dell'oscillazione coincide con quella del primo modo di vibrare elastico e A_0 e β_0 sono costanti da determinare in base alle condizioni iniziali.

Per $A > \frac{\alpha}{\pi^2}$, ossia in presenza di fessurazioni, la 4.10 diventa

$$v(x, t) \simeq A_0 \sin(\pi x) \cos \left[\left(\pi^2 + \dot{\beta}(A_0) \right) t + \beta_0 \right]. \qquad (4.43)$$

La funzione $\dot{\beta}$ rappresenta, pertanto, la variazione della frequenza di oscillazione, rispetto a quella elastica, con l'ampiezza dell'oscillazione.

Si noti che dalla figura 4.5 si deduce $\frac{dG}{dA} \geq 0$. Pertanto, dalla 4.34 si ricava che la funzione $\dot{\beta}$ non è mai positiva: la frequenza di oscillazione della trave tende a diminuire con l'ampiezza, mostrando un evidente comportamento di tipo "softning".

In figura 4.6 è mostrata la curva $\dot{\beta}(A)$ per $\alpha = 0.002$; l'area tratteggiata rappresenta la regione delle ampiezze per cui $\dot{\beta}$ non è definita ed è valida

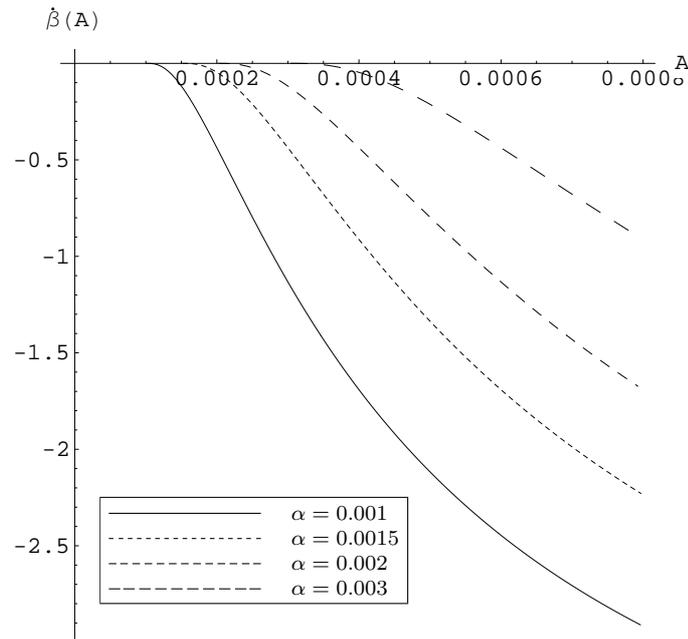


Figura 4.7. Le curve $\dot{\beta}(A)$ al variare della curvatura limite elastica α .

la trattazione elastica lineare. La curva $\dot{\beta}$ parte da zero con tangente orizzontale – come meglio evidenziato in figura 4.7 – per $A = A_{el}$, decrescendo rapidamente e tendendo all’asintoto orizzontale $\dot{\beta} = -\frac{\pi^2}{2}$. Infatti, si ha

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{dG}{dA} = \frac{A\pi^3}{4}, \quad (4.44)$$

che, inserita nella 4.34 fornisce, per ogni valore di α

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \dot{\beta}(A) = -\frac{\pi^2}{2}. \quad (4.45)$$

Dalla 4.45 si deduce che la frequenza della trave tende a dimezzarsi all’aumentare dell’ampiezza delle oscillazioni.

Quest’ultimo risultato, evidentemente, non è realistico. Infatti, aumentando il grado di nonlinearità del problema, ci si aspetta che rigidità e frequenza di oscillazione della trave tendano ad annullarsi¹. D’altra parte, la trattazione presentata, essendo vincolata all’ipotesi di piccolezza della funzione β , non può fornire informazioni per grandi valori di A .

In figura 4.7 sono riportati i valori che assume la funzione $\dot{\beta}(A)$ per piccole ampiezze e diversi valori della curvatura limite elastica α . All’aumentare di α , le curve $\dot{\beta}$ tendono all’asse delle ascisse in maniera via via più

¹Si può pensare che il comportamento dinamico della trave in regime di grandi deformazioni tende a quello di un meccanismo a tre cerniere

graduale. Tuttavia, come evidenziato dalla figura, tale tendenza si presenta piuttosto significativa anche per valori elevati di α , confinando la validità della trattazione ad un intorno molto piccolo dell'ampiezza limite elastica.

Nel paragrafo seguente si propone una correzione della trattazione, ottenuta mediante l'inserimento nell'espressione della Lagrangiana dei termini quadratici in $\dot{\beta}^2$, finora trascurati.

Correzione della trattazione con i termini in $\dot{\beta}^2$

Aggiungendo all'espressione 4.11 della Lagrangiana mediata sulla luce della trave il termine in $\dot{\beta}^2$ e procedendo in maniera del tutto analoga al caso precedente, l'espressione 4.29 assume la forma corretta

$$\bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) = G(A) + \frac{A^2\pi}{4}\dot{\beta} + \frac{A^2}{8\pi}\dot{\beta}^2. \quad (4.46)$$

Applicando le equazioni di Eulero–Lagrange 4.33 alla 4.46 si ottengono le nuove equazioni di modulazione del problema

$$\frac{dG}{dA} + \frac{A\pi}{2}\dot{\beta} + \frac{A}{4\pi}\dot{\beta}^2 = 0, \quad (4.47)$$

$$\frac{\pi}{2}A\dot{A} + \frac{A}{2\pi}\dot{A}\dot{\beta} + \frac{A^2}{4\pi}\ddot{\beta} = 0. \quad (4.48)$$

Le 4.47, 4.48 appaiono notevolmente più complicate delle corrispondenti 4.34, 4.35. Tuttavia, ricordando le ipotesi di unimodalità della soluzione e di assenza di smorzamento, è ammissibile imporre la condizione

$$\dot{A} = 0 \quad A = \text{costante}. \quad (4.49)$$

che, inserita nelle 4.47, 4.48, fornisce

$$\frac{dG}{dA} + \frac{A\pi}{2}\dot{\beta} + \frac{A}{4\pi}\dot{\beta}^2 = 0 \quad (4.50)$$

$$\ddot{\beta} = 0. \quad (4.51)$$

Dalla 4.51 si ottiene, come nel caso precedente,

$$\dot{\beta} = \text{costante} \quad \beta = \dot{\beta}t + \beta_0. \quad (4.52)$$

A questo punto è possibile risolvere la 4.50 rispetto a $\dot{\beta}$ come un'equazione algebrica di secondo grado, ottenendo

$$\dot{\beta}(A) = \frac{-\frac{A\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2\pi^2}{4} - \frac{A}{\pi} \frac{dG}{dA}}}{\frac{A}{2\pi}} = -\pi^2 + \sqrt{\pi^4 - \frac{4\pi}{A} \frac{dG}{dA}}. \quad (4.53)$$

Capitolo 4

La scelta del segno positivo nella 4.53 è obbligata, perchè altrimenti otterremmo una frequenza di oscillazione negativa che non è accettabile.

Si noti che, ricordando le 4.40, 4.44, si ottiene dalla 4.53

$$\lim_{A^+ \rightarrow A_{el}} \dot{\beta}(A) = -\pi^2 + \sqrt{\pi^4} = 0 \quad (4.54)$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \dot{\beta}(A) = -\pi^2 + \sqrt{\pi^4 - \frac{4\pi}{A} \frac{A\pi^3}{4}} = -\pi^2. \quad (4.55)$$

La 4.54 esprime, ancora una volta, l'annullamento della funzione $\dot{\beta}$ in corrispondenza della soluzione elastica e conferma un corretto raccordo fra caso elastico e caso nonlineare.

La 4.55, invece, esprime la tendenza all'annullamento della frequenza della trave per grandi valori delle ampiezza di oscillazione; pertanto, il contributo del termine in $\dot{\beta}^2$ conduce ad un comportamento corretto di $\dot{\beta}$ quando A tende all'infinito.

Questa occorrenza, tuttavia, non deve indurre a considerare validi i risultati ottenuti con questo procedimento anche per grandi deformazioni. La trattazione, infatti, è vincolata all'ipotesi 4.49 di unimodalità e stazionarietà della soluzione, che tende a venire meno all'aumentare del grado di nonlinearità del problema²; inoltre, aumentando l'ampiezza delle oscillazioni, non è più lecito trascurare, come fatto finora, il contributo delle nonlinearità geometriche al comportamento dinamico della trave.

Nelle figure 4.8, 4.9 sono messe a confronto le soluzioni 4.34 e 4.53 per diversi valori di α . Si può notare in figura 4.8 come, anche per piccoli valori dell'ampiezza di oscillazione, la correzione apportata mediante i termini in $\dot{\beta}^2$ assume un peso rilevante, soprattutto al diminuire di α – ossia all'aumentare del grado di nonlinearity –. La figura 4.9, invece, evidenzia la forte differenza di comportamento fra le due trattazioni per grandi valori di A .

4.1.2 Oscillazioni libere smorzate

Nel seguito si generalizza la trattazione presentata nel paragrafo 4.1.1, rimuovendo l'ipotesi di assenza di smorzamento.

Come già visto nel capitolo 3, si tiene conto degli elementi dissipativi presenti nel sistema introducendo uno smorzamento viscoso equivalente di coefficiente C , espresso per unità di lunghezza ed adimensionalizzato secondo le 3.8.

²Per grandi valori delle ampiezze di oscillazione ci si deve aspettare una distorsione della deformata della trave e la comparsa nella soluzione di componenti superarmoniche di peso via via più rilevante. Si veda in proposito quanto ottenuto nel capitolo 3 nel caso dell'equazione cubica.

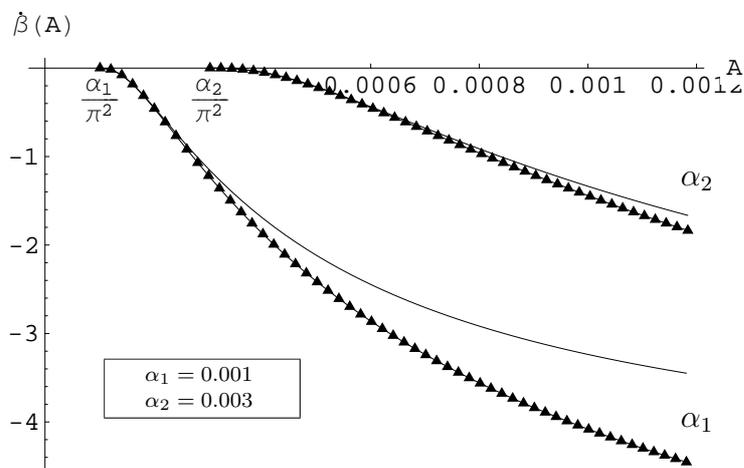


Figura 4.8. Andamento di $\dot{\beta}(A)$ in funzione di α per piccoli valori di A . Le linee continue rappresentano la soluzione 4.34, quelle punteggiate la soluzione 4.53 corretta con i termini in $\dot{\beta}^2$.

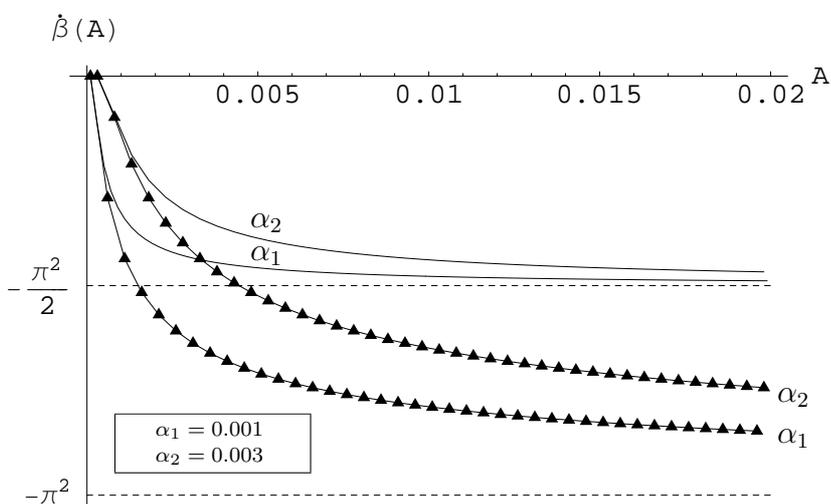


Figura 4.9. Andamento di $\dot{\beta}(A)$ in funzione di α per grandi valori di A . Le linee continue rappresentano la soluzione 4.34, quelle punteggiate la soluzione 4.53 corretta con i termini in $\dot{\beta}^2$.

Capitolo 4

In questo caso, le equazioni di Eulero–Lagrange si scrivono

$$\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{A}}\right)' - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial A} = \bar{Q}_A \quad (4.56a)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\beta}}\right)' - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \beta} = \bar{Q}_\beta, \quad (4.56b)$$

essendo \bar{L} ancora fornita dalla 4.29 e \bar{Q}_A, \bar{Q}_β calcolati con procedura del tutto analoga a quella descritta nel paragrafo 3.5.1 e dati dalle espressioni

$$\bar{Q}_A = 0 \quad (4.57)$$

$$\bar{Q}_\beta = -\mu\pi A^2. \quad (4.58)$$

Introducendo le 4.29, 4.57, 4.58 nelle 4.56 si ottiene

$$\dot{\beta} = -\frac{2}{A\pi} \frac{dG}{dA}, \quad (4.59)$$

$$\dot{A} = -2\mu A. \quad (4.60)$$

Dalla 4.60, ricordando la 3.98, si ricava

$$A(t) = A_0 e^{-2\mu t} = A_0 e^{-\zeta\pi^2 t}, \quad (4.61)$$

che, sostituita nella 4.60, fornisce

$$\dot{\beta} = N(t, A_0, \alpha, \zeta), \quad (4.62)$$

dove $N(t, A_0, \alpha, \zeta)$ rappresenta una funzione del tempo, dell'ampiezza iniziale delle oscillazioni A_0 , della curvatura limite elastica α e del coefficiente di smorzamento viscoso ζ .

La soluzione della 4.62 è

$$\beta(t, A_0, \alpha, \zeta) = \int_0^t N(t, A_0, \alpha, \zeta) dt + \beta_0, \quad (4.63)$$

con β_0 deducibile dalle condizioni iniziali.

Fissati i valori dei parametri A_0, α, ζ , la 4.63 può essere risolta numericamente, fornendo la variazione nel tempo dello sfasamento β .

In figura 4.10 è mostrato l'andamento della funzione $\dot{\beta}$ col tempo per diversi valori del coefficiente di smorzamento viscoso. Per $\zeta = 0$ la funzione degenera in una retta orizzontale, tratteggiata in figura. Si noti che la funzione è definita solo nell'intervallo temporale $[0, t_{el}]$, dove

$$t_{el} = -\frac{1}{2\mu} \log \frac{A_{el}}{A_0}. \quad (4.64)$$

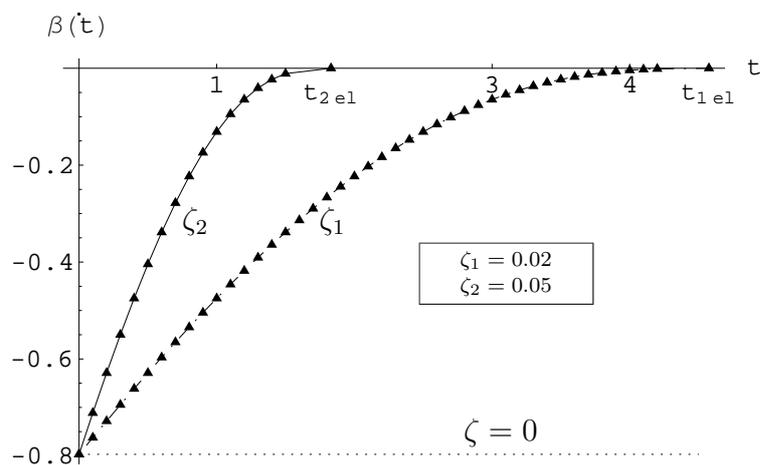


Figura 4.10. Andamento delle funzioni $\dot{\beta}(t)$ al variare di ζ , disegnate per $\alpha = 0.002$ ed $A = 0.0005$.

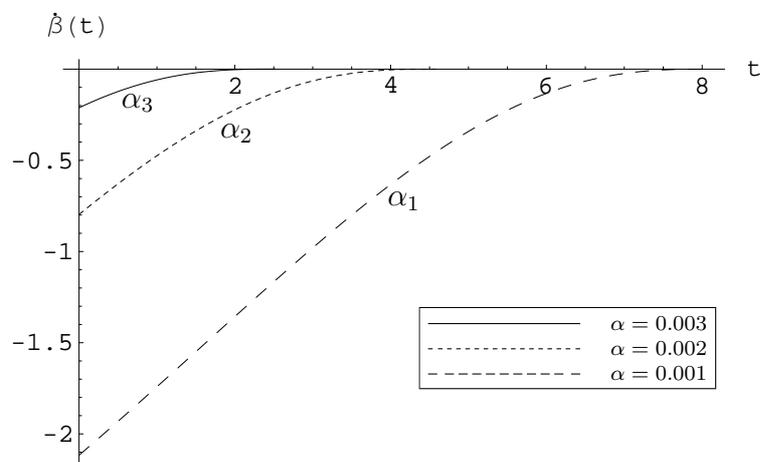


Figura 4.11. Andamento delle funzioni $\dot{\beta}(t)$ al variare di α , disegnate per $\zeta = 0.02$ ed $A = 0.0005$.

Capitolo 4

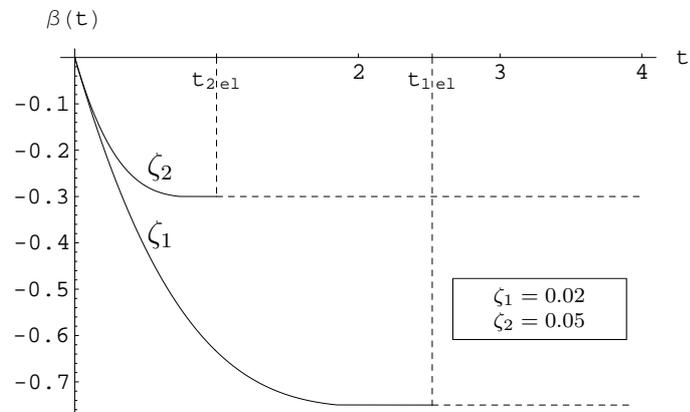


Figura 4.12(a). La funzione $\beta(t)$ al variare di ζ per $\alpha = 0.003$, $A_0 = 0.0005$ e $\beta_0 = 0$.

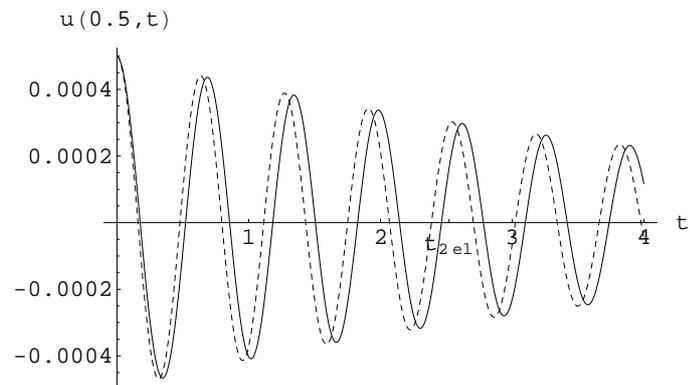


Figura 4.12(b). Spostamento trasversale della mezzeria per $\zeta = 0.02$, $\alpha = 0.003$, $A_0 = 0.0005$ e $\beta_0 = 0$. La linea continua rappresenta la soluzione 4.67, la linea tratteggiata quella elastica lineare.

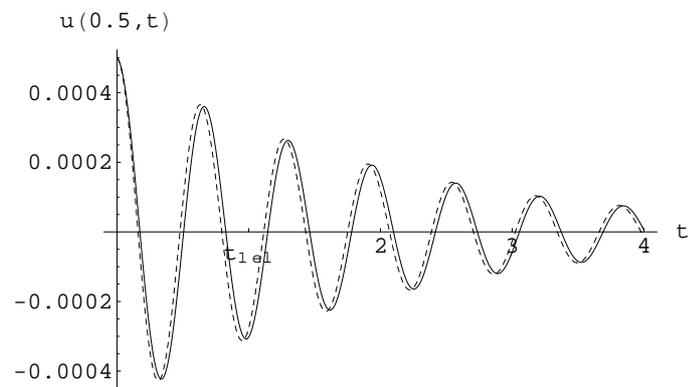


Figura 4.12(c). Spostamento trasversale della mezzeria per $\zeta = 0.05$, $\alpha = 0.003$, $A_0 = 0.0005$ e $\beta_0 = 0$. La linea continua rappresenta la soluzione 4.67, la linea tratteggiata quella elastica lineare.

La 4.64 rappresenta l'istante in cui l'ampiezza massima delle oscillazioni, decrescente nel tempo con la legge esponenziale 4.61, diventa uguale all'ampiezza limite elastica; pertanto, per $t \geq t_{el}$, la trave ritorna completamente in campo elastico.

La funzione $\dot{\beta}$ si raccorda con la soluzione elastica ($\dot{\beta} = 0$) esattamente per $t = t_{el}$; il raccordo, come mostrato dalle figure 4.10, 4.11, è di classe C^1 .

Per valori superiori di t , la funzione $\dot{\beta}$ non è definita, ma può essere estesa con continuità, ponendo

$$\dot{\beta} = 0 \quad \text{per } t > t_{el}. \quad (4.65)$$

La figura 4.12 mostra la funzione $\beta(t)$, disegnata per due valori differenti del coefficiente di smorzamento viscoso.

Ovviamente, anche la $\beta(t)$ risulta definita solo nell'intervallo $[0, t_{el}]$. Come è possibile vedere dalla figura, la funzione raggiunge t_{el} con tangente orizzontale, coerentemente col valore nullo assunto dalla sua derivata $\dot{\beta}(t_{el})$. Ciò consente di porre

$$\beta = \beta(t_{el}) \quad \text{per } t > t_{el}. \quad (4.66)$$

Introducendo le 4.61, 4.63, 4.66 nell'espressione 4.10 della soluzione approssimata, si ottiene

per $t \leq t_{el}$

$$v(x, t) = A_0 \sin(\pi x) e^{-\zeta \pi^2 t} \cos \left(\pi^2 t + \int_0^t N(t, A_0, \alpha, \zeta) dt + \beta_0 \right) \quad (4.67a)$$

per $t > t_{el}$

$$v(x, t) = A_0 \sin(\pi x) e^{-\zeta \pi^2 t} \cos \left(\pi^2 t + \beta(t_{el}, A_0, \alpha, \zeta) + \beta_0 \right) \quad (4.67b)$$

Dalle 4.67 si deduce che la frequenza dell'oscillazione nonlineare tende velocemente a quella elastica, coincidente con essa per $t \geq t_{el}$. Tuttavia, fra le due soluzioni – quella elastica lineare e quella data dalla 4.67 per $t \geq t_{el}$ – permane uno sfasamento costante $\beta(t_{el})$.

I risultati ottenuti in questo paragrafo sono concettualmente analoghi a quelli ottenuti nel paragrafo 3.3.2, per le oscillazioni smorzate di una trave caratterizzata da un'equazione costitutiva di tipo cubico.

4.1.3 Oscillazioni forzate in risonanza primaria

Si consideri la trave appoggiata di figura 4.1 soggetta alla forzante sinusoidale

$$p(x, t) = k \sin(\Omega t), \quad (4.68)$$

Capitolo 4

dove, con le notazioni 3.8, si è posto

$$k = \frac{k^*T^2}{\rho AL} \quad \Omega = \pi^2 + \lambda \quad (4.69)$$

e λ rappresenta un parametro di “detuning” che esprime la vicinanza della frequenza della forzante a quella del primo modo di vibrare della trave; si pone, inoltre, $\lambda = O(1)$.

Sotto queste ipotesi, come già fatto al capitolo 3, è possibile approssimare la soluzione del problema con l’espressione unimodale

$$v(x, t) = A(t) \sin(\pi x) \sin((\pi^2 + \lambda)t - \gamma(t)) = A(t) \sin(\pi x) \sin(\pi^2 + \beta(t)), \quad (4.70)$$

dove

$$\beta(t) = \lambda t - \gamma(t). \quad (4.71)$$

Si dimostra facilmente che, sostituendo la 4.70 nell’espressione 4.9 e traslando di $\frac{\pi}{2}$ l’intervallo di integrazione temporale impiegato nel paragrafo 4.1.1, si arriva ad una espressione della Lagrangiana media coincidente con la 4.26. La stessa osservazione vale anche per le componenti generalizzate (\bar{Q}_A, \bar{Q}_β) del vettore delle forze di smorzamento viscoso.

Pertanto, seguendo il procedimento già esposto nel capitolo 3, si corregge l’espressione 4.26 della Lagrangiana media del sistema introducendo il termine relativo alla forzante. Si ottiene così

$$\bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) = G(A) + \frac{A^2\pi}{4}\dot{\beta} + \frac{Ak}{\pi^2} \cos(\lambda t - \beta). \quad (4.72)$$

Applicando alla 4.72 le equazioni 4.56 di Eulero–Lagrange e ricordando la 4.71 si ottengono le equazioni di modulazione del sistema

$$\frac{dG}{dA} + \frac{A\pi}{2}(\lambda - \dot{\gamma}) + \frac{k}{\pi^2} \cos \gamma = 0 \quad (4.73)$$

$$\frac{\dot{A}\pi}{2} - \frac{k}{\pi^2} \sin \gamma = -\mu\pi A. \quad (4.74)$$

Le equazioni 4.73, 4.74 sono difficili da risolvere, anche per via numerica. E’ possibile, tuttavia, semplificare notevolmente il sistema, limitandosi a determinare la soluzione soltanto in fase stazionaria.

In questo caso, imponendo le condizioni 3.128 alle 4.73 e 4.74, si ottengono le seguenti equazioni di modulazione del sistema

$$\frac{dG}{dA} + \frac{A\pi}{2}\lambda = -\frac{k}{\pi^2} \cos \gamma \quad (4.75)$$

$$\mu\pi A = +\frac{k}{\pi^2} \sin \gamma, \quad (4.76)$$

che, naturalmente, sono valide solo in fase stazionaria.

Elevando al quadrato le 4.75 e 4.76 e sommandole membro a membro si ottiene

$$\left(\frac{dG}{dA} + \frac{A\pi}{2}\lambda\right)^2 = \frac{k^2}{\pi^4} \left(1 - \frac{\mu^2\pi^6 A^2}{k^2}\right) \quad (4.77)$$

che, noti i parametri α, μ, k , costituisce un legame fra la frequenza $(\pi^2 + \lambda)$ della forzante e l'ampiezza A delle oscillazioni.

Nelle figure 4.17, 4.18 è mostrato l'andamento della funzione F.R.F. $A(\lambda)$, rispettivamente per piccoli e grandi valori del parametro λ . L'andamento della funzione denota, come già visto per l'equazione cubica, un marcato comportamento di tipo "softening".

In figura 4.18 è riportato con una retta orizzontale il valore dell'ampiezza limite elastica. Tale retta interseca fuori dalla figura le "code" della funzione F.R.F.: esistono dei valori della frequenza della forzante per cui la trave rimane interamente in campo elastico³.

Anche in questo caso, come per la cubica, si riscontra la compresenza di più soluzioni in corrispondenza dello stesso valore di λ . Come mostrato dalla figura 4.18, non è stato possibile ricavare per via numerica il tratto instabile della F.R.F.

Una volta ricavato il valore di A dalla 4.77, si ottiene dalla 4.76

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\mu A \pi^3}{k}\right) + 2n\pi, \quad \gamma = \pi - \arcsin\left(\frac{\mu A \pi^3}{k}\right) + 2n\pi, \quad (4.78)$$

che rappresentano i possibili valori lo sfasamento γ della risposta stazionaria rispetto alla forzante.

Il caso elastico può essere dedotto dalla 4.77 ponendo $\frac{dG}{dA} = 0$, come previsto dalla 4.40. In questo caso, la 4.77 fornisce

$$A = \frac{k}{\pi^3} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \mu^2}}. \quad (4.79)$$

Frequenza della forzante sulla risonanza elastica: $\lambda = 0$

In questo paragrafo si vuole approfondire lo studio delle 4.77, 4.78 nel caso in cui la frequenza della forzante coincida perfettamente con quella del primo modo di vibrare elastico.

³Questa osservazione convalida la considerazione intuitiva secondo cui tali strutture sono sostanzialmente insensibili a valori troppo elevati o troppo bassi delle frequenze eccitatrici.

Capitolo 4

Questa situazione è quella in cui la teoria esposta ai paragrafi precedenti fornisce i risultati migliori: infatti, risultano rigorosamente rispettate le ipotesi di piccolezza di λ ed, in virtù della stazionarietà della soluzione, delle derivate $\dot{A}, \dot{\beta}$. Inoltre, questo caso permette di evidenziare alcune delle differenze più eclatanti riscontrabili fra comportamento lineare e nonlineare.

Posto $\lambda = 0$ nella 4.77 si ottiene

$$\left(\frac{dG}{dA}\right)^2 = \frac{k^2}{\pi^4} \left(1 - \frac{\mu^2 \pi^6 A^2}{k^2}\right) \quad (4.80)$$

La soluzione della 4.80 porta alla determinazione dell'ampiezza di oscillazione $A(\alpha, k, \mu)$; essa, noti i parametri α, k, μ e avendo posto per ipotesi $A > 0$, risulta univocamente determinata.

Nel caso elastico, posto $\lambda = 0$ all'interno della 4.79, si ottiene:

$$A = \frac{k}{\pi^3 \mu}. \quad (4.81)$$

Dalla 4.81 è possibile ricavare il valore dell'intensità k_{el} della forzante che determina il raggiungimento lungo la trave dell'ampiezza limite elastica A_{el} . Ricordando la 4.30, dalla 4.81 si ottiene

$$k_{el} = \alpha \mu \pi = \zeta \alpha \frac{\pi^3}{2}. \quad (4.82)$$

Per $k \leq k_{el}$, la trave rimane interamente in campo elastico e l'ampiezza delle oscillazioni può essere ricavata dall'espressione 4.81. Per $k > k_{el}$, invece, la trave entra in campo nonlineare e le sue oscillazioni hanno ampiezza determinabile dalla 4.80.

Nelle figure 4.13, 4.14 è riportato l'andamento della funzione $A(k)$, al variare dei parametri α e μ (oppure ζ). E' possibile notare come i raccordi della soluzione nonlineare col caso elastico siano di classe C^1 . In entrambe le figure, aumentando i valori di k , si osserva un forte abbattimento dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto alla soluzione lineare.

In particolare, dalla figura 4.13 si deduce che, aumentando il valore della curvatura limite elastica α – ossia, fissate le dimensioni della sezione, aumentando lo sforzo normale N –, il comportamento della trave tende ad avvicinarsi a quello elastico.

Il valore dello sfasamento della risposta nonlineare rispetto alla forzante, ricordando la 4.71 e posto $\lambda = 0$, può essere dedotto dalla 4.78 come segue

$$\beta = -\arcsin\left(\frac{\mu A \pi^3}{k}\right) + 2n\pi, \quad \beta = -\pi + \arcsin\left(\frac{\mu A \pi^3}{k}\right) + 2n\pi. \quad (4.83)$$

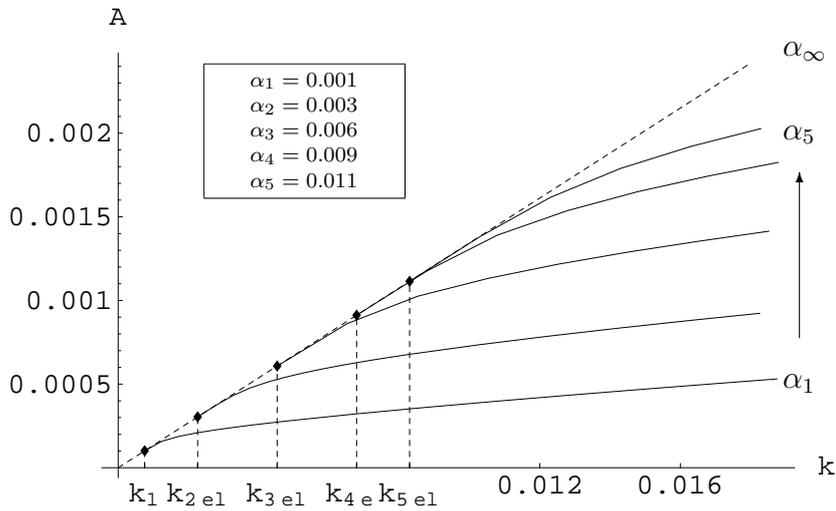


Figura 4.13. L'andamento dell'ampiezza dell'oscillazione con l'intensità della forzante per $\zeta = 0.05$, $\lambda = 0$ e per diversi valori di α . La retta rappresenta il caso elastico.

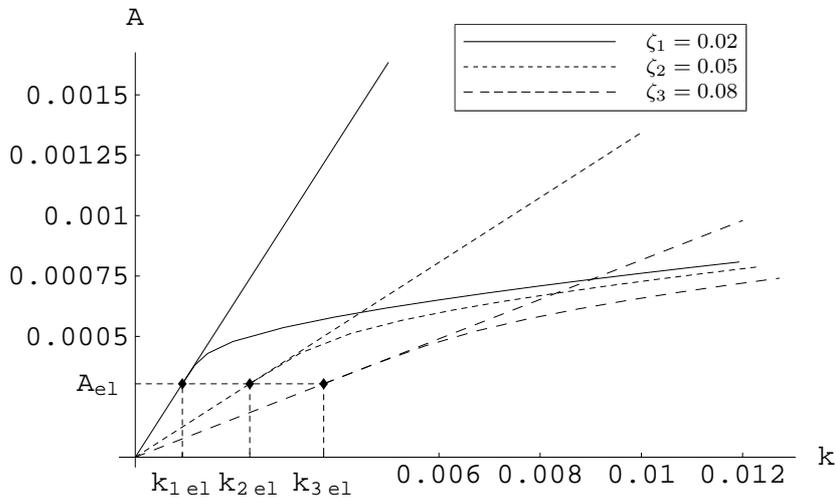


Figura 4.14. L'andamento dell'ampiezza dell'oscillazione con l'intensità della forzante per $\alpha = 0.003$, $\lambda = 0$ e per diversi valori di ζ . Le linee rette rappresentano il caso elastico.

Capitolo 4

Inserendo nella 4.83 le espressioni 4.30, 4.82 di A_{el} e k_{el} , si ottiene

$$\beta_{el} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \forall \mu, \quad (4.84)$$

che descrive il noto risultato della teoria elastica, secondo cui la risposta stazionaria di un oscillatore risulta sfasata di $-\frac{\pi}{2}$ rispetto alla forzante, per qualunque valore del coefficiente di smorzamento viscoso.

Nelle figure 4.15, 4.16, sono riportate le due soluzioni semplici (per $n = 0$) delle 4.83 in funzione di k . In particolare, in figura 4.16 sono disegnate le funzioni $\beta(k)$ al variare di α .

Anche in questo caso, il raccordo con la soluzione elastica (valida per $k \leq k_{el}$) è di classe C^1 .

La nascita per $k > k_{el}$ di più soluzioni rappresenta un fenomeno tipicamente nonlineare. Le condizioni iniziali detteranno lo spostamento della soluzione su uno o sull'altro ramo delle curve $\beta(k)$.

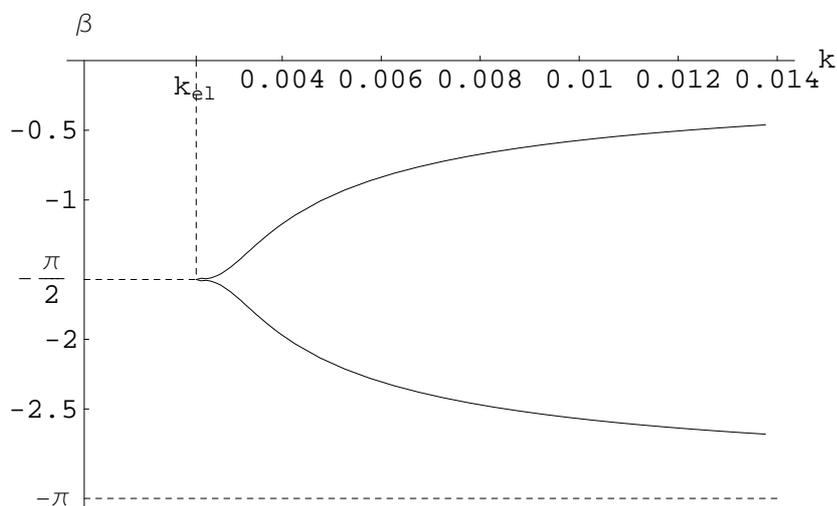


Figura 4.15. L'andamento dello sfasamento β con l'intensità k della forzante. Il grafico è disegnato per $\alpha = 0.003$ e $\zeta = 0.05$ e $\lambda = 0$.

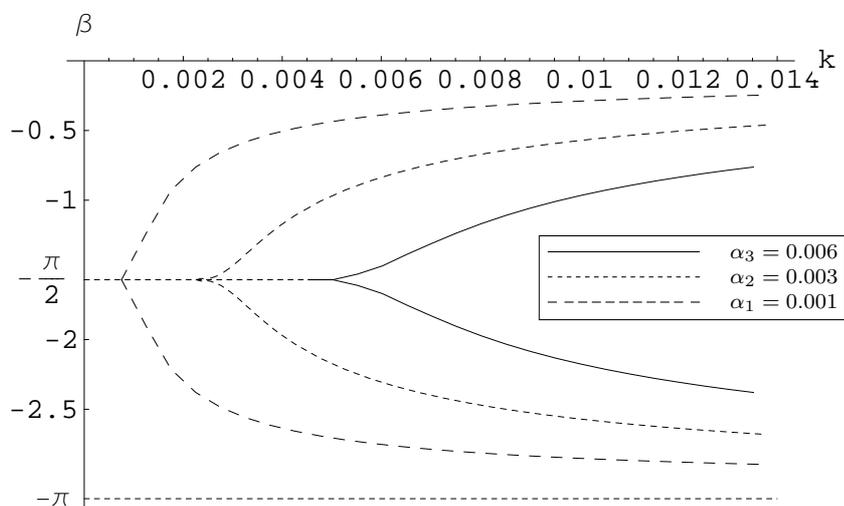


Figura 4.16. L'andamento dello sfasamento β con l'intensità k della forzante per diversi valori di α . Il grafico è disegnato per $\zeta = 0.05$ e $\lambda = 0$.

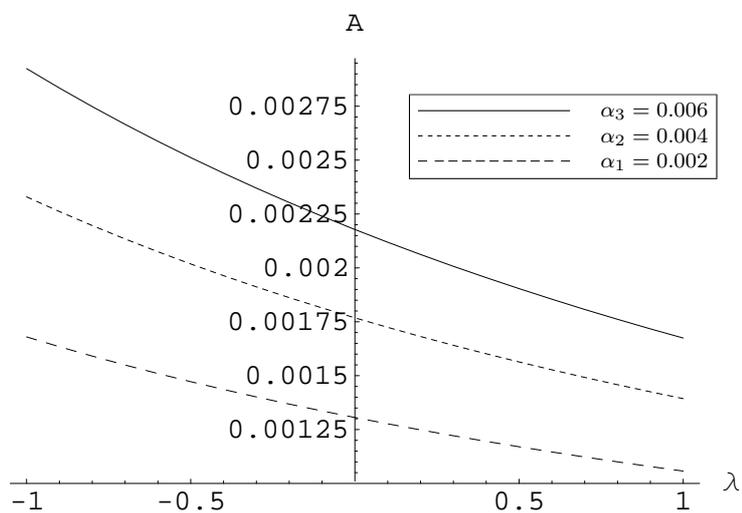


Figura 4.17. L'andamento della funzione F.R.F. al variare di α per piccoli valori di λ . Il grafico è disegnato per $\zeta = 0.05$, $k = 0.05$.

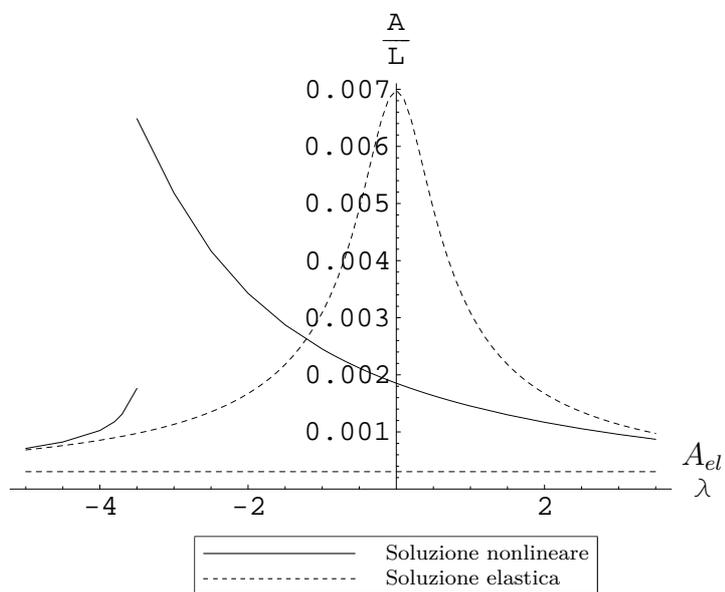


Figura 4.18. L'andamento della funzione F.R.F. per grandi valori di λ . Il grafico è disegnato per $\zeta = 0.05$, $\alpha = 0.004$, $k = 0.05$.

4.2 La mensola

4.2.1 Oscillazioni libere non smorzate

Ci si propone lo studio delle oscillazioni libere non smorzate – $C^* = 0, p^* = 0$ – di una mensola soggetta ad una deformata iniziale del tipo

$$v^*(x^*, 0) = A_0^* \phi_1^*(x^*), \quad \text{con } A_0^* > 0, \quad (4.85)$$

dove la funzione $\phi_1^*(x^*)$, coincidente col primo modo di vibrare elastico, è definita dalla 3.136.

Come già affermato più volte nei capitoli precedenti ed in questo capitolo per la trave appoggiata, tale problema ammette con ottima approssimazione una soluzione unimodale del tipo descritto dalla 4.4.

La geometria della trave è illustrata in figura 4.19.

Integrazione sulla luce della trave

Detta $x_0^*(t^*)$ l'ascissa della sezione in cui si è attinto il valore della curvatura limite elastica – si veda la figura 4.19 – e ricordando l'espressione 3.200 già ricavata per la mensola, la Lagrangiana mediata sulla luce della trave diventa

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^*(t^*) = & \rho b h \left[\frac{1}{2} \int_0^L (v_{t^*}^*)^2 dx^* \right] + \\ & - \rho b h \left[\int_0^{x_0^*} F(x^*, t^*) dx^* + \int_{x_0^*}^L F(x^*, t^*) dx^* \right], \end{aligned} \quad (4.86)$$

dove la funzione $F(x^*, t^*)$ è definita dalle 4.7.

Ricordando le regole 3.6, 3.7, 3.8, 3.179 e 4.8 si ottiene la seguente espressione adimensionale della 4.86

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(t) = & \frac{1}{2} \int_0^1 v_t^2 dx - \int_0^{x_0} \alpha \left(3|-v_{xx}| - 4\sqrt{\alpha|-v_{xx}|} + \frac{3}{2}\alpha \right) dx + \\ & - \int_{x_0}^1 \frac{v_{xx}^2}{2} dx. \end{aligned} \quad (4.87)$$

L'espressione 4.4 dello spostamento trasversale di una mensola, opportunamente adimensionalizzata, diventa

$$v(x, t) \simeq A(t)\phi(x) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta(t)) \quad \text{con } A(t) \geq 0, \quad (4.88)$$

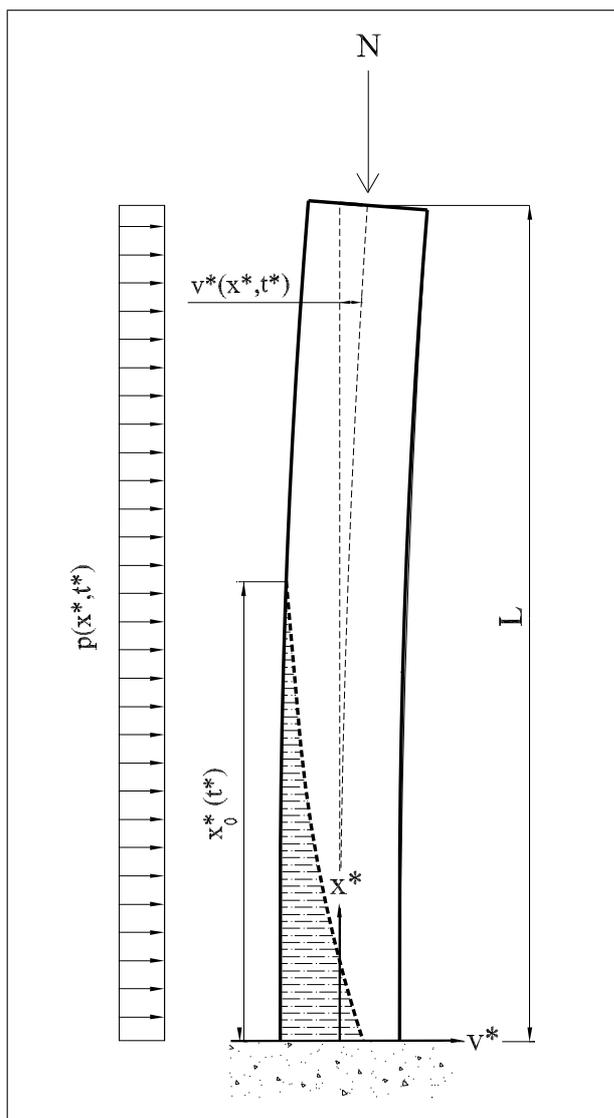


Figura 4.19. La mensola.

essendo

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{2} \{-\cos(\Lambda_1 x) + \cosh(\Lambda_1 x) - K_1 [-\sin(\Lambda_1 x) + \sinh(\Lambda_1 x)]\}, \\ \Lambda_1 &= 1.8751, \quad K_1 = 0.7341.\end{aligned}\quad (4.89)$$

Sostituendo 4.88 in 4.87, si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}(t) &= \frac{1}{2} \left[\dot{A} \cos(\Lambda_1^2 t + \beta) - A(\Lambda_1^2 + \dot{\beta}) \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) \right]^2 \int_0^1 \phi^2(x) dx + \\ &\quad - 3\alpha A |\cos(\Lambda_1^2 t + \beta)| \int_0^{x_0} \phi_{xx} dx + \\ &\quad + 4\sqrt{\alpha^3 A |\cos(\Lambda_1^2 t + \beta)|} \int_0^{x_0} \sqrt{\phi_{xx}} dx + \\ &\quad - \frac{3}{2} \alpha^2 \int_0^{x_0} dx - \frac{1}{2} A^2 \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta) \int_{x_0}^1 \phi_{xx}^2 dx.\end{aligned}\quad (4.90)$$

Calcolando gli integrali in 4.90, trascurando i termini in $\dot{A}^2, \dot{A}\dot{\beta}, \dot{\beta}^2$ e ricordando che $\phi_x(0) = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}(t) &\simeq \frac{1}{8} \left[A^2 \Lambda_1^2 \sin^2(\Lambda_1^2 t + \beta) (\Lambda_1^2 + 2\dot{\beta}) - 2A\dot{A}\Lambda_1^2 \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta) \right] + \\ &\quad - 3\alpha A |\cos(\Lambda_1^2 t + \beta)| \phi_x(x_0) + 4\sqrt{\alpha^3 A |\cos(\Lambda_1^2 t + \beta)|} \int_0^{x_0} \sqrt{\phi_{xx}} dx + \\ &\quad - \frac{3}{2} \alpha^2 x_0 - \frac{1}{8} A^2 \Lambda_1^4 \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta) [1 - x_0 + P(x_0)],\end{aligned}\quad (4.91)$$

dove la funzione $P(x_0)$ è definita dall'espressione

$$\begin{aligned}P(x_0) &= -\frac{K_1}{2\Lambda_1} \cos(2\Lambda_1 x_0) + \frac{K_1}{2\Lambda_1} \cosh(2\Lambda_1 x_0) + \\ &\quad - \frac{(1 - K_1^2)}{4\Lambda_1} \sin(2\Lambda_1 x_0) - \frac{(1 + K_1^2)}{4\Lambda_1} \sinh(2\Lambda_1 x_0) + \\ &\quad - \frac{(1 + K_1^2)}{\Lambda_1} \sin(\Lambda_1 x_0) \cosh(\Lambda_1 x_0) - \frac{(1 - K_1^2)}{\Lambda_1} \sinh(\Lambda_1 x_0) \cos(\Lambda_1 x_0) + \\ &\quad + \frac{2K_1}{\Lambda_1} \sin(\Lambda_1 x_0) \sinh(\Lambda_1 x_0).\end{aligned}\quad (4.92)$$

Capitolo 4

Si noti che si ha

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} P(x_0) = \lim_{x_0 \rightarrow 1} P(x_0) = 0. \quad (4.93)$$

Il caso elastico può essere ottenuto, come caso particolare, da 4.91 ponendo $x_0 = 0$; in questa circostanza, la Lagrangiana mediata sulla luce della trave ha l'espressione

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(t)_{el} \simeq & \frac{1}{8} \left[A^2 \Lambda_1^2 \sin^2(\Lambda_1^2 t + \beta) (\Lambda_1^2 + 2\dot{\beta}) - 2A\dot{A}\Lambda_1^2 \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta) \right] + \\ & - \frac{1}{8} A^2 \Lambda_1^4 \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta). \end{aligned} \quad (4.94)$$

La funzione $x_0(t)$

La funzione $x_0(t)$ rappresenta, al generico istante t , l'ascissa della sezione della trave in cui si verifica

$$|\chi(x_0, t)| = \alpha. \quad (4.95)$$

Come è possibile verificare dalla figura 4.19, l'immagine della funzione $x_0(t) = \frac{x_0^*}{L}$ è compresa nell'intervallo $[0, 1]$. Ricordando l'equazione di congruenza 1.30 e l'espressione 4.88 dello spostamento trasversale, e considerando che si ha $\phi_{xx}(x) \geq 0$ nell'intervallo $[0, 1]$, la condizione 4.95 diventa

$$|-v_{xx}(x_0, t)| = A \phi_{xx}(x_0) |\cos(\Lambda_1^2 t + \beta)| = \alpha, \quad (4.96)$$

che, ricordando l'espressione 4.89 di $\phi(x)$, fornisce

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} A \Lambda_1^2 \{ \cos(\Lambda_1 x_0) + \cosh(\Lambda_1 x_0) - K_1 [\sin(\Lambda_1 x_0) + \sinh(\Lambda_1 x_0)] \} \cdot \\ & \cdot |\cos(\Lambda_1^2 t + \beta)| = \alpha. \end{aligned} \quad (4.97)$$

La 4.97 non è risolvibile esplicitamente; tuttavia, essa definisce in maniera implicita la funzione $x_0(A, t, \alpha)$.

Gli istanti t_p e t'_p in cui si annulla la funzione x_0 possono essere ricavati dalla 4.97 e sono dati dalle relazioni

$$t'_p = \frac{1}{\Lambda_1^2} \left(\arccos\left(-\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2}\right) - \beta + n\pi \right), \quad (4.98)$$

$$t_p = \frac{1}{\Lambda_1^2} \left(\arccos\left(\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2}\right) - \beta + n\pi \right), \quad (4.99)$$

dove n è un numero intero. Nell'intervallo

$$t'_p \leq t \leq t_p, \quad (4.100)$$

la funzione x_0 è definita dalla 4.97 ed è positiva.

Per valori esterni all'intervallo 4.100, invece, la 4.97 fornisce per x_0 valori negativi: in tali istanti, la funzione x_0 perde di significato fisico, in quanto nessun punto della trave raggiunge il valore limite della curvatura elastica. Tuttavia, risulta comodo estenderla con continuità, ponendo

$$x_0(t) = 0 \quad \text{per} \quad t_p \leq t \leq t'_p. \quad (4.101)$$

La funzione $x_0(t)$ definita dalle 4.97 e 4.101 è disegnata nelle figure 4.20, 4.21. In particolare, in figura 4.20 è mostrato un confronto fra la funzione x_0 e la parte oscillatoria della soluzione 4.88. Si può notare che la funzione x_0 ha periodo $\frac{\pi}{\Lambda_1^2}$, mentre l'oscillazione elastica ha periodo $\frac{2\pi}{\Lambda_1^2}$.

In figura 4.21, invece, la funzione x_0 è stata disegnata per diversi valori del rapporto $\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2}$. Fissato il valore dell'ampiezza A delle oscillazioni, al diminuire di α – ossia all'aumentare del grado di nonlinearity del problema – la funzione x_0 tende puntualmente a 1 per tutti i valori di t interni all'intervallo 4.97.

Integrazione sul semiperiodo elastico delle oscillazioni

Per semplicità, come nel caso della trave semplicemente appoggiata, si integra la Lagrangiana 4.91 sul semiperiodo elastico, anziché sull'intero periodo dell'oscillazione. Precisamente, si sceglie di integrare sull'intervallo temporale $[-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}, \frac{\pi}{\Lambda_1^2} - \frac{\beta}{\Lambda_1^2}]$, essendo t_p e t'_p dati dalle 4.98, 4.99 con $n = 0$.

Anche in questo caso, come per la trave semplicemente appoggiata, è possibile osservare che, oltre alla funzione x_0 , tutte le funzioni in 4.91 – tranne la funzione $\sin(\Lambda_1^2 t + \beta) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta)$ che si annulla nell'integrazione sul semiperiodo elastico –, sono positive e periodiche di periodo $\frac{\pi}{\Lambda_1^2}$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}}^{\frac{1}{\Lambda_1} - \frac{\beta}{\Lambda_1^2}} \bar{\mathcal{L}}(t) dt &= \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}}^{t_p} \bar{\mathcal{L}}(t) dt + \int_{t_p}^{t'_p} \bar{\mathcal{L}}(t)_{el} dt + \int_{t'_p}^{\frac{\pi}{\Lambda_1^2} - \frac{\beta}{\Lambda_1^2}} \bar{\mathcal{L}}(t) dt = \\ &= 2 \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}}^{t_p} \bar{\mathcal{L}}(t) dt + \int_{t_p}^{t'_p} \bar{\mathcal{L}}(t)_{el} dt, \end{aligned} \quad (4.102)$$

dove $\bar{\mathcal{L}}(t)$ è la Lagrangiana mediata sulla luce della trave definita dalla 4.91 ed $\bar{\mathcal{L}}(t)_{el}$ è definita dalla 4.94.

Capitolo 4

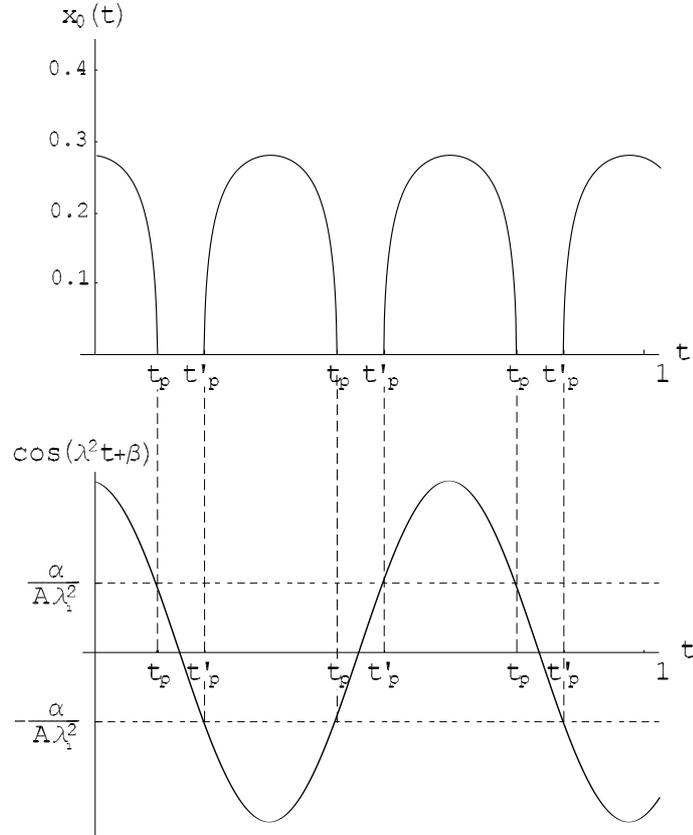


Figura 4.20. La funzione $x_0(t)$ confrontata con le oscillazioni trasversali elastiche di una sezione della trave.

Nell'intervallo $[-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}, t_p]$ in cui risulta $\cos(\Lambda_1^2 t + \beta) > 0$, l'espressione 4.91 diventa

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(t) \simeq & \frac{1}{8} \left[A^2 \Lambda_1^2 \sin^2(\Lambda_1^2 t + \beta) (\Lambda_1^2 + 2\dot{\beta}) - 2A\dot{A}\Lambda_1^2 \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta) \right] + \\ & - 3\alpha A \cos(\Lambda_1^2 t + \beta) \phi_x(x_0) + 4\sqrt{\alpha^3 A \cos(\Lambda_1^2 t + \beta)} \int_0^{x_0} \sqrt{\phi_{xx}} dx + \\ & - \frac{3}{2}\alpha^2 x_0 - \frac{1}{8}A^2 \Lambda_1^4 \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta) [1 - x_0 + P(x_0)]. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Pertanto, utilizzando le relazioni 4.94, 4.103, e considerando costanti durante l'integrazione i parametri A e β , in virtù dell'ipotesi di piccolezza delle loro derivate \dot{A} e $\dot{\beta}$, è possibile scrivere la seguente espressione della Lagrangiana media del sistema

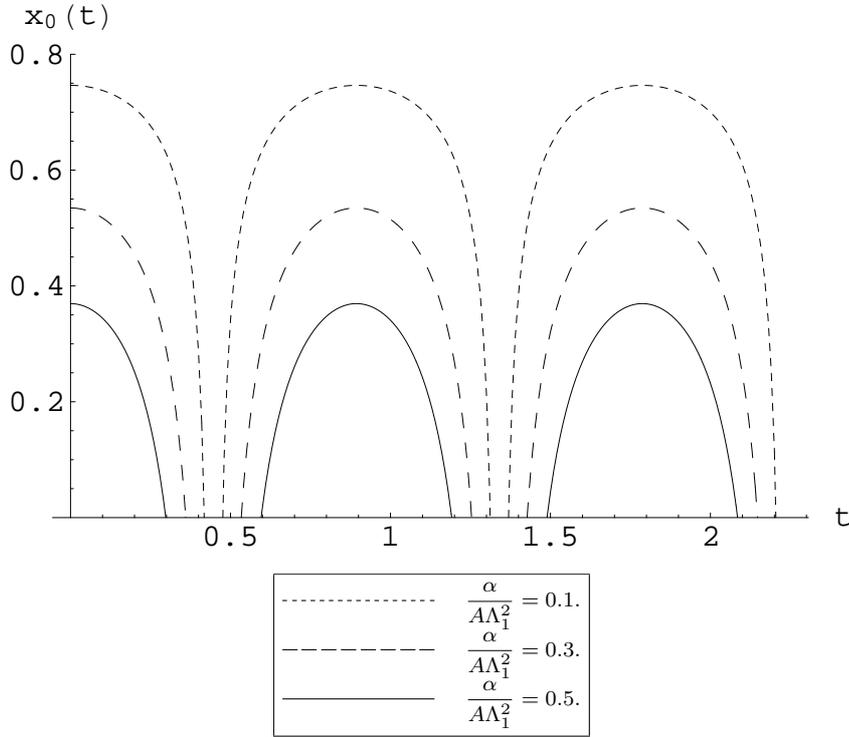


Figura 4.21. La funzione $x_0(t)$ al variare del rapporto $\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2}$.

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) &= \\
 &= \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}}^{\frac{\pi}{\Lambda_1^2} - \frac{\beta}{\Lambda_1^2}} \frac{1}{8} \left[A^2 \Lambda_1^2 \sin^2(\Lambda_1^2 t + \beta) (\Lambda_1^2 + 2\dot{\beta}) - 2A\dot{A}\Lambda_1^2 \sin(\Lambda_1^2 t + \beta) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta) \right] dt + \\
 &- \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}}^{\frac{\pi}{\Lambda_1^2} - \frac{\beta}{\Lambda_1^2}} \frac{1}{8} A^2 \Lambda_1^4 \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta) dt - 6\alpha A \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}}^{t_p} \cos(\Lambda_1^2 t + \beta) \phi_x(x_0) dt + \\
 &+ 8 \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}}^{t_p} \left(\sqrt{\alpha^3 A \cos(\Lambda_1^2 t + \beta)} \int_0^{x_0} \sqrt{\phi_{xx}} dx \right) dt - 3\alpha^2 \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}}^{t_p} x_0 dt + \\
 &+ \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}}^{t_p} \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta) x_0 dt - \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \int_{-\frac{\beta}{\Lambda_1^2}}^{t_p} \cos^2(\Lambda_1^2 t + \beta) P(x_0) dt.
 \end{aligned}$$

(4.104)

Calcolando, quando è possibile, gli integrali esplicitamente, ricordando l'espressione 4.99 per la funzione t_p e tenendo conto di avere ipotizzato che β sia costante nell'intervallo di integrazione, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) &= \\
 &= \frac{\pi A^2}{8} \dot{\beta} - 6\alpha A \int_0^{\frac{1}{\Lambda_1^2} \arccos(\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2})} \cos(\Lambda_1^2 t) \phi_x(x_0) dt + \\
 &+ 8 \int_0^{\frac{1}{\Lambda_1^2} \arccos(\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2})} \left(\sqrt{\alpha^3 A \cos(\Lambda_1^2 t)} \int_0^{x_0} \sqrt{\phi_{xx}} dx \right) dt + \\
 &- 3\alpha^2 \int_0^{\frac{1}{\Lambda_1^2} \arccos(\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2})} x_0 dt + \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \int_0^{\frac{1}{\Lambda_1^2} \arccos(\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2})} \cos^2(\Lambda_1^2 t) x_0 dt + \\
 &- \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \int_0^{\frac{1}{\Lambda_1^2} \arccos(\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2})} \cos^2(\Lambda_1^2 t) P(x_0) dt,
 \end{aligned}
 \tag{4.105}$$

dove la funzione x_0 è definita implicitamente dall'equazione

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} A \Lambda_1^2 \{ \cos(\Lambda_1 x_0) + \cosh(\Lambda_1 x_0) - K_1 [\sin(\Lambda_1 x_0) + \sinh(\Lambda_1 x_0)] \cdot \\
 \cdot \cos(\Lambda_1^2 t) \} = \alpha \quad \text{per } 0 \leq t \leq \frac{1}{\Lambda_1^2} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{4.106}$$

Come per la trave appoggiata, conviene scrivere la 4.105 nella forma

$$\bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) = S(A) + \frac{A^2 \pi}{8} \dot{\beta}.
 \tag{4.107}$$

Ci si riduce al caso elastico ponendo nella 4.107

$$A = \frac{\alpha}{\Lambda_1^2} = A_{el},
 \tag{4.108}$$

dove A_{el} rappresenta il valore massimo dell'ampiezza delle oscillazioni per cui la trave rimane interamente in campo elastico. In questa situazione, si ottiene

$$\lim_{A^+ \rightarrow A_{el}} S(A) = 0 \qquad \lim_{A^+ \rightarrow A_{el}} \bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}_{el} = \frac{A_{el}^2 \pi}{8} \dot{\beta}.
 \tag{4.109}$$

In figura 4.22 è riportata la funzione $S(A)$ per diversi valori della curvatura limite elastica α .

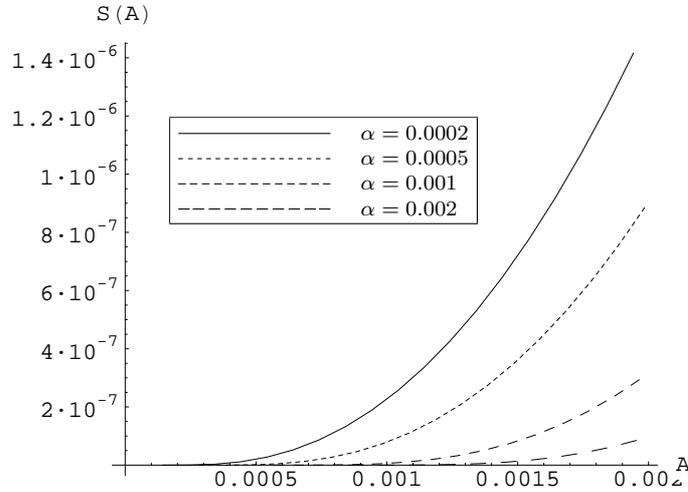


Figura 4.22. La funzione $S(A)$ al variare di α .

Fissato α , i valori di $S(A)$ sono stati ottenuti tabellando la funzione $x_0(t)$ – ricavata, per ogni valore di A , come radice dell’equazione 4.106 – e le altre funzioni che compaiono negli integrali in 4.105 e quindi procedendo all’integrazione numerica.

Anche in questo caso, come per la trave semplicemente appoggiata, ciascuna curva $S(A)$ è definita solo per $A \geq A_{el}$, e ha tangente orizzontale per $A = A_{el}$; inoltre, all’aumentare di α le $S(A)$ tendono puntualmente all’asse delle ascisse.

Per $A \gg \alpha$, tenuto conto della piccolezza della curvatura limite elastica α , la Lagrangiana 4.105 può essere approssimata impiegando i soli termini proporzionali ad A^2 ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} \simeq & \frac{A^2 \pi}{8} \dot{\beta} + \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \int_0^{\frac{1}{\Lambda_1} \arccos(\frac{\alpha}{A \Lambda_1^2})} \cos^2(\Lambda_1^2 t) x_0 dt + \\ & - \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \int_0^{\frac{1}{\Lambda_1} \arccos(\frac{\alpha}{A \Lambda_1^2})} \cos^2(\Lambda_1^2 t) P(x_0) dt. \end{aligned} \tag{4.110}$$

Al contrario, per $A \rightarrow \frac{\alpha}{\Lambda_1^2}$, ossia nelle vicinanze della soluzione elastica, tutti i termini 4.105 diventano proporzionali ad α^2 , pesando, di conseguenza, allo stesso modo nella determinazione della Lagrangiana. Infatti, come nel caso della trave appoggiata, per piccoli valori delle ampiezze di oscillazione i calcoli si sono rivelati estremamente sensibili, impedendo, di fatto, l’impiego di espressioni approssimate della 4.105.

Capitolo 4

Le equazioni di modulazione

Applicando le equazioni di Eulero–Lagrange 4.33 alla 4.107 si ottengono le equazioni di modulazione del problema

$$\dot{\beta} = -\frac{4}{A\pi} \frac{dS}{dA} \quad (4.111)$$

$$A\dot{A} = 0. \quad (4.112)$$

Dalla 4.112, essendo $A \neq 0$, si deduce

$$\dot{A} = 0 \quad A = A_0, \quad (4.113)$$

con A_0 l'ampiezza massima della deformata iniziale. Come per la trave appoggiata, il risultato descritto dalla 4.113 è congruente con le ipotesi di unimodalità della soluzione e di assenza di smorzamento.

Sempre in virtù del fatto che A è costante, espresso dalla 4.112, si deduce da 4.111

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}(A) = \text{cost.} \quad \beta = \dot{\beta}t + \beta_0. \quad (4.114)$$

Per il calcolo di $\dot{\beta}$ si ricorre nuovamente alla regola di derivazione 4.38 di un integrale dipendente da un parametro, ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{dS(A)}{dA} = & \\ = & -6\alpha \int_0^{\bar{t}_p} \cos(\Lambda_1^2 t) \phi_x(x_0) dt - 6\alpha A \int_0^{\bar{t}_p} \cos(\Lambda_1^2 t) \frac{\partial \phi_x(x_0)}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial A} dt + \\ & - 6\alpha A \frac{\partial \bar{t}_p}{\partial A} \cos(\Lambda_1^2 \bar{t}_p) \phi_x[x_0(\bar{t}_p)] + 8 \int_0^{\bar{t}_p} \left(\sqrt{\frac{\alpha^3 \cos(\Lambda_1^2 t)}{4A}} \int_0^{x_0} \sqrt{\phi_{xx}} dx \right) dt + \\ & + 8 \int_0^{\bar{t}_p} \left[\sqrt{A\alpha^3 \cos(\Lambda_1^2 t)} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\int_0^{x_0} \sqrt{\phi_{xx}} dx \right) \frac{\partial x_0}{\partial A} \right] dt + \\ & + 8 \frac{\partial \bar{t}_p}{\partial A} \sqrt{A\alpha^3 \cos(\Lambda_1^2 \bar{t}_p)} \int_0^{x_0(\bar{t}_p)} \sqrt{\phi_{xx}} dx - 3\alpha^2 \left[\int_0^{\bar{t}_p} \frac{\partial x_0}{\partial A} dt + \frac{\partial \bar{t}_p}{\partial A} x_0(\bar{t}_p) \right] + \\ & + \frac{1}{2} A \Lambda_1^4 \int_0^{\bar{t}_p} \cos^2(\Lambda_1^2 t) x_0 dt + \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \int_0^{\bar{t}_p} \cos^2(\Lambda_1^2 t) \frac{\partial x_0}{\partial A} dt + \\ & + \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \frac{\partial \bar{t}_p}{\partial A} \cos^2(\Lambda_1^2 \bar{t}_p) x_0(\bar{t}_p) - \frac{1}{2} A \Lambda_1^4 \int_0^{\bar{t}_p} \cos^2(\Lambda_1^2 t) P(x_0) dt + \\ & - \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \int_0^{\bar{t}_p} \cos^2(\Lambda_1^2 t) \frac{\partial P(x_0)}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial A} dt + \\ & - \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \frac{\partial \bar{t}_p}{\partial A} \cos^2(\Lambda_1^2 \bar{t}_p) P[x_0(\bar{t}_p)] dt, \end{aligned}$$

$$(4.115)$$

dove si è posto

$$\bar{t}_p = \frac{1}{\Lambda_1} \arccos\left(\frac{\alpha}{A\Lambda_1^2}\right) \quad (4.116)$$

e si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{t}_p}{\partial A} &= \frac{\alpha}{\Lambda_1^2 A \sqrt{A^2 \Lambda_1^4 - \alpha^2}}; \\ \phi_x(x_0) &= \frac{1}{2} \Lambda_1 \{ \sin(\Lambda_1 x_0) + \sinh(\Lambda_1 x_0) - K_1 [-\cos(\Lambda_1 x_0) + \cosh(\Lambda_1 x_0)] \}; \\ \frac{\partial \phi_x(x_0)}{\partial x_0} &= \phi_{xx}(x_0) = \\ &= \frac{1}{2} \Lambda_1^2 \{ \cos(\Lambda_1 x_0) + \cosh(\Lambda_1 x_0) - K_1 [\sin(\Lambda_1 x_0) + \sinh(\Lambda_1 x_0)] \}; \\ \frac{P(x_0)}{x_0} &= -\frac{1}{2} (1 - K_1^2) \cos(2\Lambda_1 x_0) - 2 \cos(\Lambda_1 x_0) \cosh(\Lambda_1 x_0) + \\ &- \frac{1}{2} (1 + K_1^2) \cosh(2\Lambda_1 x_0) + 2K_1 \sin(\Lambda_1 x_0) \cosh(\Lambda_1 x_0) + K_1 \sinh(2\Lambda_1 x_0) + \\ &+ K_1 \sin(2\Lambda_1 x_0) + 2K_1 \cos(\Lambda_1 x_0) \sinh(\Lambda_1 x_0) - 2K_1^2 \sinh(\Lambda_1 x_0) \sin(\Lambda_1 x_0). \end{aligned} \quad (4.117)$$

Inoltre, applicando il teorema delle funzioni implicite alla 4.106, che definisce implicitamente la $x_0(A, t)$, è possibile calcolarne la derivata rispetto ad A . Infatti, posto

$$\begin{aligned} \gamma(A, t, x_0) &= \frac{1}{2} A \Lambda_1^2 \{ \cos(\Lambda_1 x_0) + \cosh(\Lambda_1 x_0) - K_1 [\sin(\Lambda_1 x_0) + \sinh(\Lambda_1 x_0)] \cdot \\ &\quad \cdot \cos(\Lambda_1^2 t) \} - \alpha, \end{aligned} \quad (4.118)$$

si ottiene, per t compreso nell'intervallo $[0, \bar{t}_p]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial A} &= -\frac{\partial \gamma}{\partial A} \frac{\partial x_0}{\partial \gamma} = \\ &= -\frac{\{ \cos(\Lambda_1 x_0) + \cosh(\Lambda_1 x_0) - K_1 [\sin(\Lambda_1 x_0) + \sinh(\Lambda_1 x_0)] \}}{A \Lambda_1 \{ -\sin(\Lambda_1 x_0) + \sinh(\Lambda_1 x_0) - K_1 [\cos(\Lambda_1 x_0) + \cosh(\Lambda_1 x_0)] \}} = \\ &= -\frac{\Lambda_1 \{ \cos(\Lambda_1 x_0) + \cosh(\Lambda_1 x_0) - K_1 [\sin(\Lambda_1 x_0) + \sinh(\Lambda_1 x_0)] \}^2 \cos(\Lambda_1^2 t)}{2\alpha \{ -\sin(\Lambda_1 x_0) + \sinh(\Lambda_1 x_0) - K_1 [\cos(\Lambda_1 x_0) + \cosh(\Lambda_1 x_0)] \}}, \end{aligned}$$

$$(4.119)$$

dove si è utilizzata la condizione $\gamma(A, t, x_0) = 0$.

Ricordando che

$$x_0(\bar{t}_p) = \phi_x[x_0(\bar{t}_p)] = P[x_0(\bar{t}_p)] = 0, \quad (4.120)$$

è possibile semplificare la 4.115, ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{dS(A)}{dA} = & \\ = & -6\alpha \int_0^{\bar{t}_p} \cos(\Lambda_1^2 t) \phi_x(x_0) dt - 6\alpha A \int_0^{\bar{t}_p} \cos(\Lambda_1^2 t) \frac{\partial \phi_x(x_0)}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial A} dt + \\ & + 8 \int_0^{\bar{t}_p} \left(\sqrt{\frac{\alpha^3 \cos(\Lambda_1^2 t)}{4A}} \int_0^{x_0} \sqrt{\phi_{xx}} dx \right) dt + \\ & + 8 \int_0^{\bar{t}_p} \left[\sqrt{A\alpha^3 \cos(\Lambda_1^2 t)} \sqrt{\phi_{xx}(x_0)} dx \frac{\partial x_0}{\partial A} \right] dt + \quad (4.121) \\ & - 3\alpha^2 \int_0^{\bar{t}_p} \frac{\partial x_0}{\partial A} dt + \frac{1}{2} A \Lambda_1^4 \int_0^{\bar{t}_p} \cos^2(\Lambda_1^2 t) x_0 dt + \\ & + \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \int_0^{\bar{t}_p} \cos^2(\Lambda_1^2 t) \frac{\partial x_0}{\partial A} dt - \frac{1}{2} A \Lambda_1^4 \int_0^{\bar{t}_p} \cos^2(\Lambda_1^2 t) P(x_0) dt + \\ & - \frac{1}{4} A^2 \Lambda_1^4 \int_0^{\bar{t}_p} \cos^2(\Lambda_1^2 t) \frac{\partial P(x_0)}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial A} dt, \end{aligned}$$

dove le funzioni non indicate esplicitamente si possono ricavare dalle 4.117, 4.119.

Si noti che in corrispondenza del caso elastico si ha, come, peraltro, è possibile dedurre anche dalla figura 4.22,

$$\lim_{A^+ \rightarrow \frac{\alpha}{\Lambda_1^2}} \frac{dS}{dA} = 0. \quad (4.122)$$

Sostituendo 4.121 in 4.111 si ottiene un'equazione trascendente che, risolta numericamente per differenti valori dell'ampiezza A delle oscillazioni, consente di calcolare la funzione $\dot{\beta}(A)$.

Per $A^+ \rightarrow \frac{\alpha}{\Lambda_1^2}$ dalla 4.34 si deduce

$$\dot{\beta} = 0 \quad \beta = \beta_0 \quad (4.123)$$

che, sostituita nella 4.88, dà l'espressione della soluzione elastica

$$v(x, t) \simeq A_0 \phi(x) \cos(\Lambda_1^2 t + \beta_0), \quad (4.124)$$

dove, come per la trave appoggiata, la frequenza dell'oscillazione coincide con quella del primo modo di vibrare elastico e A_0 e β_0 sono costanti da determinare in base alle condizioni iniziali.

Per $A > \frac{\alpha}{\Lambda_1^2}$, ossia in presenza di fessurazioni, la 4.88 diventa

$$v(x, t) \simeq A_0 \phi(x) \cos \left((\pi^2 + \dot{\beta}(A_0))t + \beta_0 \right). \quad (4.125)$$

Anche in questo caso, la funzione $\dot{\beta}$ rappresenta la variazione della frequenza di oscillazione, rispetto a quella elastica, con l'ampiezza dell'oscillazione. Essendo $\frac{dS}{dA} \geq 0$, come è possibile dedurre anche dalla figura 4.22, $\dot{\beta}$ assume sempre valori non positivi. Pertanto, la frequenza di oscillazione della trave tende a diminuire con l'ampiezza, mostrando un comportamento di tipo "softening".

In figura 4.23 è mostrata la curva $\dot{\beta}(A)$ per $\alpha = 0.002$; l'area tratteggiata rappresenta la regione delle ampiezze per cui $\dot{\beta}$ non è definita ed è valida la trattazione elastica lineare. La curva $\dot{\beta}$ parte da zero con tangente orizzontale – come meglio evidenziato in figura 4.23 – per $A = A_{el}$, decrescendo rapidamente e tendendo all'asintoto orizzontale $\dot{\beta} = -\frac{\Lambda_1^2}{2}$. Infatti, si ha

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{dS}{dA} = \frac{A\Lambda_1^2\pi}{8}, \quad (4.126)$$

che, inserita nella 4.34 fornisce, per ogni valore di α

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \dot{\beta}(A) = -\frac{\Lambda_1^2}{2}. \quad (4.127)$$

Anche per la mensola, come per la trave appoggiata, la frequenza non-lineare della trave tende a dimezzarsi all'aumentare dell'ampiezza delle oscillazioni.

In figura 4.24 sono riportati i valori che assume la funzione $\dot{\beta}(A)$ per piccole ampiezze e diversi valori della curvatura limite elastica α . All'aumentare di α , le curve $\dot{\beta}$ tendono all'asse delle ascisse in maniera via via più graduale. Tuttavia, come evidenziato dalla figura, tale tendenza si presenta piuttosto significativa anche per valori elevati di α ; nel paragrafo seguente, analogamente a quanto fatto per la trave appoggiata, si propone una correzione della trattazione, ottenuta tenendo conto anche dei termini quadratici in $\dot{\beta}^2$ nella costruzione della Lagrangiana.

Confrontando le figure 4.23, 4.24 con le equivalenti figure 4.6, 4.7 per la trave appoggiata è possibile notare che le curve $\dot{\beta}$ disegnate per la mensola presentano un andamento notevolmente più graduale delle corrispondenti per la trave appoggiata.

Capitolo 4

Questo fatto si può spiegare come un effetto della maggior deformabilità della mensola rispetto alla trave appoggiata. Infatti, a parità di caratteristiche geometriche, sforzo normale agente e ampiezza massima delle oscillazioni, il valore massimo della curvatura attinto lungo l'asse dalla trave appoggiata è circa tre volte maggiore del corrispondente valore per la mensola⁴.

Correzione della trattazione con i termini in $\dot{\beta}^2$

Aggiungendo all'espressione 4.91 della Lagrangiana mediata sulla luce della trave il termine che dipende da $\dot{\beta}^2$ e procedendo in maniera del tutto analoga al caso precedente, l'espressione 4.107 assume la forma corretta

$$\bar{L}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) = S(A) + \frac{A^2\pi}{8}\dot{\beta} + \frac{A^2\pi}{16\Lambda_1^2}\dot{\beta}^2. \quad (4.128)$$

Applicando le equazioni di Eulero–Lagrange 4.33 alla 4.128 si ottengono le nuove equazioni di modulazione del problema

$$\frac{dS}{dA} + \frac{A\pi}{4}\dot{\beta} + \frac{A\pi}{8\Lambda_1^2}\dot{\beta}^2 = 0 \quad (4.129)$$

$$\frac{\pi}{2}A\dot{A} + \frac{A\pi}{4\Lambda_1^2}\dot{A}\dot{\beta} + \frac{A^2\pi}{8\Lambda_1^2}\ddot{\beta} = 0. \quad (4.130)$$

Come per la trave appoggiata, ricordando le ipotesi di unimodalità della soluzione e di assenza di smorzamento, anche in questo caso è ammissibile imporre la condizione

$$\dot{A} = 0 \quad A = \text{costante}, \quad (4.131)$$

che, inserita nelle 4.129, 4.130, fornisce

$$\frac{dS}{dA} + \frac{A\pi}{4}\dot{\beta} + \frac{A\pi}{8\Lambda_1^2}\dot{\beta}^2 = 0 \quad (4.132)$$

$$\ddot{\beta} = 0. \quad (4.133)$$

Dalla 4.133 si ottiene

$$\dot{\beta} = \text{costante} \quad \beta = \dot{\beta}t + \beta_0. \quad (4.134)$$

⁴ Fissato A , il massimo valore adimensionale attinto dalla curvatura nel caso della trave appoggiata, ottenuto nell'ipotesi 4.10 sulla forma dello spostamento trasversale, è $\pi^2 A$, mentre per la mensola è $\Lambda_1^2 A$. Il rapporto fra i due valori è, quindi, $\frac{\pi^2}{\Lambda_1^2} \simeq 3.5$.

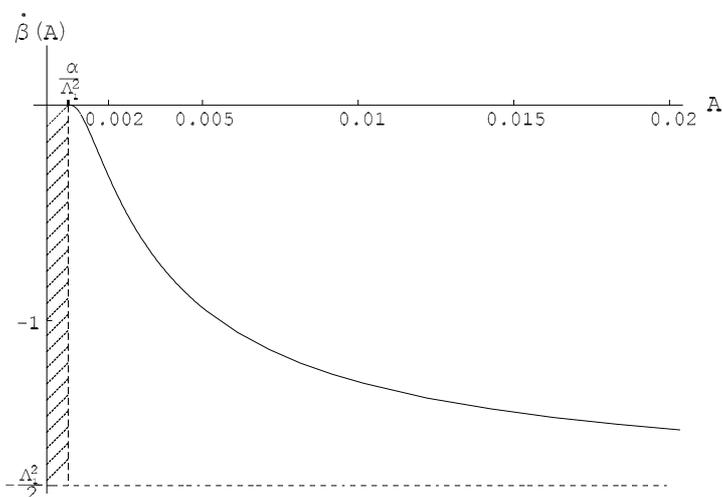


Figura 4.23. La curva $\dot{\beta}(A)$ disegnata per $\alpha = 0.002$.

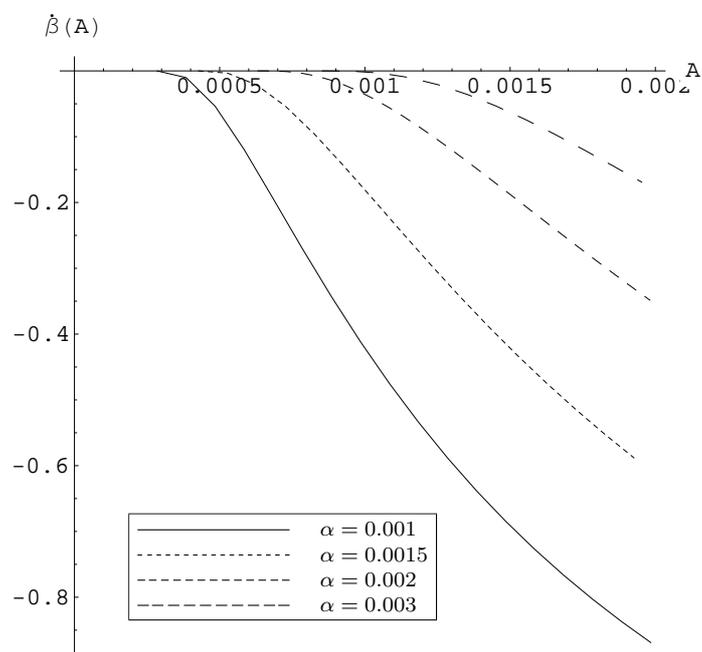


Figura 4.24. Le curve $\dot{\beta}(A)$ al variare della curvatura limite elastica α .

Capitolo 4

Dalla 4.132 si ottiene, risolvendo per $\dot{\beta}$,

$$\dot{\beta}(A) = \frac{-\frac{A\pi}{4} + \sqrt{\frac{A^2\pi^2}{16} - \frac{A\pi}{2\Lambda_1^2} \frac{dS}{dA}}}{\frac{\pi A}{4\Lambda_1}} = -\Lambda_1^2 + \frac{4\Lambda_1^2}{\pi A} \sqrt{\frac{A^2\pi^2}{16} - \frac{A\pi}{2\Lambda_1^2} \frac{dS}{dA}}, \quad (4.135)$$

dove la scelta del segno positivo è obbligatoria per evitare di ottenere una frequenza di oscillazione negativa.

Si noti che, ricordando le 4.122, 4.127, si ottiene dalla 4.135

$$\lim_{A^+ \rightarrow A_{el}} \dot{\beta}(A) = -\Lambda_1^2 + \frac{4\Lambda_1^2}{\pi A} \sqrt{\frac{A\pi^2}{16}} = 0 \quad (4.136)$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \dot{\beta}(A) = -\Lambda_1^2 + \frac{4\Lambda_1^2}{\pi A} \sqrt{\frac{A^2\pi^2}{16} - \frac{A\pi}{2\Lambda_1^2} \frac{A\Lambda_1^2\pi}{8}} = -\Lambda_1^2. \quad (4.137)$$

La 4.136 esprime, ancora una volta, l'annullamento della funzione $\dot{\beta}$ in corrispondenza della soluzione elastica e conferma un corretto raccordo fra caso elastico e caso nonlineare.

La 4.137, invece, esprime la tendenza all'annullamento della frequenza della trave per grandi valori delle ampiezza di oscillazione; pertanto, come per la trave appoggiata, il contributo del termine in $\dot{\beta}^2$ conduce ad un comportamento corretto di $\dot{\beta}$ quando A tende all'infinito. Nelle figure 4.25, 4.26 sono messe a confronto le soluzioni 4.111 e 4.135 per diversi valori di α . Come già osservato per la trave semplicemente appoggiata, dalla figura 4.25 si può notare come, anche per piccoli valori dell'ampiezza di oscillazione, la correzione apportata con i termini dipendenti da $\dot{\beta}^2$ assume un peso rilevante, soprattutto al diminuire di α . La figura 4.26, evidenzia la forte differenza di comportamento fra le due trattazioni per grandi valori di A .

4.2.2 Oscillazioni libere smorzate

Nel seguito, come già fatto per la trave semplicemente appoggiata, la trattazione presentata nel paragrafo 4.2.1 viene generalizzata, rimuovendo l'ipotesi di assenza di smorzamento.

Come già visto nel capitolo 3, si tiene conto degli elementi dissipativi presenti nel sistema introducendo uno smorzamento viscoso equivalente di coefficiente C , espresso per unità di lunghezza ed adimensionalizzato secondo le 3.8. In questo caso si impiegano le equazioni di Eulero-Lagrange 4.56, già scritte per la trave semplicemente appoggiata, dove $\bar{\mathcal{L}}$ è ancora data dalla 4.105 e \bar{Q}_A, \bar{Q}_β sono calcolati con procedura analoga a quella

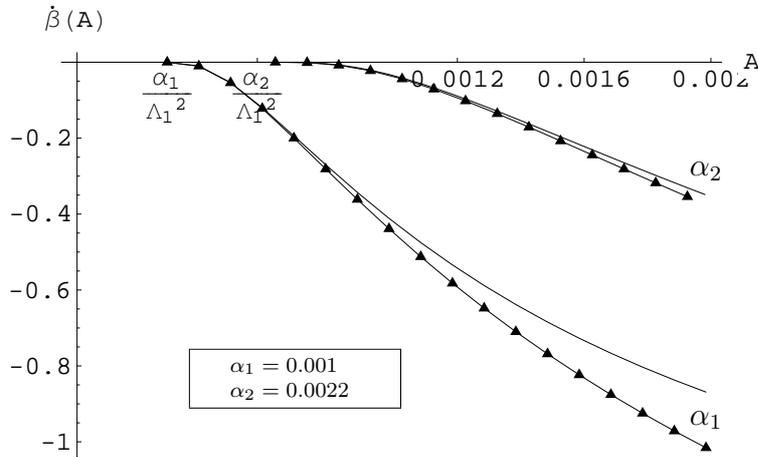


Figura 4.25. Andamento di $\dot{\beta}(A)$ in funzione di α per piccoli valori di A . Le linee continue rappresentano la soluzione 4.111, quelle punteggiate la soluzione 4.135 corretta con i termini in $\dot{\beta}^2$.

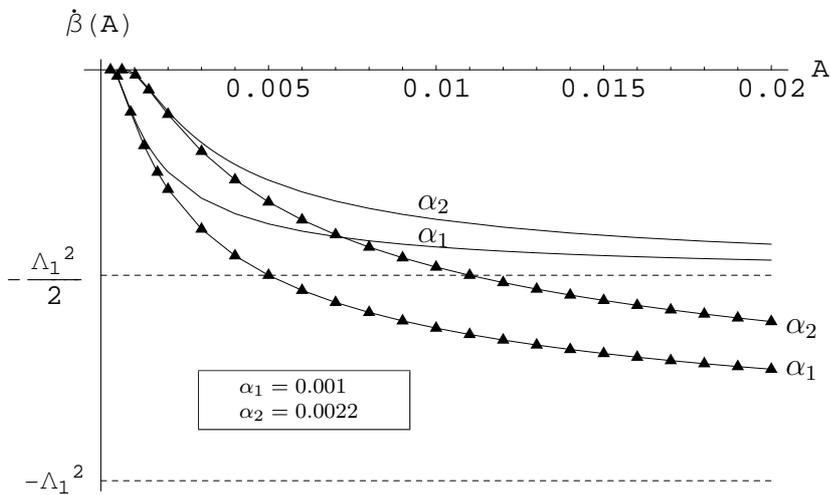


Figura 4.26. Andamento di $\dot{\beta}(A)$ in funzione di α per grandi valori di A . Le linee continue rappresentano la soluzione 4.111, quelle punteggiate la soluzione 4.135 corretta con i termini in $\dot{\beta}^2$.

Capitolo 4

descritta nel paragrafo 3.5.2 e dati dalle espressioni

$$\bar{Q}_A = 0 \quad (4.138)$$

$$\bar{Q}_\beta = -\mu\pi A^2. \quad (4.139)$$

Introducendo le 4.105, 4.138, 4.139 nelle 4.56 si ottiene

$$\dot{\beta} = -\frac{4}{A\pi} \frac{dS}{dA}, \quad (4.140)$$

$$\dot{A} = -4\mu A. \quad (4.141)$$

Dalla 4.141, ricordando le 3.146, si ricava

$$A(t) = A_0 e^{-4\mu t} = A_0 e^{-\zeta \Lambda_1^2 t}, \quad (4.142)$$

che, sostituita nella 4.140, fornisce

$$\dot{\beta} = N(t, A_0, \alpha, \zeta), \quad (4.143)$$

dove $N(t, A_0, \alpha, \zeta)$ rappresenta una funzione del tempo, dell'ampiezza iniziale delle oscillazioni A_0 , della curvatura limite elastica α e del coefficiente di smorzamento viscoso ζ .

La soluzione della 4.143 è

$$\beta(t, A_0, \alpha, \zeta) = \int_0^t N(t, A_0, \alpha, \zeta) dt + \beta_0, \quad (4.144)$$

con β_0 deducibile dalle condizioni iniziali.

Fissati i valori dei parametri A_0, α, ζ , la 4.143 può essere risolta numericamente, fornendo la variazione nel tempo dello sfasamento β .

In figura 4.27 è mostrato l'andamento della funzione $\dot{\beta}$ col tempo per diversi valori del coefficiente di smorzamento viscoso. Per $\zeta = 0$ la funzione degenera in una retta orizzontale, tratteggiata in figura. Si noti che la funzione è definita solo nell'intervallo temporale $[0, t_{el}]$, con t_{el} fornito, come per la trave appoggiata, dalla 4.64.

Anche in questo caso, t_{el} rappresenta l'istante in cui l'ampiezza massima delle oscillazioni, decrescente nel tempo con la legge esponenziale 4.142, diventa uguale all'ampiezza limite elastica.

La funzione $\dot{\beta}$ si raccorda con la soluzione elastica ($\dot{\beta} = 0$) esattamente per $t = t_{el}$; il raccordo, come mostrato dalla figure 4.27, 4.28, è di classe C^1 .

Per valori superiori di t , la funzione $\dot{\beta}$ non è definita, ma, come già illustrato per la trave appoggiata, può essere estesa con continuità, ponendo

$$\dot{\beta} = 0 \quad \text{per } t > t_{el}. \quad (4.145)$$

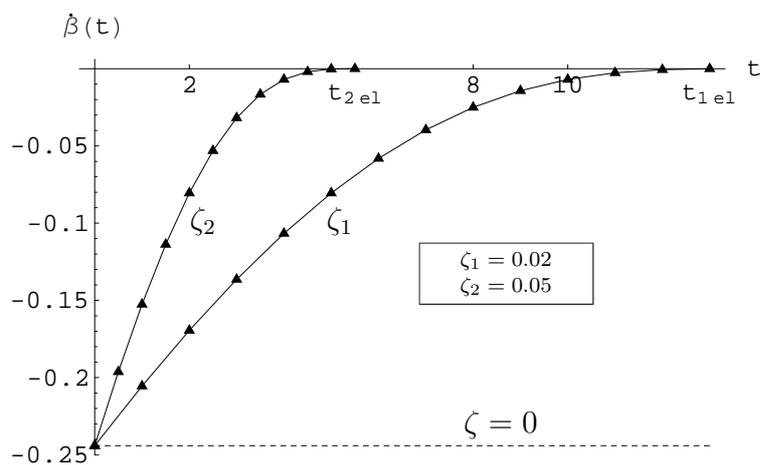


Figura 4.27. Andamento delle funzioni $\dot{\beta}(t)$ al variare di ζ , disegnate per $\alpha = 0.002$ ed $A = 0.0015$.

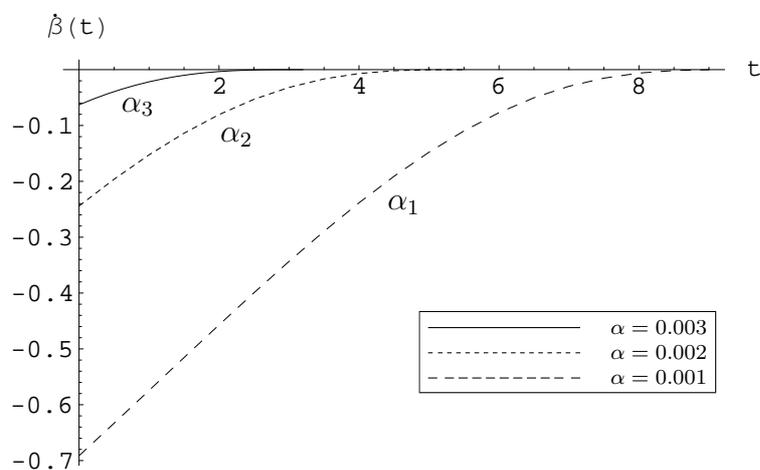


Figura 4.28. Andamento delle funzioni $\dot{\beta}(t)$ al variare di α , disegnate per $\zeta = 0.05$ ed $A = 0.0015$.

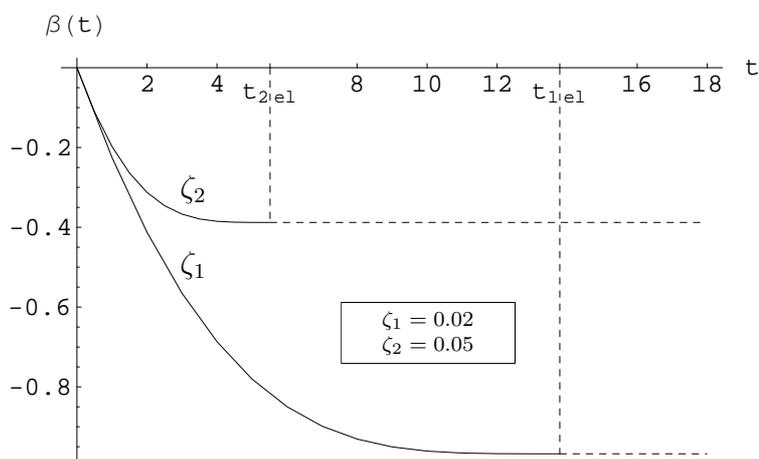


Figura 4.29. La funzione $\beta(t)$ al variare di ζ per $\alpha = 0.002$, $A_0 = 0.0015$ e $\beta_0 = 0$.

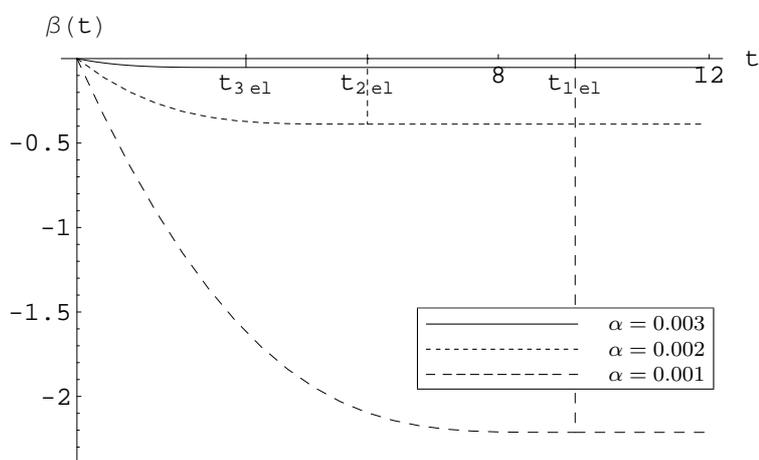


Figura 4.30. Andamento delle funzioni $\beta(t)$ al variare di α , disegnate per $\zeta = 0.05$, $A = 0.0015$ e $\beta_0 = 0$.

Le figure 4.29 e 4.30 mostrano la funzione $\beta(t)$, disegnate rispettivamente al variare del coefficiente di smorzamento viscoso e della curvatura limite elastica.

Ovviamente, anche la funzione $\beta(t)$ risulta definita solo nell'intervallo $[0, t_{el}]$. Come è possibile vedere dalle figure, la funzione raggiunge t_{el} con tangente orizzontale, coerentemente col valore nullo assunto dalla sua derivata $\dot{\beta}(t_{el})$. Ciò consente di porre

$$\beta = \beta(t_{el}) \quad \text{per } t > t_{el}. \quad (4.146)$$

Introducendo le 4.142, 4.144, 4.146 nell'espressione 4.125 della soluzione approssimata, si ottiene

$$\begin{aligned} &\text{per } t \leq t_{el} \\ v(x, t) &= A_0 \phi(x) e^{-\zeta \Lambda_1^2 t} \cos \left(\Lambda_1^2 t + \int_0^t N(t, A_0, \alpha, \zeta) dt + \beta_0 \right); \end{aligned} \quad (4.147a)$$

$$\begin{aligned} &\text{per } t > t_{el} \\ v(x, t) &= A_0 \phi(x) e^{-\zeta \Lambda_1^2 t} \cos (\Lambda_1^2 t + \beta(t_{el}) + \beta_0). \end{aligned} \quad (4.147b)$$

Per queste relazioni valgono le stesse osservazioni già fatte nel paragrafo 4.1.2 nel caso di trave semplicemente appoggiata.

Confrontando le soluzioni ottenute per la mensola e per la trave appoggiata, è possibile notare come la variazione nel tempo di ampiezza e fase dell'oscillazione si presenti, nel caso della mensola, notevolmente più graduale, essendo il decadimento della soluzione tanto più lento quanto meno rigida è la struttura.

4.2.3 Oscillazioni forzate in risonanza primaria

Si consideri la mensola di figura 4.19 soggetta alla forzante sinusoidale

$$p(x, t) = k \sin(\Omega t), \quad (4.148)$$

dove, con le notazioni 3.8, si è posto

$$k = \frac{k^* T^2}{\rho A L} \quad \Omega = \Lambda_1^2 + \lambda \quad (4.149)$$

e λ , come per la trave appoggiata, rappresenta un parametro di “detuning” che esprime la vicinanza della frequenza della forzante a quella del primo modo di vibrare della mensola; si pone, inoltre, $\lambda = O(1)$.

Capitolo 4

Sotto queste ipotesi, come già fatto al capitolo 3, è possibile approssimare la soluzione del problema con l'espressione unimodale

$$v(x, t) = A(t)\phi(x) \sin((\Lambda_1^2 + \lambda)t - \gamma(t)) = A(t)\phi(x) \sin(\Lambda_1^2 + \beta(t)), \quad (4.150)$$

dove

$$\beta(t) = \lambda t - \gamma(t). \quad (4.151)$$

Come già visto per la trave appoggiata, anche in questo caso è possibile dimostrare che, sostituendo la 4.150 nell'espressione 4.86 e traslando di $\frac{\pi}{2}$ l'intervallo di integrazione temporale impiegato nel paragrafo 4.2.1, si arriva ad una espressione della Lagrangiana media coincidente con la 4.105. La stessa osservazione vale anche per le componenti generalizzate (\bar{Q}_A, \bar{Q}_β) del vettore delle forze di smorzamento viscoso.

Pertanto, si corregge l'espressione 4.105 della Lagrangiana media del sistema introducendo il termine relativo alla forzante. Si ottiene

$$\bar{\mathcal{L}}(A, \dot{A}, \beta, \dot{\beta}) = S(A) + \frac{A^2\pi}{8}\dot{\beta} + 1.56598 \frac{Ak\pi}{8\Lambda_1^2} \cos(\lambda t - \beta), \quad (4.152)$$

da cui, applicando le equazioni 4.56 di Eulero–Lagrange e ricordando la 4.151 si ottengono le equazioni di modulazione del sistema

$$\frac{dS}{dA} + \frac{A\pi}{4}(\lambda - \dot{\gamma}) + 1.56598 \frac{k\pi}{8\Lambda_1^2} \cos \gamma = 0 \quad (4.153)$$

$$\frac{\dot{A}\pi}{4} - 1.56598 \frac{k\pi}{8\Lambda_1^2} \sin \gamma = -\mu\pi A. \quad (4.154)$$

Le equazioni 4.153, 4.154 sono difficili da risolvere, anche per via numerica. Tuttavia, anche in questo caso, come per la trave appoggiata, è possibile semplificare notevolmente il sistema, limitandosi a determinare la soluzione in fase stazionaria.

Imponendo le condizioni di stazionarietà 3.128 alle 4.153 e 4.154, si ottengono le seguenti equazioni di modulazione del sistema

$$\frac{dS}{dA} + \frac{A\pi}{4}\lambda = -1.56598 \frac{k\pi}{8\Lambda_1^2} \cos \gamma \quad (4.155)$$

$$\mu\pi A = +1.56598 \frac{k\pi}{8\Lambda_1^2} \sin \gamma, \quad (4.156)$$

che, naturalmente, sono valide solo in fase stazionaria.

Elevando al quadrato le 4.155 e 4.156 e sommandole membro a membro si ottiene

$$\left(\frac{dS}{dA} + \frac{A\pi}{4}\lambda\right)^2 = 2.542\frac{k^2\pi^2}{64\Lambda_1^4} - \mu^2 A^2 \pi^2 \quad (4.157)$$

che, noti i parametri α, μ, k , costituisce un legame fra la frequenza ($\Lambda_1^2 + \lambda$) della forzante e l'ampiezza A delle oscillazioni. Una volta ricavato il valore di A dalla 4.157, si ottiene dalla 4.156

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{8\mu\Lambda_1^2}{1.56598k}A\right) + 2n\pi, \quad \gamma = \pi - \arcsin\left(\frac{8\mu\Lambda_1^2}{1.56598k}A\right) + 2n\pi \quad (4.158)$$

che rappresentano i possibili valori dello sfasamento γ della risposta stazionaria rispetto alla forzante.

Il caso elastico può essere dedotto dalla 4.157 ponendo $\frac{dS}{dA} = 0$, come previsto dalla 4.122. In questo caso, la 4.157 fornisce

$$A = 1.56598\frac{k}{8\Lambda_1^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{16} + \mu^2}}. \quad (4.159)$$

Frequenza della forzante sulla risonanza elastica: $\lambda = 0$

Appare di un certo interesse approfondire, come già fatto per la trave semplicemente appoggiata, lo studio delle 4.155, 4.156 nel caso in cui la frequenza della forzante coincida con quella del primo modo di vibrare elastico. A tal fine, posto $\lambda = 0$ nella 4.157, si ottiene

$$\left(\frac{dS}{dA}\right)^2 + \mu^2 A^2 \pi^2 = 2.542\frac{k^2\pi^2}{64\Lambda_1^4} \quad (4.160)$$

La soluzione della 4.160 porta alla determinazione dell'ampiezza di oscillazione $A(\alpha, k, \mu)$; essa, noti i parametri α, k, μ , e nell'ipotesi che sia $A > 0$, risulta univocamente determinata.

Nel caso elastico, posto $\lambda = 0$ in 4.159, si ottiene:

$$A = 1.56598\frac{k}{8\mu\Lambda_1^2}, \quad (4.161)$$

da cui, posto $A = A_{el}$, è possibile ricavare il valore dell'intensità k_{el} della forzante che determina il raggiungimento dell'ampiezza limite elastica,

$$k_{el} = \frac{8}{1.56598}\alpha\mu = \frac{2}{1.56598}\zeta\alpha\Lambda_1^2. \quad (4.162)$$

Capitolo 4

Per $k \leq k_{el}$, la trave rimane interamente in campo elastico e l'ampiezza delle oscillazioni può essere ricavata dall'espressione 4.161. Per $k > k_{el}$, invece, la trave si fessura ed oscilla con ampiezza determinabile dalla 4.160.

Confrontando l'espressione 4.162 relativa alla mensola con la corrispondente 4.82 ottenuta per la trave appoggiata si ricava che, a parità di coefficiente di smorzamento ζ e di curvatura limite elastica α , il carico limite elastico per una mensola è circa il 30% di quello per la trave appoggiata.

In figura 4.31 è riportato l'andamento della funzione $A(k)$, al variare di α . Anche in questo caso, come per la trave appoggiata, si osserva un forte abbattimento dei valori delle ampiezze all'aumentare del carico; inoltre, i raccordi della soluzione nonlineare col caso elastico sono di classe C^1 .

Posto $\lambda = 0$, il valore dello sfasamento della risposta nonlineare rispetto alla forzante può essere dedotto dalle 4.158 con l'aiuto di 4.151

$$\beta = -\arcsin\left(\frac{2\Lambda_1^4}{1.56598} \frac{\zeta A}{k}\right) + 2n\pi, \quad \beta = -\pi + \arcsin\left(\frac{2\Lambda_1^4}{1.56598} \frac{\zeta A}{k}\right) + 2n\pi. \quad (4.163)$$

Inserendo nella 4.163 le espressioni 4.108, 4.162 di A_{el} e k_{el} , si ottiene, come per la trave semplicemente appoggiata,

$$\beta_{el} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad \text{per ogni } \mu. \quad (4.164)$$

In figura 4.32 sono riportate le due soluzioni semplici delle 4.163 al variare di k ed α . Anche in questo caso, il raccordo con la soluzione elastica (valida per $k \leq k_{el}$) è di classe C^1 .

Dalle figure 4.31, 4.32 si deduce che all'aumentare di α , sia i valori delle ampiezze A che quelli dello sfasamento β tendono puntualmente ai valori elastici.

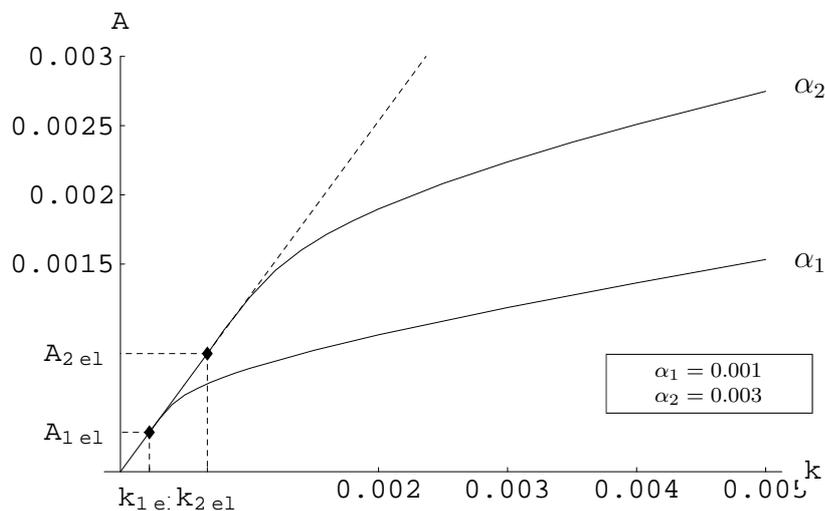


Figura 4.31. L'andamento dell'ampiezza dell'oscillazione con l'intensità della forzante per $\zeta = 0.05$, $\lambda = 0$ e per diversi valori di α . La retta rappresenta il caso elastico.

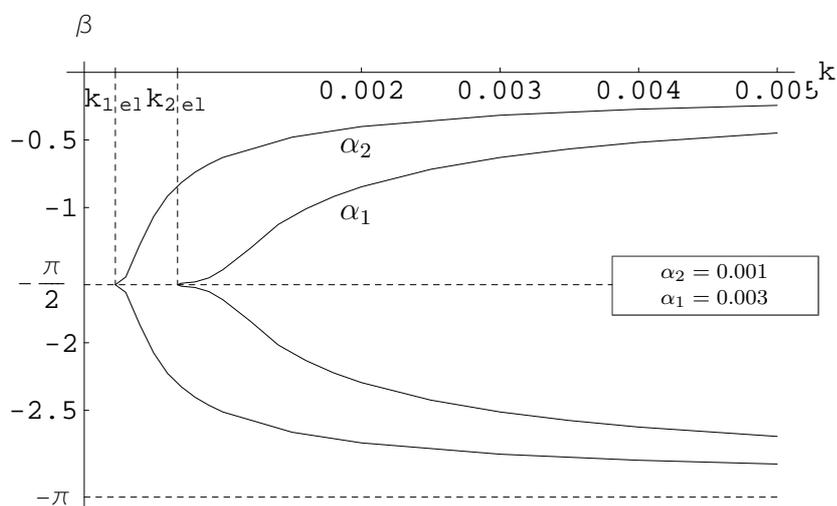


Figura 4.32. L'andamento dello sfasamento β con l'intensità k della forzante per diversi valori di α . Il grafico è disegnato per $\zeta = 0.05$ e $\lambda = 0$.

4.3 L'equazione per il materiale non resistente a trazione e l'equazione cubica a confronto

Nel presente paragrafo si procede al confronto fra alcune soluzioni ottenute in questo capitolo impiegando l'equazione costitutiva 1.10 e le corrispondenti ottenute nel capitolo 3 con l'equazione cubica 3.2.

A tale scopo sarà considerata l'equazione costitutiva 1.10, per due distinti valori della curvatura limite elastica – $\alpha = 0.001$ e $\alpha = 0.003$ – e l'equazione cubica, per due valori del parametro σ scelti opportunamente.

Ricordando le regole 3.6 e 3.8 e definiti

$$\bar{m} = \frac{ML}{\rho b h c^2}, \quad \bar{\chi} = \chi L, \quad (4.165)$$

è possibile scrivere la forma adimensionale delle equazioni costitutive 1.10 e 3.2, ottenendo rispettivamente

$$\bar{m} = \bar{\chi} \quad \text{per } |\bar{\chi}| \leq \alpha, \quad (4.166a)$$

$$\bar{m} = \alpha \text{Sign}(\bar{\chi}) \left(3 - 2 \sqrt{\frac{\alpha}{|\bar{\chi}|}} \right) \quad \text{per } |\bar{\chi}| > \alpha, \quad (4.166b)$$

e

$$\bar{m} = \bar{\chi} (1 - \sigma \bar{\chi}^2). \quad (4.167)$$

Si ricorda, in vista dei risultati ottenuti con la 4.167, le limitazioni 3.39 per la trave appoggiata e 3.161 per la mensola sul valore dell'ampiezza delle oscillazioni, oltre il quale la trattazione perde di validità.

In figura 4.33 sono rappresentate le 4.166, 4.167, disegnate per le due coppie di valori dei parametri α e σ che verranno considerate, ossia

$$\alpha_1 = 0.001, \quad \sigma_1 = 50000, \quad (4.168a)$$

$$\alpha_3 = 0.003, \quad \sigma_3 = 6000. \quad (4.168b)$$

Nel seguito vengono confrontati i risultati principali ottenuti per le oscillazioni libere e per le oscillazioni forzate nel caso, ritenuto particolarmente significativo, di forzante avente frequenza coincidente col primo modo di vibrare elastico.

Il confronto viene fatto sia per la trave semplicemente appoggiata, sia per la mensola. Per entrambi i casi si sceglie un coefficiente di smorzamento modale del 5%.

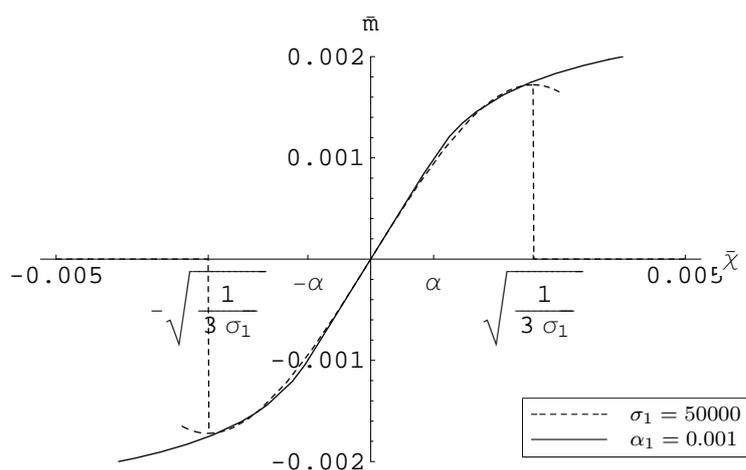


Figura 4.33(a).

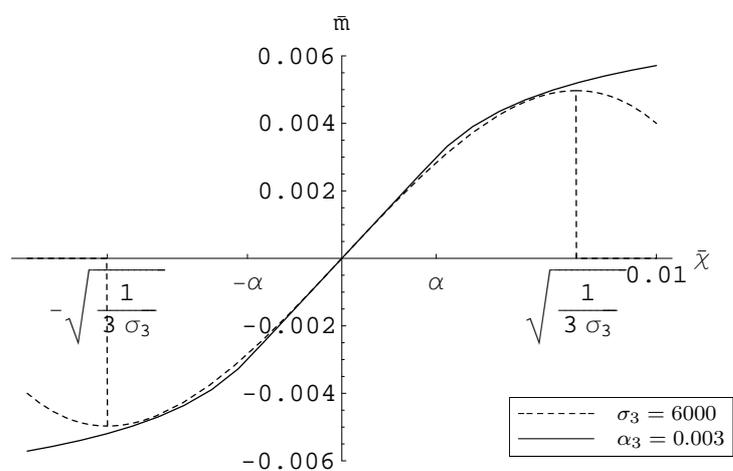


Figura 4.33(b).

Figura 4.33. L'equazione costitutiva 4.166 approssimata con la parabola cubica 4.167.

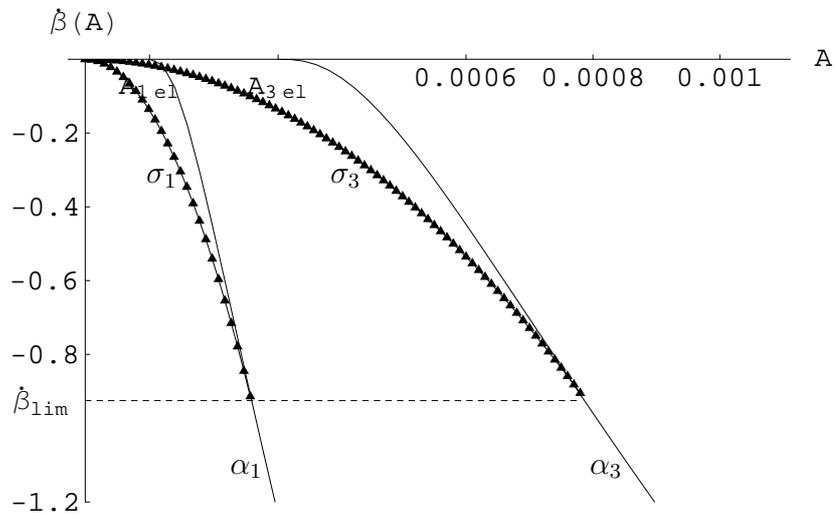


Figura 4.34. Le funzioni $\dot{\beta}(A)$ per la trave appoggiata. La linea punteggiata rappresenta le soluzioni ottenute dall'equazione cubica.

4.3.1 La trave semplicemente appoggiata

Oscillazioni libere

In figura 4.34 si confrontano i valori della funzione $\dot{\beta}(A)$ ottenuti dalla 4.53 con quelli approssimati ottenuti dalla 3.27 . Il confronto viene effettuato per i valori di α e σ indicati dalle 4.168.

E' possibile osservare in figura che, nel tratto iniziale, i valori ottenuti con l'equazione cubica si discostano in maniera abbastanza significativa da quelli ottenuti con la 4.166, raccordandosi ad essi soltanto per valori maggiori delle ampiezze.

Questo fenomeno è facilmente spiegabile quando si ricordi che l'equazione costitutiva 4.166 si discosta da quella elastica lineare soltanto per $\chi > \alpha$, mentre l'equazione cubica 4.167 se ne discosta fin dall'origine.

E' interessante notare che, in virtù della limitazione 3.39, le curve $\dot{\beta}$ ottenute dall'equazione cubica perdono di validità per $\dot{\beta} > \dot{\beta}_{lim}$, con

$$\dot{\beta}_{lim} = -\frac{3}{32}\pi^2, \quad (4.169)$$

un valore indipendente da σ .

Oscillazioni forzate in risonanza primaria ($\lambda = 0$)

Nella figura 4.35 viene mostrato un confronto, per i valori dei parametri dati da 4.168 ed al variare dell'intensità k della forzante, fra le ampiezze in fase

stazionaria ricavate dall'equazione 4.80 e le corrispondenti approssimate ricavate dalla 3.132 per $\lambda = 0$.

Sono indicati con k_{iel} i valori dell'intensità della forzante definiti dalla relazione 4.82, con k_{ilim} i valori estremi dell'intervallo su cui è definita la 3.132, in virtù della limitazione 3.39.

Ovviamente, le curve ottenute con l'equazione cubica presentano maggiori caratteristiche di regolarità rispetto a quelle ottenute per il m.n.r.t.; inoltre, coerentemente con quanto mostrato dalla figura 4.34 per la funzione $\dot{\beta}$, il sistema cubico mostra un comportamento *softening* più marcato del corrispondente sistema non resistente a trazione. Tuttavia, la coincidenza fra i dati si mostra in questo caso più che soddisfacente. Rimane, per l'impiego dell'equazione cubica, la limitazione imposta dalla 3.39, che ne limita l'utilizzo ad un intorno piuttosto ristretto della soluzione elastica.

In figura 4.36 vengono messe a confronto, invece, le funzioni $\beta(k)$ in fase stazionaria ricavate dall'equazione 4.83 e le corrispondenti ricavate dalla 3.134.

Anche in questo caso, come per le funzioni $\dot{\beta}$ di figura 4.34, le curve ottenute con la cubica si discostano immediatamente dal caso elastico lineare, raccordandosi nell'ultimo tratto alla soluzione ottenuta per il m.n.r.t.

4.3.2 La mensola

Oscillazioni libere

In figura 4.37 si confrontano i valori della funzione $\dot{\beta}(A)$ ottenuti dalla 4.135 per il m.n.r.t con quelli ottenuti dalla 3.160 per la cubica. Il confronto viene effettuato per i valori di α e σ indicati dalle 4.168.

Valgono le stesse osservazioni già illustrate nel paragrafo 4.3.1 per la trave appoggiata, avendo posto, in questo caso,

$$\dot{\beta}_{lim} = -\frac{0.58716}{8}\Lambda_1^2. \quad (4.170)$$

Oscillazioni forzate in risonanza primaria ($\lambda = 0$)

Nella figura 4.38 viene mostrato un confronto, per i valori 4.168 dei parametri ed al variare dell'intensità k della forzante, fra le ampiezze in fase stazionaria ricavate dall'equazione 4.160 per il m.n.r.t e le corrispondenti ricavate per la cubica, ponendo $\lambda = 0$ nella 3.167 .

In figura 4.39 vengono invece messe a confronto le funzioni $\beta(k)$ in fase stazionaria ricavate dall'equazione 4.163 per il m.n.r.t. e le corrispondenti ricavate dalla prima delle 3.166 per la cubica.

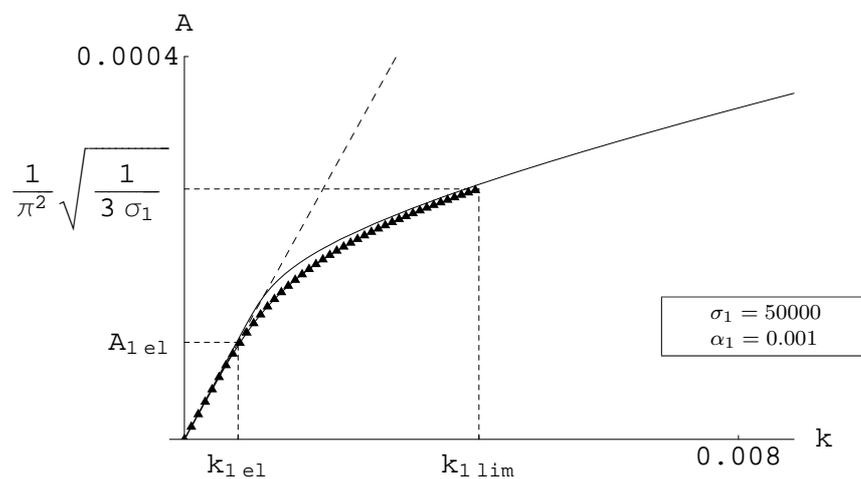


Figura 4.35(a).

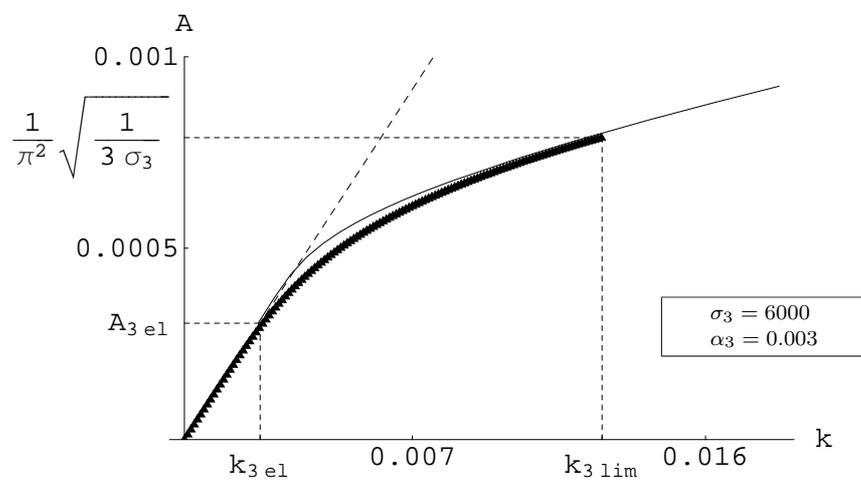


Figura 4.35(b).

Figura 4.35. Le funzioni $A(k)$ in fase stazionaria disegnate per la trave appoggiata. Le linee punteggiate rappresentano le soluzioni ottenute dall'equazione cubica.

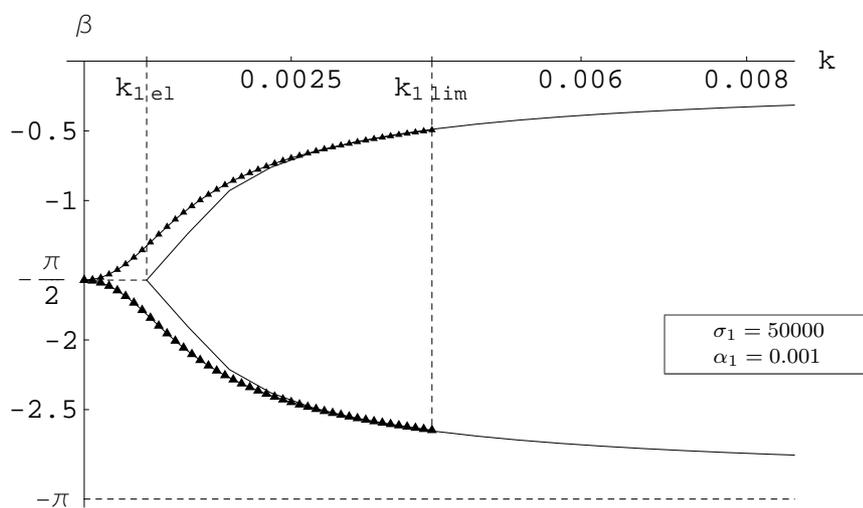


Figura 4.36(a).

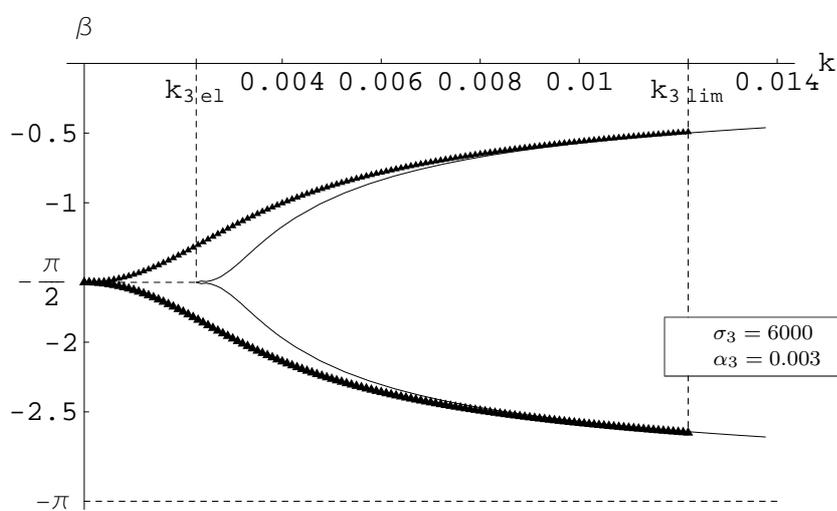


Figura 4.36(b).

Figura 4.36. Le funzioni $\beta(k)$ in fase stazionaria disegnate per la trave appoggiata. Le linee punteggiate rappresentano le soluzioni ottenute dall'equazione cubica.

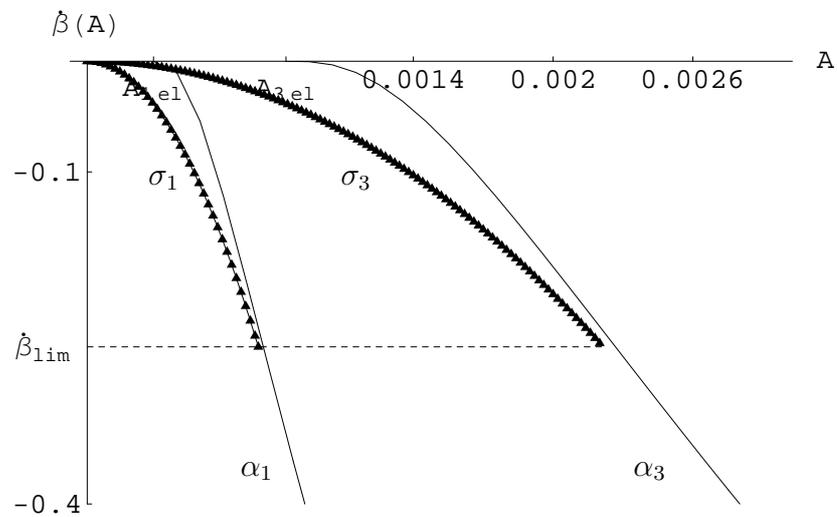


Figura 4.37. Le funzioni $\dot{\beta}(A)$ per la mensola. La linea punteggiata rappresenta le soluzioni ottenute dall'equazione cubica.

Ancora una volta, sono indicati con k_{iel} i valori dell'intensità della forzante definiti dalla relazione 4.162, con k_{ilim} i valori estremi dell'intervallo su cui è definita la 3.167, in virtù della limitazione 3.39.

Anche nel caso della mensola è possibile osservare un'ottima corrispondenza fra le ampiezze ottenute dall'equazione cubica e quelle ottenute dall'equazione per il m.n.r.t, sebbene limitatamente all'intervallo di esistenza fornito dalla 3.39.

Come nel caso della trave appoggiata, la differenza tra i valori dello sfasamento ottenuti con le due equazioni costitutive è più significativa, soprattutto per piccoli valori della curvatura.

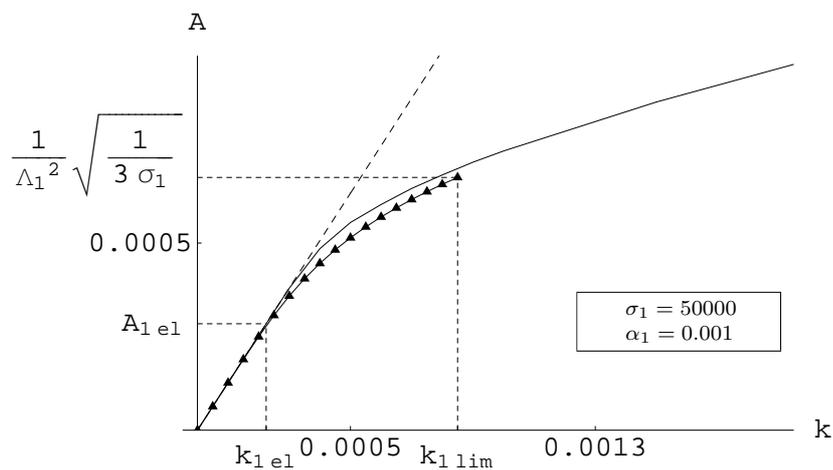


Figura 4.38(a).

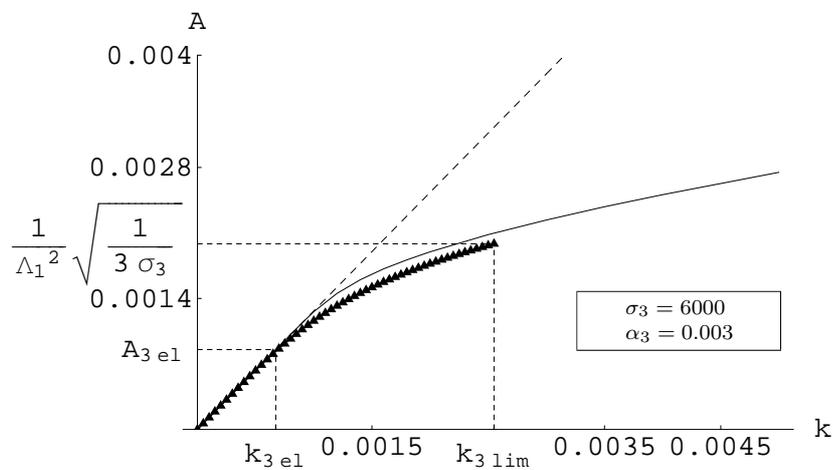


Figura 4.38(b).

Figura 4.38. Le funzioni $A(k)$ in fase stazionaria disegnate per la mensola. Le linee punteggiate rappresentano le soluzioni ottenute dall'equazione cubica.

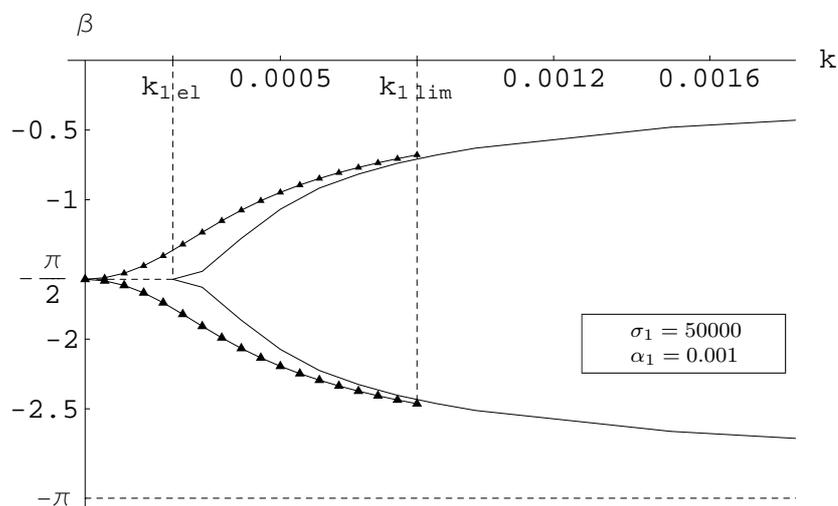


Figura 4.39(a).

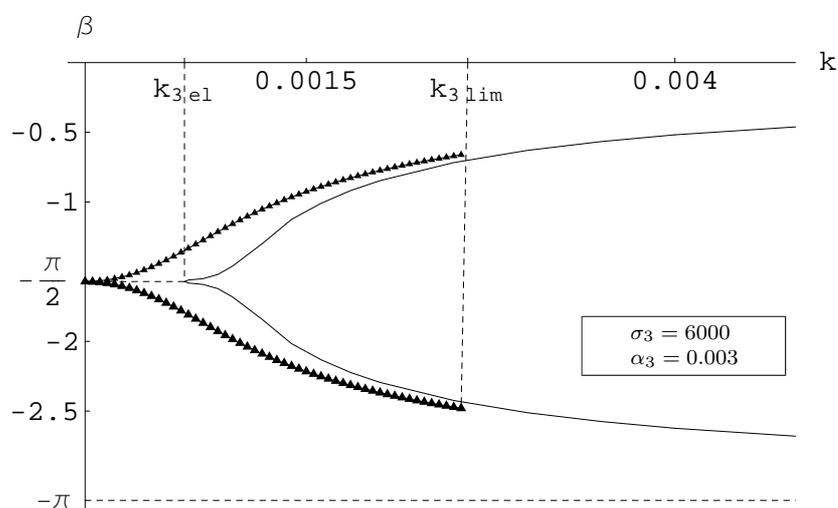


Figura 4.39(b).

Figura 4.39. Le funzioni $\beta(k)$ in fase stazionaria disegnate per la mensola. Le linee punteggiate rappresentano le soluzioni ottenute dall'equazione cubica.

Capitolo 5

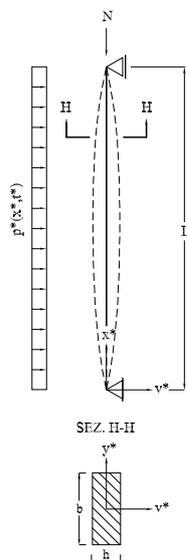
Applicazioni

In questo capitolo vengono proposte alcune applicazioni dei risultati ottenuti nel capitolo 4 per una trave costituita da materiale non resistente a trazione e nel capitolo 3 per l'equazione di tipo cubico.

Le soluzioni analitiche sono confrontate con le corrispondenti soluzioni numeriche, ottenute impiegando il programma agli elementi finiti descritto in dettaglio in [32, 41] e l'equazione costitutiva per materiale non resistente a trazione.

In particolare, è stato analizzato un pannello murario incernierato alle estremità, sollecitato da una forza normale costante lungo l'asse e da una forzante sinusoidale di frequenza coincidente con la fondamentale elastica, agente nella direzione di minima inerzia della sezione. Inoltre, si sono studiate le oscillazioni libere del pannello indotte da una deformata iniziale di tipo sinusoidale.

I dati del problema sono i seguenti:



$L = 5 \text{ m}$	luce della trave;
$h = 0.4 \text{ m}$	altezza della sezione;
$b = 1 \text{ m}$	larghezza della sezione;
$\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$	densità del materiale;
$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	mod. el. del materiale;
$\zeta = 0.05$	coeff. di smorz. viscoso;
$N = 60000 \text{ N}$	sforzo normale.

Figura 5.1.

Capitolo 5

Inoltre, si definiscono i parametri

$\lambda = 12$	snellezza della trave, definita secondo [14];
$T_1 = 0.107$ s	periodo proprio fond. elastico;
$\omega_1 = 58.83$ rad/s	pulsazione fond. elastica;
$\omega_D = 58.76$ rad/s	pulsazione fond. elastica smorzata;
$c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho bh}} = 149$ m ² /s	costante elastica della trave;
$\alpha_{el} = \frac{2N}{Ebh^2} = 0.00025$ m ⁻¹	curvatura limite elastica
$\sigma^* = 800000$ m ²	parametro equazione cubica.

5.1 Oscillazioni forzate

La trave è sollecitata da una forzante di espressione

$$p^*(x^*, t^*) = k^* \sin(\omega_1 t^*).$$

La risposta elastica lineare del sistema è descritta con la seguente espressione approssimata [7, 38]

$$v^*(x^*, t^*) \simeq \sin\left(\frac{\pi}{L}x^*\right) \{ [B \cos(\omega_D t^*) + C \sin(\omega_D t^*)] e^{\zeta \omega_1 t^*} + B \sin(\omega_1 t^* - \frac{\pi}{2}) \}, \quad (5.1)$$

dove

$$B = \frac{2k^*}{\zeta \pi \omega_1^2 \rho b h}, \quad C = \frac{2k^*}{\pi \omega_1^2 \rho b h} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (5.2)$$

La risposta nonlineare è descritta, invece, dall'espressione

$$v^*(x^*, t^*) \simeq [A^*(t) \sin(\omega_1 t^* + \beta(t))] \sin\left(\frac{\pi}{L}x^*\right), \quad (5.3)$$

dove $A^*(t^*)$ e $\beta(t^*)$ sono parametri da calcolare mediante le 3.126 per l'equazione cubica, 4.75 e 4.76 per il materiale non resistente a trazione.

Si ricorda che le 4.75 e 4.76 forniscono i valori dei parametri A^* e β limitatamente al caso stazionario, mentre la risoluzione delle 3.126 consente di cogliere anche la fase transitoria dell'oscillazione.

In figura 5.2 sono riportate le equazioni costitutive relative alle sezioni della trave considerata. E' indicata a tratto continuo l'equazione per il m.n.r.t., con il tratteggio la corrispondente equazione cubica.

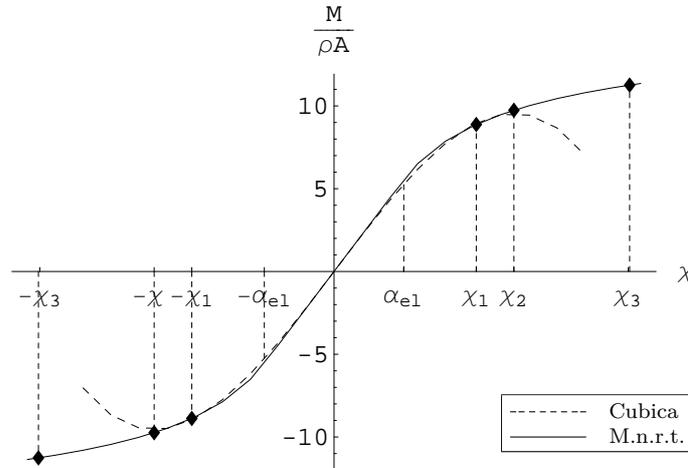


Figura 5.2. Equazioni costitutive per le sezioni della trave di figura 5.1.

5.1.1 Esempio 1

Si considera $k^* = 350 \text{ N/m}$.

Equazione costitutiva per materiale non resistente a trazione

Per la condizione di carico considerata si ricava dalle 4.75 e 4.76

$$A^* = 0.00128 \text{ m} \quad \beta = (-\pi + 0.80134) \text{ rad.} \quad (5.4)$$

Sostituendo le 5.4 in 5.3, si ottiene la risposta nonlineare approssimata del sistema, valida in fase stazionaria.

E' possibile, inoltre, ricavare i valori massimi della curvatura e della tensione normale di compressione attinti lungo la trave durante l'oscillazione

$$\begin{aligned} \chi_{max} &\simeq \frac{A^* \pi^2}{L^*} = 0.00051 \text{ m}^{-1} = \chi_1 \\ \sigma_{cmax} &\simeq -428019 \text{ N/m}^2 \simeq -4.28 \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Si può notare che la curvatura massima è pari a circa 2 volte quella limite elastica. Il suo valore, indicato con la notazione χ_1 , è riportato in figura 5.2.

In figura 5.3 è riportato lo spostamento trasversale della sezione di mezzeria rispetto all'asse della trave, mettendo a confronto le soluzioni analitica, numerica ed elastica lineare.

Dopo circa un secondo dall'inizio del moto, la figura mostra l'instaurarsi di oscillazioni stazionarie, con la sovrapposizione praticamente perfetta della soluzione analitica ai dati numerici; inoltre, vengono evidenziate

Capitolo 5

forti differenze rispetto al caso elastico, con un consistente abbattimento dell'ampiezza delle oscillazioni.

Equazione costitutiva cubica

Dalle 3.126 è possibile ricavare per via numerica le funzioni $A^*(t^*)$ e $\beta(t^*)$ che, introdotte nelle 5.3, forniscono l'espressione completa delle oscillazioni dei punti della trave.

Per la fase stazionaria si ricavano i seguenti valori dei parametri

$$A^* = 0.00123 \text{ m} \qquad \beta = -2.385 \text{ rad}, \qquad (5.6)$$

molto vicini a quelli forniti dalle 5.4.

In figura 5.4 è riportato lo spostamento trasversale della sezione di mezzeria rispetto all'asse della trave, mettendo a confronto le soluzioni analitica "cubica", numerica per il m.n.r.t. ed elastica. Si può notare la coincidenza praticamente perfetta dei risultati nonlineari.

In questo caso, pertanto, è possibile affermare che l'equazione cubica fornisce un'ottima approssimazione del m.n.r.t., consentendo di cogliere in maniera più che soddisfacente anche la fase transitoria del moto.

5.1.2 Esempio 2

Si considera $k^* = 700 \text{ N/m}$.

Equazione costitutiva per materiale non resistente a trazione

Per la condizione di carico considerata si ricava dalle 4.75 e 4.76

$$A^* = 0.00168 \text{ m} \qquad \beta = (-\pi + 0.48892) \text{ rad}. \qquad (5.7)$$

I valori massimi della curvatura e della tensione normale di compressione lungo la trave sono, in questo caso

$$\begin{aligned} \chi_{max} &\simeq \frac{A^* \pi^2}{L^*} = 0.00066 \text{ m}^{-1} = \chi_2 \\ \sigma_{cmax} &\simeq -487964 \text{ N/m}^2 \simeq -4.88 \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned} \qquad (5.8)$$

La curvatura massima raggiunta lungo la trave è pari a circa 2.65 volte quella limite elastica. Il suo valore, indicato con la dicitura χ_2 , è riportato in figura 5.2.

In figura 5.5 è riportato lo spostamento trasversale della sezione di mezzeria rispetto all'asse della trave. Anche in questo caso sono messe a confronto la soluzione analitica, quella ottenuta per via numerica e quella elastica lineare; valgono le stesse osservazioni fatte per il primo esempio.

Equazione costitutiva cubica

Dalle 3.126 è possibile ricavare per via numerica le funzioni $A^*(t^*)$ e $\beta(t^*)$ che, introdotte nelle 5.3, forniscono l'espressione completa delle oscillazioni dei punti della trave.

Per la fase stazionaria si ricavano i seguenti valori dei parametri

$$A^* = 0.00165 \text{ m} \qquad \beta = -2.66089 \text{ rad}, \qquad (5.9)$$

molto vicini a quelli forniti dalle 5.7.

In figura 5.6 è riportato lo spostamento trasversale della sezione di mezzeria rispetto all'asse della trave, mettendo a confronto le soluzioni analitica "cubica", numerica per il m.n.r.t. ed elastica; valgono le stesse osservazioni fatte per il primo esempio.

Come è possibile dedurre dalla figura 5.2, il valore massimo χ_2 attinto durante l'oscillazione è praticamente coincidente con quello limite ammissibile per la trattazione cubica. Pertanto, valori maggiori dell'intensità k^* della forzante, come quelli presentati nell'esempio seguente, potranno essere studiati soltanto con l'impiego dell'equazione per materiali non resistenti a trazione.

5.1.3 Esempio 3

Si considera $k^* = 2000 \text{ N/m}$.

Equazione costitutiva per materiale non resistente a trazione

Per la condizione di carico considerata si ricava dalle 4.75 e 4.76

$$A^* = 0.00267 \text{ m} \qquad \beta = (-\pi + 0.26462) \text{ rad}. \qquad (5.10)$$

I valori massimi della curvatura e della tensione normale di compressione lungo la trave sono, in questo caso,

$$\begin{aligned} \chi_{max} &\simeq \frac{A^* \pi^2}{L^*} = 0.00106 \text{ m}^{-1} = \chi_3 \\ \sigma_{cmax} &\simeq -615176 \text{ N/m}^2 \simeq -6.15 \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned} \qquad (5.11)$$

La curvatura massima raggiunta lungo la trave è pari a circa 5 volte quella limite elastica. Il suo valore, indicato con χ_3 , è riportato in figura 5.2.

In figura 5.7 è mostrato lo spostamento trasversale della sezione di mezzeria rispetto all'asse della trave. Anche in questo caso sono messe a confronto la soluzione analitica, quella ottenuta per via numerica e quella elastica lineare. La figura mostra come, anche per valori piuttosto elevati della

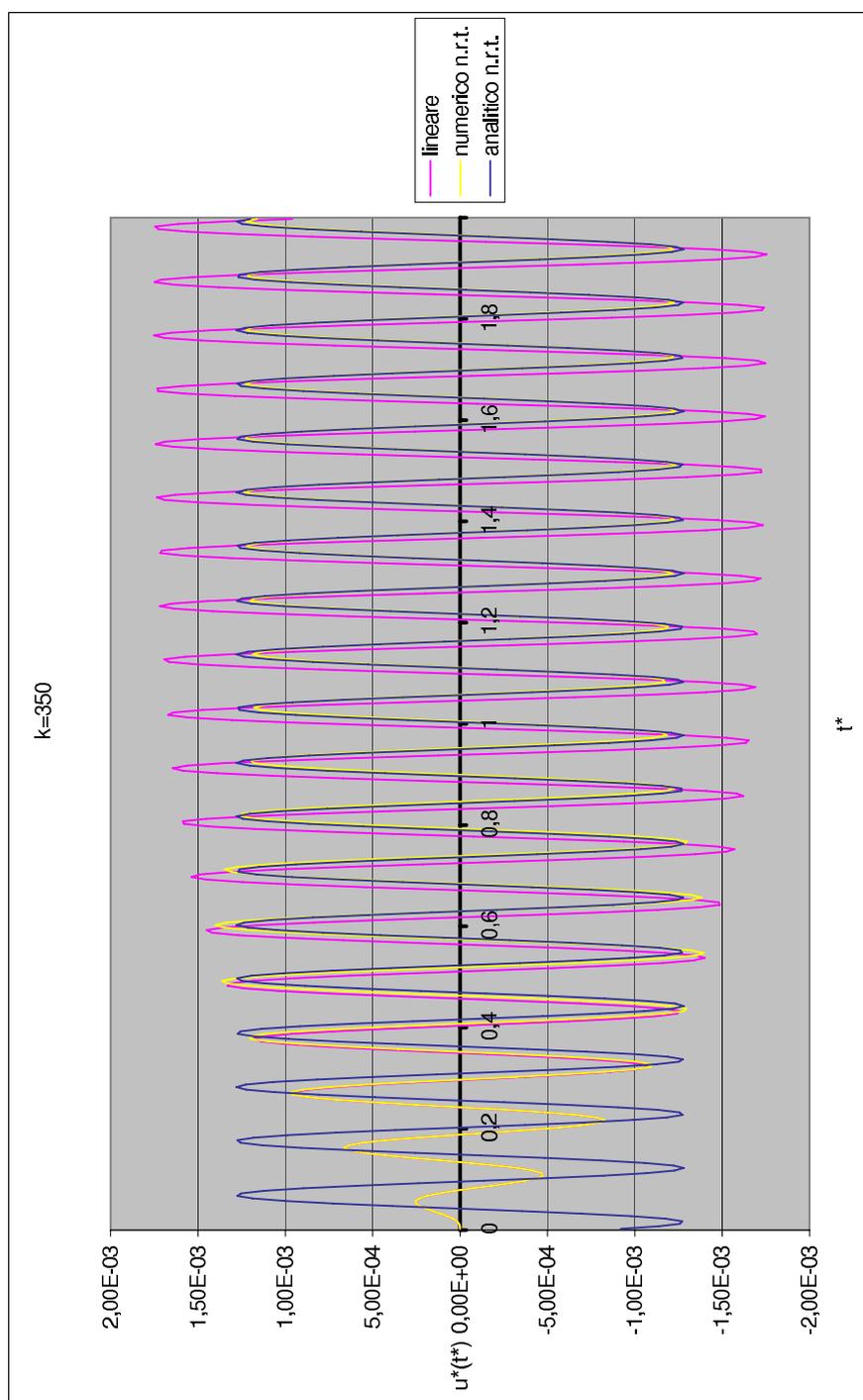


Figura 5.3. *Esempio 1.* Lo spostamento trasversale $u^*(t^*)$ della sezione di mezzeria per $k^* = 350$ N/m: confronto fra i risultati analitici ottenuti con l'eq. cost. per m.n.r.t. e i dati numerici.

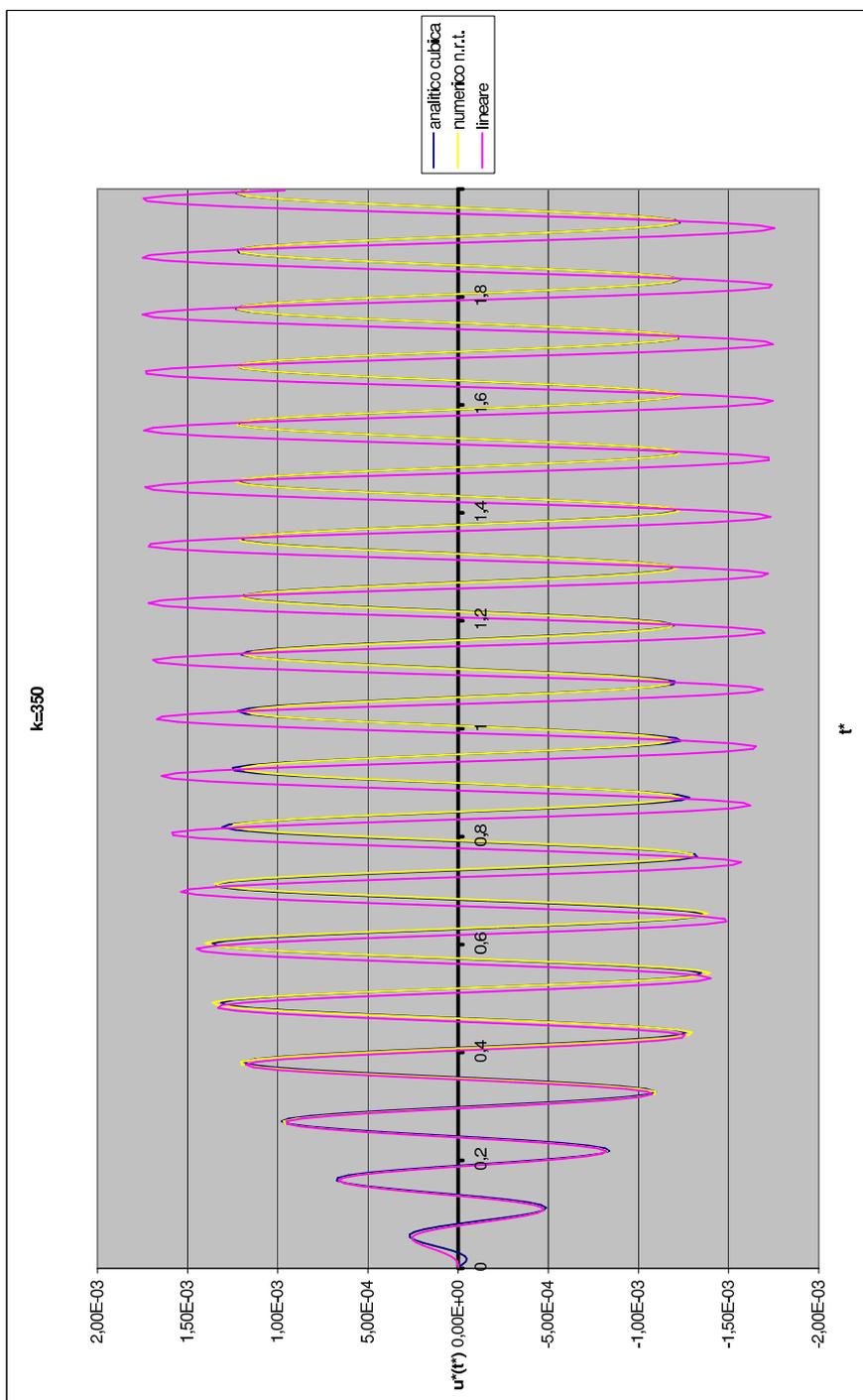


Figura 5.4. *Esempio 1.* Lo spostamento trasversale $u^*(t^*)$ della sezione di mezzeria per $k^* = 350$ N/m: confronto fra i risultati analitici ottenuti con l'eq. cost. cubica e i dati numerici.

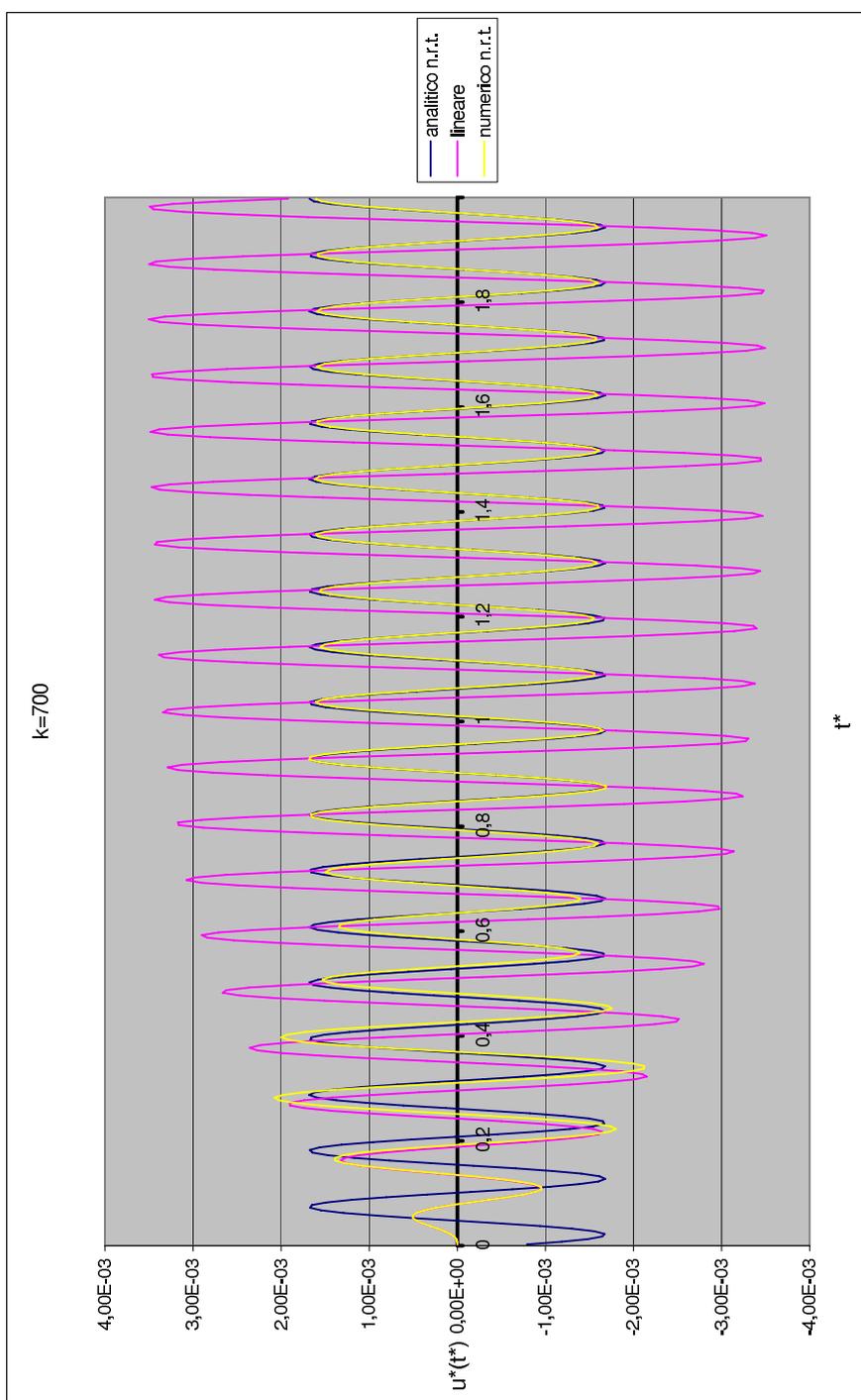


Figura 5.5. *Esempio 2.* Lo spostamento trasversale $u^*(t^*)$ della sezione di mezzeria per $k^* = 700$ N/m: confronto fra i risultati analitici ottenuti con l'eq. cost. per m.n.r.t. e i dati numerici.

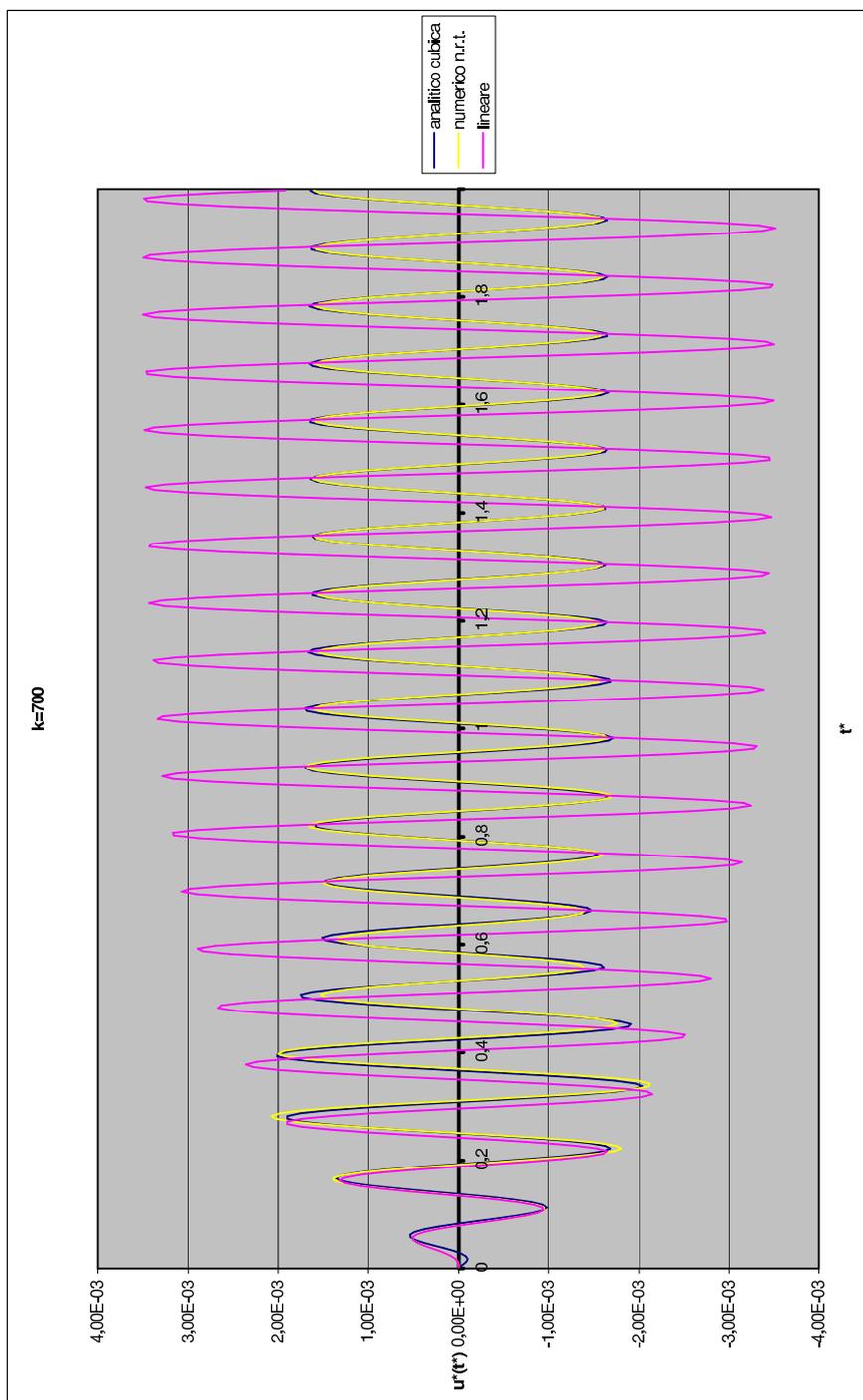


Figura 5.6. *Esempio 2.* Lo spostamento trasversale $u^*(t^*)$ della sezione di mezzeria per $k^* = 700$ N/m: confronto fra i risultati analitici ottenuti con l'eq. cost. cubica e i dati numerici.

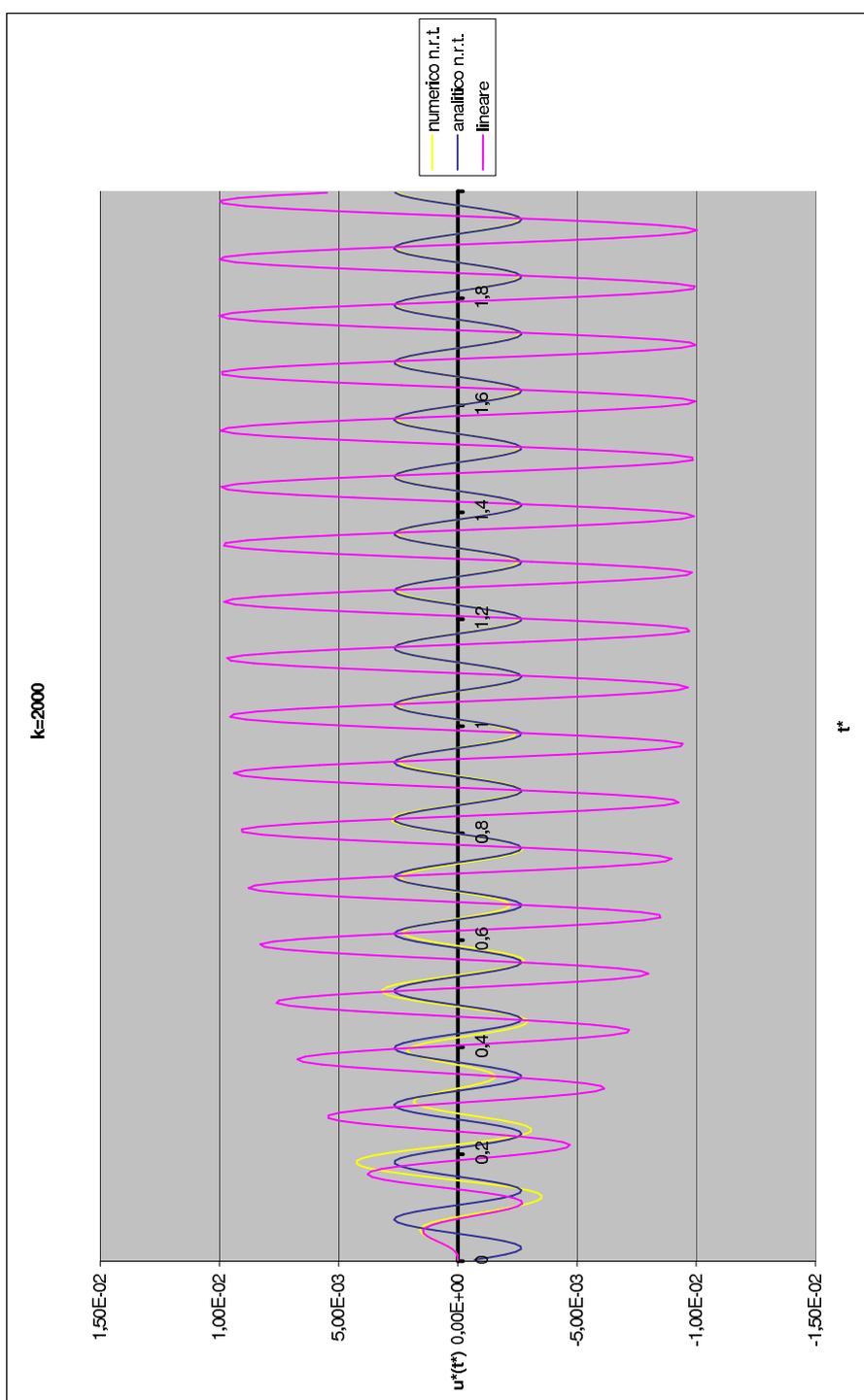


Figura 5.7. *Esempio 3.* Lo spostamento trasversale $u^*(t^*)$ della sezione di mezzeria per $k^* = 2000$ N/m: confronto fra i risultati analitici ottenuti con l'eq. cost. per m.n.r.t. e i dati numerici.

curvatura, laddove l'equazione cubica perde di validità, la soluzione analitica per il m.n.r.t. ricalca perfettamente quella ottenuta per via numerica, sia pur limitatamente alla fase stazionaria.

5.2 Oscillazioni libere

Si imprime alla trave una deformata iniziale di forma

$$v^*(x^*, 0) = A_0^* \sin\left(\frac{\pi}{L}x^*\right). \quad (5.12)$$

La risposta elastica lineare del sistema è descritta dalla seguente espressione [7, 38]

$$v^*(x^*, t^*) = A_0^* \sin\left(\frac{\pi}{L}x^*\right) \exp^{-\zeta\omega_D t^*} \cos(\omega_D t^*). \quad (5.13)$$

La risposta nonlineare approssimata, invece, posto

$$t_{el}^* = -\frac{1}{\zeta\omega_1} \log \frac{A_{el}^*}{A_0^*}, \quad (5.14)$$

assume la forma:

$$\text{se } t^* \leq t_{el}^*, \quad v^*(x^*, t^*) = A_0^* \sin\left(\frac{\pi}{L}x^*\right) \exp^{-\zeta\omega_1 t^*} \cos[\omega_1 t^* + \beta(A_0^*, t^*)], \quad (5.15)$$

$$\text{se } t^* > t_{el}^*, \quad v^*(x^*, t^*) = A_0^* \sin\left(\frac{\pi}{L}x^*\right) \exp^{-\zeta\omega_1 t^*} \cos[\omega_1 t^* + \beta(A_0^*, t_{el}^*)], \quad (5.16)$$

essendo $\beta(A_0^*, t^*)$ fornito dalla 4.63, $\beta(A_0^*, t_{el}^*)$ dalla 4.66 ed A_{el}^* coincidente col valore dell'ampiezza limite elastica della trave.

5.2.1 Esempio 4

Si considera $A_0^*=0.0015$ m.

La 5.14 fornisce

$$t_{el}^* = 0.2932 \text{ sec}, \quad (5.17)$$

che rappresenta l'istante a partire dal quale la trave rientra in campo elastico.

Risolviendo le 4.63 e 4.66 ed introducendo i valori ottenuti per la funzione $\beta(A_0^*, t^*)$ all'interno delle 5.15 e 5.16, si ottiene la risposta nonlineare del sistema.

Capitolo 5

In figura 5.8 è riportato lo spostamento trasversale della sezione di mezzeria rispetto all'asse della trave; sono messe a confronto la soluzione analitica, quella numerica e quella elastica lineare.

Come mostrato dalla figura, la coincidenza fra soluzioni analitica e numerica è più che soddisfacente. Inoltre, come previsto dalla trattazione analitica, le differenze fra caso lineare e caso nonlineare sono poco marcate.

Anche in questo caso, si è ritenuto poco significativo riportare i dati ottenuti con l'equazione cubica, in quanto praticamente coincidenti con quelli ottenuti impiegando l'equazione per m.n.r.t.

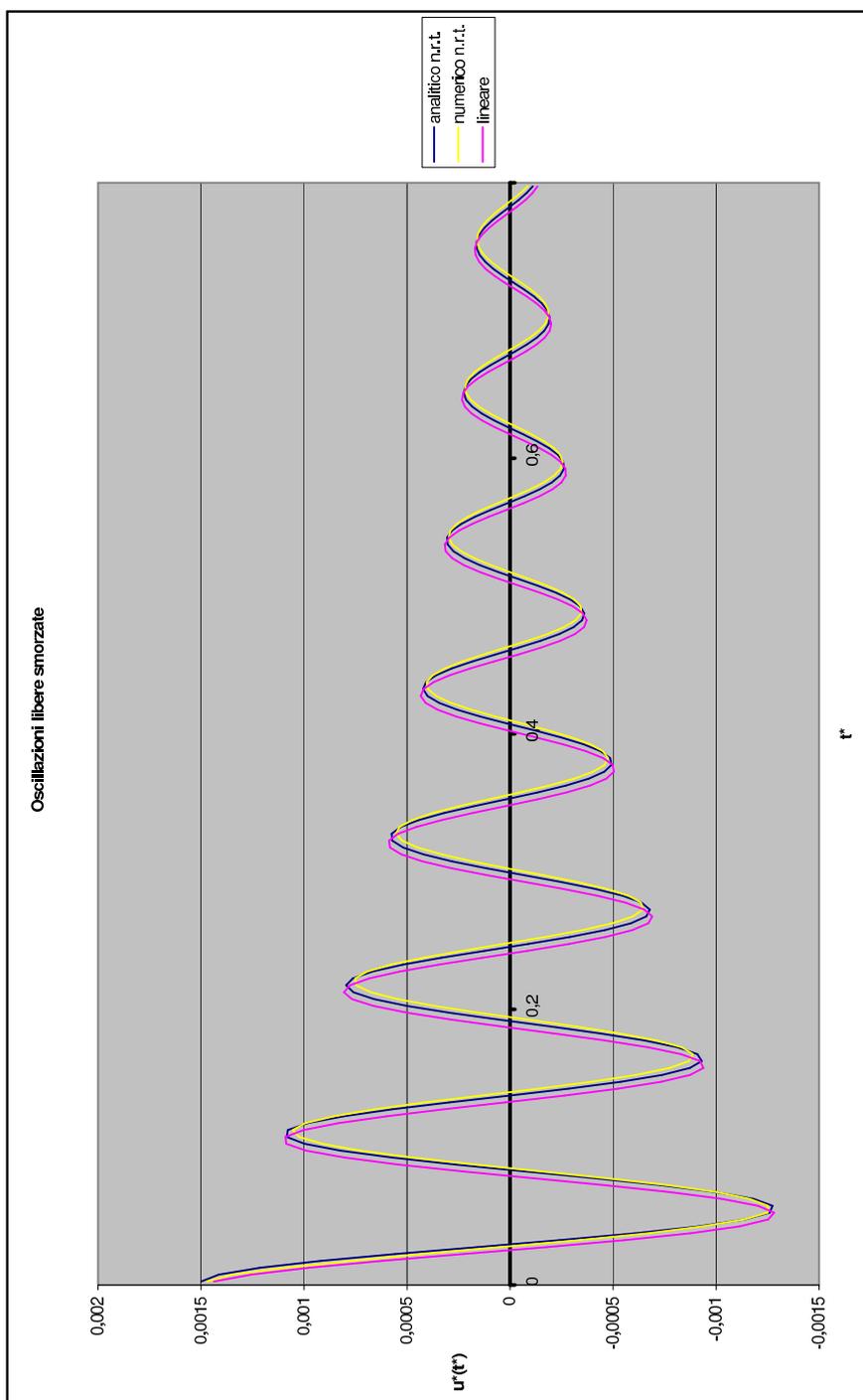


Figura 5.8. *Esempio 5.* Lo spostamento trasversale $u^*(t^*)$ della sezione di mezzeria per $A_0^* = 0.0015$ m: oscillazioni libere smorzate.

Capitolo 6

Considerazioni conclusive

In questa tesi si sono studiate le vibrazioni flessionali libere e forzate di una trave ad asse verticale, di sezione rettangolare, costituita da materiale non resistente a trazione in direzione longitudinale e con infinita resistenza a compressione, soggetta ad uno sforzo normale costante lungo l'asse. La trave è stata studiata per due differenti condizioni di vincolo, semplice appoggio e mensola. Il comportamento nonlineare del materiale è descritto da un'equazione costitutiva che lega, noto lo sforzo normale agente sulla sezione, il momento flettente alla curvatura. Di tale equazione è stata proposta anche un'espressione approssimata, valida in un intorno della curvatura limite elastica, descritta da un polinomio di terzo grado.

Il problema, che presenta notevoli difficoltà analitiche, è stato affrontato con l'impiego di tecniche perturbative, introducendo opportune ipotesi sulla forma degli spostamenti trasversali.

In particolare, le soluzioni sono state ottenute sotto l'ipotesi di unimodalità degli spostamenti trasversali, escluso il caso di alcuni semplici risultati ottenuti nel capitolo 3 usando l'equazione costitutiva di tipo cubico.

Questa semplificazione limita fortemente la casistica delle applicazioni; infatti, la trattazione è stata limitata allo studio delle oscillazioni libere, indotte da una deformata iniziale isomorfa al primo modo di vibrare elastico, e delle oscillazioni forzate in risonanza primaria, ossia per una forzante con frequenza vicina a quella del primo modo di vibrare elastico. Per ambedue i casi, grazie anche all'assenza di risonanze interne sul primo modo, lo sviluppo unimodale fornisce soluzioni più che soddisfacenti.

Inoltre, la trattazione è stata condotta nell'ipotesi di piccoli spostamenti trasversali, che consente di trascurare l'effetto dello sforzo normale sull'equilibrio dinamico della trave.

L'ampiezza delle oscillazioni è stata scelta come parametro di piccozza nei calcoli condotti con l'equazione cubica usando il classico metodo delle scale multiple, basato su alcuni sviluppi in serie delle equazioni del moto e sull'imposizione di opportune condizioni che garantiscono l'annullamento dei termini secolari.

Capitolo 6

L'utilizzo dell'equazione costitutiva per materiali non resistenti a trazione, invece, è risultata notevolmente più complessa, a causa del tipo di funzioni in gioco e del fatto che il legame costitutivo ha espressioni diverse se la risultante delle tensioni normali sulla sezione della trave si trova o meno all'interno del nocciolo centrale d'inerzia.

Per risolvere tali difficoltà si è impostato in problema in forma variazionale ed impiegato tecniche di averaging sullo spazio – la luce della trave – e nel tempo – il periodo proprio fondamentale elastico –, secondo il metodo noto come “della Lagrangiana media”. In particolare, si è tenuto conto della propagazione delle regioni fessurate lungo la trave ed introdotta una funzione che fornisce la posizione nel tempo delle sezioni in cui la curvatura attinge il valore limite elastico.

Nel seguito si riassumono sinteticamente i risultati ottenuti con le due equazioni costitutive.

E' stata individuata una forma generale della soluzione approssimata e troncata al primo ordine, fornita dall'espressione, opportunamente adimensionalizzata

$$v(x, t) = A(t)\phi(x)\sin(\omega t + \beta(t)), \quad (6.1)$$

dove v rappresenta il rapporto fra lo spostamento trasversale dei punti della trave e la luce, ϕ è una funzione coincidente col primo modo di vibrare elastico della struttura e ω è la pulsazione fondamentale elastica.

I parametri A e β sono funzioni variabili lentamente nel tempo e lo studio delle equazioni che descrivono tali variazioni, dette “di modulazione”, costituisce l'obiettivo principale del lavoro. Se la forzante è descritta dall'espressione, opportunamente adimensionalizzata,

$$p(x, t) = k \sin((\omega + \lambda)t), \quad (6.2)$$

dove $\lambda = O(1)$ è il parametro che esprime la vicinanza della frequenza della forzante a quella fondamentale elastica, le equazioni di modulazione assumono la seguente forma generale

$$C_1 \frac{d\Theta}{dA} + A(\lambda - \dot{\gamma}) + C_2 k \cos \gamma = 0, \quad (6.3a)$$

$$\dot{A} + C_3 \mu A - C_4 k \sin \gamma = 0, \quad (6.3b)$$

con $\gamma = \lambda t - \beta$ lo sfasamento della risposta nonlineare rispetto alla forzante.

I valori della funzione Θ e dei coefficienti C_1, C_2, C_3 e C_4 si possono ricavare dalle equazioni di modulazione descritte nel capitolo 3 per l'equazione cubica e nel capitolo 4 per il materiale non resistente a trazione.

La funzione Θ , dipendente da A e dallo sforzo normale agente sulla sezione, assume per l'equazione cubica una forma particolarmente semplice, che, assegnate le condizioni iniziali, consente di risolvere facilmente il sistema per via numerica. In particolare, è stata ricavata dalle 6.3 l'espressione analitica della curva che lega l'ampiezza delle oscillazioni in fase stazionaria alla frequenza della forzante.

Al contrario, nel caso di materiale non resistente a trazione, la funzione Θ assume una forma particolarmente complicata; essa, infatti, è data dalla somma di più termini, alcuni dei quali costituiti da integrali ellittici o comunque non risolvibili in forma chiusa. Comunque, anche in questo caso è stato possibile risolvere le 6.3 per le oscillazioni libere e per le oscillazioni forzate in fase stazionaria, utilizzando alcune procedure numeriche.

Tutti i risultati ottenuti sono forniti in funzione del parametro adimensionale α , dipendente dalla curvatura limite elastica di ciascuna sezione e dalla luce della trave. Tale parametro, fissate le caratteristiche geometriche della trave, può essere interpretato come una misura dello sforzo normale agente sulle sezioni.

Lo studio delle oscillazioni libere può essere dedotto dalle 6.3 ponendo $k = 0$. Per questo caso è stata ricavata la variazione della frequenza fondamentale di oscillazione in funzione dell'ampiezza della deformata iniziale, col tempo e col coefficiente di smorzamento viscoso. Di particolare interesse, dal punto di vista qualitativo, sono le curve che legano la frequenza fondamentale nonlineare della trave ad A , in assenza di smorzamento. Tali curve, parametrizzate in funzione di α , mostrano un rapido abbattimento della frequenza, fino all'annullamento per $A \rightarrow \infty$ ed indicano una rapida diminuzione della rigidezza della trave.

La trattazione si è soffermata, in maniera particolare, sulle oscillazioni indotte da una forzante avente frequenza coincidente con quella fondamentale elastica. I risultati ottenuti sono stati sinteticamente descritti con grafici che rappresentano, al variare di α e del coefficiente di smorzamento viscoso, le funzioni $A(k)$ e $\beta(k)$. Rispetto al caso elastico lineare, che conduce alla risonanza, si evidenzia un notevole abbattimento delle ampiezze di oscillazione ed una forte variazione nello sfasamento della risposta.

Questo comportamento presenta particolare interesse per elementi strutturali aventi periodo fondamentale elastico vicino a quelli statisticamente più amplificati dai terremoti. Infatti, per queste strutture è possibile ipotizzare un certo effetto benefico della nonlinearity che, abbattendone la rigidezza, le allontana dalla condizione risonante.

E' stato effettuato, alla fine del capitolo 4, un confronto fra le soluzioni ottenute con l'equazione del m.n.r.t. e quelle ottenute con la cubica, per entrambe le condizioni di vincolo. Da tale confronto emerge una coincidenza

Capitolo 6

quasi perfetta dei valori delle ampiezze di oscillazione; per quanto riguarda gli sfasamenti, invece, si sono riscontrate differenze più significative, specialmente per piccole ampiezze e bassi valori di k , giustificabili con l'assenza del tratto elastico nell'equazione cubica.

Le soluzioni ottenute per via analitica sono state confrontate con quelle ottenute per via numerica impiegando il programma di calcolo agli elementi finiti proposto in [32, 41]. Nei casi presi in esame, la rispondenza dei dati analitici a quelli numerici si è mostrata più che soddisfacente, come si deduce dai dati riportati.

Si può quindi affermare che l'impiego di tecniche perturbative per lo studio dinamico di travi costituite da materiale non resistente a trazione consente di ottenere alcune importanti soluzioni approssimate.

Tuttavia, l'uso del metodo proposto è ancora limitato da ipotesi restrittive sulla forma degli spostamenti trasversali, delle sollecitazioni esterne e dell'equazione costitutiva impiegata. La generalizzazione di alcune di queste ipotesi può costituire un importante sviluppo futuro della tesi.

In particolare, sembra opportuno superare l'ipotesi di unimodalità della soluzione, in modo da consentire lo studio di condizioni iniziali più generali e di forzanti più complesse. Inoltre, soprattutto in vista di applicazioni a strutture di altezza elevata, come torri o pareti di edifici monumentali, occorre estendere la trattazione a sezioni non rettangolari e studiare l'influenza della non linearità geometrica.

Di particolare interesse appare lo studio per via analitica dell'accoppiamento fra vibrazioni longitudinali e trasversali, responsabile, insieme al valore piuttosto elevato delle tensioni normali tipico degli elementi monodimensionali, della particolare vulnerabilità di queste strutture alle sollecitazioni sussultorie [5, 23].

Rimangono, inoltre, da generalizzare alcune importanti ipotesi sul comportamento del materiale. In particolare, introducendo una limitazione alle tensioni di compressione ammissibili, si potranno meglio modellare gli effetti del degrado dei materiali sulla risposta dinamica. Infine, sono ancora da valutare gli effetti della presenza di una iniziale, sia pur limitata, resistenza a trazione sul quadro fessurativo e sul comportamento dinamico globale .

Riconoscimenti

Si desidera ringraziare l'Ing. Anna De Falco per alcuni utili suggerimenti e l'Arch. Barbara Lorenza Pintucchi per aver fornito i dati numerici riportati nel capitolo 5.

Bibliografia

- [1] S. Bennati and M. Lucchesi. Elementary solutions for equilibrium problems of masonry-like materials. In *Proceedings IV Congress on Unilateral Problems in Structural Mechanics*, volume 101, Capri, 1989.
- [2] B. Calderoni, B. Marone, and M. Pagano. Modelli per la verifica statica degli edifici in muratura in zona sismica. *Ingegneria Sismica*, (3):19–27, 1987.
- [3] I. Calì, A. Ercolano, G. Frunzio, and A. Santini. Un metodo di calcolo per le colonne lapidee. In *Atti del XII Congresso Nazionale AIMETA*, Napoli, 1995.
- [4] S. Casolo. Modellazione dinamica ad elementi rigidi piani di facciate in muratura. In *Atti del XIII Congresso Nazionale AIMETA*, Siena, 1997.
- [5] S. Casolo, F. Doglioni, and V. Petrini. Models for vulnerability analysis of monuments and strengthening criteria. In *Proceedings of the XI European Conference on Earthquake Engineering*, Paris, 1998.
- [6] R. Cerioni, R. Brighenti, and G. Donida. Seismic analysis of masonry towers: the bell-tower of the Parma Cathedral. *Scuola di specializzazione in Costruzioni in c.a. F.lli Pesenti. Studi e ricerche*, 17, 1996.
- [7] R.W. Clough and J. Penzien. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, 1975.
- [8] A. De Falco. *Sul comportamento dei pilastri murari soggetti a forza normale eccentrica*. PhD thesis, Università degli Studi di Firenze, Dipartimento di Costruzioni, XII ciclo.
- [9] G. Del Piero. Constitutive equations and compatibility of external loads for linear elastic masonry-like materials. *Meccanica*, 24:150–162, 1989.

Bibliografia

- [10] S. Di Pasquale. Questioni di meccanica dei solidi non reagenti a trazione. In *Atti del VII Congresso Nazionale AIMETA*, volume 1, pages 251–263, Genova, 1982.
- [11] D.L.Min. delle Infrastrutture e dei Trasporti. 14 Settembre 2005. *Norme tecniche per le costruzioni*. G.U. 23/9/2005, n.222.
- [12] D.L.Min.LL.PP. 16 Gennaio 1996. *Norme tecniche per le costruzioni in zona sismica*. G.U. 5/2/1996, n.29.
- [13] D.L.Min.LL.PP. 2 Luglio 1981. *Normativa per le riparazioni ed il rafforzamento degli edifici danneggiati dal sisma nelle regioni Basilicata, Campania e Puglia*. G.U. 21/7/1981, n.198 supplemento.
- [14] D.L.Min.LL.PP. 20 Novembre 1987. *Norme tecniche per la progettazione, esecuzione e collaudo degli edifici in muratura e per il loro consolidamento*.
- [15] L. Gambarotta and S. Lagomarsino. Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. part i: the mortar joint model and its application. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 26:423–439, 1997.
- [16] L. Gambarotta and S. Lagomarsino. Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. part ii: the continuum model and its application. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 26:441–462, 1997.
- [17] L. Gambarotta and S. Lagomarsino. Analisi sismica non lineare a macroelementi di edifici in muratura. In *Atti del X Congresso Nazionale “L’ingegneria sismica in Italia”*, Potenza – Matera, 2001.
- [18] J. Kevorkian and J. D. Cole. *Perturbation methods in applied mathematics*. Springer–Verlag, New York, 1981.
- [19] N.M. Krylov and Bogoliubov N.N. Introduction to nonlinear mechanics. *Acad. Sci. Ukrain S.S.R.*, 1937. Tradotto da S. Lefschetz, Princeton University Press, N.J., 1947.
- [20] L.D. Landau and E.M. Lifšits. *Meccanica*. Editori Riuniti–Edizioni Mir, 1982.
- [21] M. Lucchesi, C. Padovani, and A. Pagni. A numerical method for solving equilibrium problems of masonry–like materials. *Meccanica*, 29:175–193, 1994.

- [22] M. Lucchesi, C. Padovani, and N. Zani. Masonry-like solids with bounded compressive strength. *Int. J. Solids and Structures*, 33(14):1961–1994, 1996.
- [23] M. Lucchesi and B. Pintucchi. Coupled longitudinal and transverse vibrations of beams made of no-tension material. In *VII International Seminar on Structural Masonry for Developing Countries*, Belo Horizonte, Brazil, September 2002.
- [24] M. Lucchesi and B. Pintucchi. A model for dynamic analysis of slender towers made of no-tension material. In *Fifth National Conference on Earthquake Engineering*, Istanbul, Turkey, May 2003.
- [25] G. Magenes, D. Bolognini, and C. Braggio. *Metodi semplificati per l'analisi sismica non lineare di edifici in muratura*. CNR – Gruppo Nazionale per la Difesa dai Terremoti., Roma, 2000.
- [26] G. Magenes and G.M. Calvi. Cyclic behaviour of brick masonry walls. In *Proceedings 10th. ECEE*, Vienna, 1994.
- [27] A.H. Nayfeh. *Nonlinear Interactions*. John Wiley & Sons, 2000.
- [28] A.H. Nayfeh and W. Lacarbonara. On the discretization of distributed-parameter systems with quadratic and cubic nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, 13:203–220, 1997.
- [29] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, 1995.
- [30] D. Orlandi. *Analisi nonlineare di strutture ad arco in muratura*. PhD thesis, Università degli Studi di Firenze, Dipartimento di Costruzioni, Firenze, VII ciclo.
- [31] B.L. Pintucchi. A general model for analysing response of slender masonry structures under multi-component earthquake excitations. In *2003 Pacific Conference on Earthquake Engineering*, 2003.
- [32] B.L. Pintucchi. *Vibrazioni trasversali di elementi monodimensionali non resistenti a trazione in direzione longitudinale*. PhD thesis, Università degli Studi di Firenze, Dipartimento di Costruzioni, Firenze, XIII ciclo.
- [33] H. Poincaré. *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste.*, volume II. Dover, New York, 1957.

Bibliografia

- [34] G. Romano and M. Romano. Sulla soluzione di problemi strutturali in presenza di legami costitutivi unilaterali. volume LXVII of *VII*, pages 104–113, 1979.
- [35] F. Ruvimovič Gantmacher. *Lezioni di meccanica analitica*. Editori Riuniti–Edizioni Mir, 1980.
- [36] J.M.T. Thompson and H.B. Stewart. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley and Sons, 1987.
- [37] M. Tomaževic. The computer program POR. Technical report, ZRMK, 1978.
- [38] E. Viola. *Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture*. Pitagora Editrice, Bologna, 2001.
- [39] G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, 1974.
- [40] K. Worden and Tomlinson G.R. *Nonlinearity in Structural Dynamics*. IOP, 2001.
- [41] M. Lucchesi and B.L. Pintucchi. A numerical model for non-linear dynamic analysis of masonry slender structures. In corso di pubblicazione in *European Journal of Mechanics*.