Decidere insieme

Proposta di seminario sui metodi di decisione multicriterio

Regione Toscana, “Pianeta Galileo”, 2024

Emanuele Salerno

Consiglio Nazionale delle Ricerche
Istituto di Scienza e Tecnologie dell’Informazione
Via G. Moruzzi, 1, 56124 Pisa
`emanuele.salerno@cnr.it`

Sommario Come si fa a prendere una decisione sulla base di molti criteri, alcuni dei quali possono essere tradotti in requisiti numerici mentre altri dipendono solo dall’opinione, qualitativa e soggettiva, del decisore? E se i criteri da soddisfare sono parzialmente contrastanti? E se la decisione dipende da fattori che richiedono il contributo di molti saperi specialistici, quindi di molti decisori? E se il consenso tra i decisori è talmente basso da far dubitare seriamente della soluzione? Quanto è efficace una semplice votazione per avvicinarsi alla scelta migliore? E una semplice votazione preceduta da una serie di confronti e discussioni? E la matematica può aiutare? Dalla formalizzazione dei criteri e la minimizzazione di un “costo” da essi derivato alla loro gerarchizzazione e analisi con i metodi dell’algebra, della teoria delle probabilità e dell’informazione, la matematica può effettivamente aiutare. I problemi di decisione sono fondamentali in ogni aspetto della nostra vita e sono studiati da diverse discipline, come psicologia, sociologia, diritto, oltre che da qualche branca della matematica. Si tratta in estrema sintesi di scegliere tra un certo numero di alternative sulla base di diversi criteri e diverse conoscenze caratterizzate da determinati gradi di incertezza da parte di un certo numero di decisori più o meno indipendenti tra loro e portatori di diverse competenze e interessi. Gli aspetti di un problema di decisione non sono quasi mai tutti adeguatamente formalizzabili, ma anche in questo caso la matematica può dare il suo contributo. La scelta dei criteri significativi, la loro sistematizzazione, l’organizzazione dei quesiti da porre ai decisori, la valutazione delle loro risposte ai fini della decisione e la maniera di mettere insieme i contributi dei diversi decisori sono tutti argomenti su cui la matematica ha molto da dire.

1 Cos’è una decisione?

Noi esseri umani siamo macchine che prendono continuamente decisioni. Normalmente, queste dipendono dall’analisi di una serie di condizioni che limitano la scelta e necessitano di un intervento cosciente e una complicata mediazione, specialmente quando si tratta di decisioni collettive. Ma cosa intendo qui per "decisione"? Leggo dal vocabolario:[1]

> *Scelta cosciente e ragionata di una tra le varie possibilità di azione o di comportamento (e più in partic., sotto l'aspetto psicologico, il momento deliberativo di un atto volitivo)*

Già da questa definizione, emergono quasi tutti gli aspetti che mi interessa mettere in evidenza:

- *Scelta cosciente e ragionata*: le "decisioni" prese inconsciamente sono qui escluse. Quando decidiamo, siamo coscienti di farlo e la decisione segue un qualche tipo di ragionamento.
- *Varie possibilità di azione*: sono le alternative tra cui un soggetto (individuale o collettivo) deve scegliere nel prendere la decisione.
- *L'aspetto psicologico*: anche questo breve richiamo è importante, perché suggerisce che i problemi di decisione, specie se di decisione collettiva, sono oggetto di diverse discipline, tra cui certamente, oltre che la psicologia, il diritto, la sociologia, la scienza politica e anche, come vedremo, la matematica.

Decisione deriva dal verbo latino *decīdĕre*, che vuol dire tagliare via, eliminare, e quindi eleggere una delle possibili alternative come guida all'azione ed eliminare tutte le altre. Nella breve definizione del vocabolario manca però un ultimo aspetto importante: il criterio. Su cosa si deve basare il ragionamento che conduce alla decisione? I motivi che conducono all'azione sono certamente molteplici, complessi e largamente soggettivi, e possono dipendere da ideali, valori, condizionamenti dell'ambiente e, non ultimi, interessi personali.

Piuttosto che di criterio, dovremmo quindi parlare di "criteri", cioè dell'insieme di obiettivi che intendiamo raggiungere con la nostra decisione e degli indicatori che ne descrivono le caratteristiche. Per esempio, davanti alla scelta di uno tra diversi modelli di automobile da acquistare, possiamo prima pensare a come desideriamo utilizzarla: per fare lunghi viaggi, per spostarci in città, per offrire un servizio di trasporto di persone o merci? Chiarito questo aspetto, cosa dobbiamo prendere in considerazione per scegliere il nostro modello? Faccio un elenco sicuramente incompleto: il prezzo d'acquisto, la velocità, la comodità degli occupanti, lo spazio per i bagagli, il consumo di carburante, l'autonomia, l'affidabilità, il costo della manutenzione e dei ricambi...

Ognuno di questi criteri, può a sua volta suggerire ulteriori dettagli da considerare, formando un groviglio a prima vista difficilmente districabile. Risulta comunque evidente che diversi criteri, o requisiti, possono anche essere contrastanti; nel nostro esempio, se aumenta la comodità, aumenta spesso anche il prezzo d'acquisto, o se aumenta la velocità aumenta anche il consumo di carburante. Questo è uno degli elementi che ci dicono che ogni decisione emerge necessariamente da un compromesso. Il secondo è tipico delle decisioni da prendere collettivamente: come accennato, ogni decisore porta la sua competenza e i

[1] https://www.treccani.it/vocabolario/decisione/

suoi interessi, dunque sarà raro trovare un caso in cui tutti i decisori convergano immediatamente sulla stessa scelta. Per esempio, il babbo può scegliere un modello adatto a pavoneggiarsi per le vie del quartiere, la mamma un modello che consenta di sistemare bene i due bambini, andare al lavoro la mattina, riempire il bagagliaio con la spesa la sera prima di tornare a casa e il figliolo diciottenne un modello con cui poter apprezzare l'ebbrezza della guida sportiva. Su quest'ultima opzione, suggerirei comunque di evitare di guidare quando si è soggetti ad altre, concomitanti, ebbrezze.

Come raggiungere il doppio compromesso tra molti criteri e molti decisori è il tema principale di questa conversazione.

2 Chi ha ragione?

Probabilmente, non vado molto lontano dal vero dicendo che l'archetipo di una decisione è la ricerca di una risposta alla domanda "chi ha ragione?" o, simmetricamente, "chi ha torto?" in una determinata controversia. Storicamente, si tratta di un compito affidato a un *giudice*, che lo può assolvere basandosi su diversi modelli di ordine culturale: la sua saggezza, o la sua autorità, o autorevolezza, derivante da dio, dal popolo, dall'esercito, ecc.; la Legge, anche qui, divina o terrena, e comunque stabilita; il parere di un consiglio, una giuria, un'assemblea, sia essa elettiva o costituita d'autorità. E sfruttando gli strumenti offerti da un sistema più o meno formale: la logica; la retorica; la dialettica.

Come caso estremo, ed estremamente semplice, si è attribuita la funzione di giudice direttamente alla divinità. È il caso dell'ordalia: per dimostrare di aver ragione, un individuo si sottopone a una prova potenzialmente mortale. Se vi sopravvive, è segno che la divinità gli riconosce la prevalenza rispetto all'avversario. Nel 1068 (vedi Figura 1), il monaco vallombrosano Pietro Aldobrandeschi attraversò una distesa di carboni ardenti, rimanendo miracolosamente illeso, per sostenere la posizione del suo ordine, che accusava di simonia il vescovo di Firenze Pietro Mezzabarba. Questo episodio valse l'appellativo di Igneo (di fuoco) al monaco, che fu poi venerato come santo, e indusse il papa Alessandro II a destituire il vescovo Mezzabarba. Come si vede, il giudizio di Dio non ha avuto bisogno né di logica, né di retorica né di dialettica, ma la sua traduzione in pratica ha richiesto l'intervento di un'*autorità* riconosciuta da entrambe le parti o comunque prevalente, per esempio, in virtù del suo potere morale o militare. È chiaro dunque che anche l'ordalia ricade nel caso della decisione d'autorità o nel caso in cui l'interpretazione di un evento è riconosciuta *di comune accordo*.[2]

Diverso è il caso in cui la decisione viene presa sulla base di una legge preesistente e comunque stabilita. Qui occorre servirsi della logica, da parte del giudice e di chi lo assiste, e della retorica e la dialettica da parte dei contendenti o di chi eventualmente li rappresenta.

[2] Più recentemente, i vostri nonni lo ricorderanno, il giornalista Mino Damato si è anche lui sottoposto con successo alla stessa prova del fuoco, eppure non è stato creato cardinale come lo fu l'Aldobrandeschi e nemmeno santificato. Evidentemente in quel caso difettavano sia l'autorità sia il comune accordo.

Figura1. Marco Palmezzano (1459-1539), Pietro Igneo sopra il fuoco. (Da Wikipedia, pubblico dominio)

Strumento potente basato sulla logica è la matematica, ma è abbastanza potente da poter esprimere obiettivi, criteri, dati e ragionamento necessari a raggiungere una qualunque deliberazione? La matematica definisce oggetti, assiomi e regole la cui applicazione, all'interno del sistema che costituiscono, consentono di valutare la verità di una proposizione. Può davvero la matematica stabilire la verità di una qualunque proposizione?

È un sogno coltivato dai dotti sin dall'antichità, dall'epoca di Pitagora al secolo scorso. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pensava che per raggiungere lo scopo si dovesse innanzitutto creare un'enciclopedia che abbracciasse tutta la conoscenza umana, quindi associare dei simboli alle nozioni fondamentali e stabilire delle regole per la loro manipolazione, che assicurino la verità di ogni proposizione generata combinando proposizioni vere con regole lecite di manipolazione.

> *quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos, et sibi mutuo (accito si placet amico) dicere: calculemus*[3]

Vale a dire, più o meno,

> *quando sorga una controversia, non ci sarà più necessità di discussione tra due filosofi di quella che c'è tra due computisti. Sarà sufficiente prendere una penna, sedersi al tavolo e dirsi l'un l'altro: calcoliamo!*

Il sogno di Leibniz e dei suoi predecessori è stato perseguito a lungo, fino a quasi un secolo fa, quando è stato dimostrato che, a rigore, si tratta di un'impresa

[3] G. W. Leibniz, *De scientia universali seu calculo philosophico*, circa 1680.

impossibile. Tuttavia, se nessun calcolo sarà mai in grado di stabilire la verità o la falsità di una qualsiasi proposizione, dal punto di vista pratico molte cose si possono fare e sono state fatte con l'aiuto del calcolo, a partire dai risultati dell'algebra di Boole fino all'intelligenza artificiale di oggi, che molti pensano possa un giorno addirittura avere una coscienza. Ma non è questo il luogo per discuterne.

3 Caso "facile"

Vediamo dunque cosa succede se un problema di decisione è abbastanza formalizzato da poter essere trattato del tutto matematicamente. Abbiamo un certo numero di alternative (supponiamo siano tre) tra cui scegliere:

$$Alternativa_1; Alternativa_2; Alternativa_3.$$

Come detto, dobbiamo basare la decisione su un certo numero di criteri, che in questo caso dobbiamo essere in grado di tradurre in misure quantitative. Se ci riusciamo, possiamo stabilire per ogni criterio un "costo", cioè una misura di qualche caratteristica delle alternative il cui valore cresce se ci si allontana da ciò che è desiderabile secondo il criterio stabilito. Se ci sono più criteri e più caratteristiche da considerare, otteniamo il costo totale della nostra scelta:

$$\begin{aligned} Costo(Alternativa) = {} & Costo_1(Caratteristica_1(Alternativa)) + \\ & + Costo_2(Caratteristica_2(Alternativa)) + \\ & + Costo_3(Caratteristica_3(Alternativa)) + ... \end{aligned}$$

A questo punto, in questo caso semplice, possiamo calcolare il costo delle tre alternative e decidere in favore di quella di costo minore. Dobbiamo notare subito che anche qui in realtà non ha fatto tutto la matematica, in quanto siamo noi ad aver deciso le caratteristiche da considerare, i criteri su cui basarci e la loro formalizzazione. Possiamo anche decidere che non tutti i criteri hanno la stessa importanza, ma alcuni sono più importanti di altri, moltiplicando i relativi costi per costanti (sempre decise da noi) dette *pesi*:

$$\begin{aligned} Costo(Alternativa) = {} & Peso_1 \times Costo_1(Caratteristica_1(Alternativa)) + \\ & + Peso_2 \times Costo_2(Caratteristica_2(Alternativa)) + \\ & + Peso_3 \times Costo_3(Caratteristica_3(Alternativa)) + ... \end{aligned}$$

Questo caso è particolarmente semplice fino a quando le alternative sono poche e ogni costo dipende da una sola o da poche caratteristiche associate. In un caso generale le cose sono già complesse per quanto riguarda la scelta dei criteri, delle caratteristiche significative e dei pesi, e possono diventare ancora molto più complesse matematicamente per trovare il minimo valore del costo totale.

Per essere un po' più concreti, torniamo all'esempio della scelta di un modello di automobile e supponiamo di trovarci nel caso in cui tutte le misure siano esattamente quantificabili. Stabiliamo che le caratteristiche da considerare siano il prezzo d'acquisto e la potenza erogata dal motore, e che il nostro obiettivo, dettato dalle nostre esigenze e le nostre possibilità, sia un prezzo di 18.000€e una potenza di 60 kW. Tra tutti i modelli disponibili, vogliamo acquistare quello di minore costo rispetto a queste due caratteristiche. Dobbiamo stabilire quali sono i costi e quali i pesi da adottare. Per il prezzo, è ragionevole pensare di adottare un costo crescente, cioè una funzione che diventa sempre più grande man mano che cresce il prezzo in Euro. Per quanto riguarda la potenza, invece, se si scende troppo, l'auto potrebbe non soddisfare più ai nostri bisogni. Per esempio, sotto i 30 kW potrebbe non essere più in grado di percorrere agevolmente un nostro tragitto abituale caratterizzato da ripide salite. D'altra parte, una potenza molto al disopra dei 60 kW potrebbe, a parte il prezzo di acquisto richiesto, essere eccessiva per gli scopi che si vogliono raggiungere. Si potrebbe quindi scegliere un costo che parte da un certo valore, poi cala fino a raggiungere un minimo in corrispondenza del nostro obiettivo di 60 kW e quindi risale fino a diventare molto alto per potenze fuori dalle nostre aspettative. Due funzioni come quelle

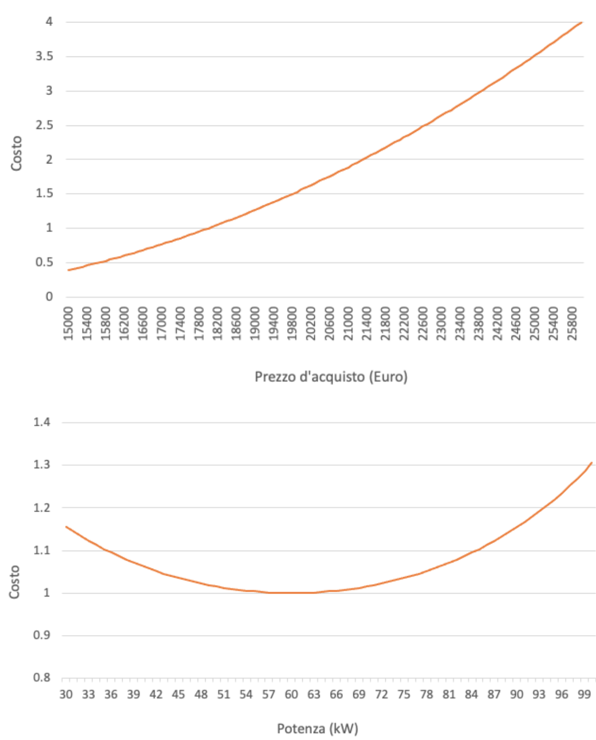

Figura2. Funzioni costo nell'esempio di Paragrafo 3

descritte sono mostrate in Figura 2. Come si vede, il grafico in alto (prezzo d'acquisto) dà un costo sempre crescente al crescere del prezzo, mentre dal grafico in basso risultano variamente penalizzate potenze sia minori sia maggiori di 60 kW. Come indicato dalle equazioni qui sopra, il risultato dipenderà dalla forma di queste funzioni e dalla scelta dei pesi.

Supponiamo dunque di avere due modelli alternativi di auto, uno costa 17.500€e ha una potenza di 95 kW e uno costa 18.300€e ha una potenza di 60 kW. Lasciamo stare la forma analitica delle due funzioni costo, tanto stiamo facendo solo un esempio (in realtà, nemmeno tanto concreto), e supponiamo che i valori che appaiono nelle figure siano già moltiplicati per i pesi. In questo caso, il costo totale del primo modello sarà di 2.10 e quello del secondo di 2.07, quindi la scelta cadrà su quest'ultimo nonostante il suo prezzo d'acquisto sia maggiore.

Per arrivare a considerare un caso veramente concreto, sempre rimanendo alla scelta di un modello di automobile, bisognerà considerare che i criteri di scelta saranno molti più di due; al Paragrafo 1 se ne vede un esempio. Tra questi criteri potrebbero poi trovarsene di carattere puramente soggettivo, come quello già citato della comodità per i passeggeri, ma anche criteri estetici, come l'eleganza, la gamma di colori disponibile, o la rispondenza alla moda corrente delle tappezzerie interne. È evidente che davanti a criteri di questo tipo non è possibile concepire funzioni costo come quelle viste in Figura 2. Un'ulteriore difficoltà si incontra nel caso in cui più persone siano chiamate a partecipare alla decisione. Come si fa a valutare criteri di carattere qualitativo e soggettivo? Come si fa a mettere insieme le opinioni di più decisori? È efficace una semplice votazione?

4 Strutturare il panorama della decisione

Restando all'esempio della scelta di un'auto da acquistare, vediamo stavolta di elencare un numero sufficiente di criteri; non è detto che siano esaustivi, ma almeno proviamo a rappresentarci quello che una qualunque persona potrebbe prendere in considerazione per la scelta di un particolare modello.

1. Prezzo;
2. Alimentazione;
3. Dimensioni;
4. Massa;
5. Consumo;
6. Potenza;
7. Estetica;
8. Prestazioni;
9. Velocità;
10. Comodità;
11. Spazi;
12. Bagagliaio;
13. Sicurezza;
14. Imbottiture;

Figura3. Insieme non strutturato di criteri di scelta.

15. Ergonomia;
16. Design;
17. Dotazioni;
18. Visibilità;
19. ...

Visti così, non è che questi criteri aiutino particolarmente a prendere una decisione. Essi appaiono come un insieme privo di qualsiasi struttura (Figura 3), e su cui è difficile ragionare, cioè valutare un numero anche alto di alternative a fronte di così tanti criteri (e potrebbero essere anche parecchi di più).

Si osserva però che questi criteri possono essere messi a sistema, sfruttando le dipendenze che li caratterizzano. Per esempio, velocità e potenza possono essere considerati due aspetti distinti delle prestazioni, design può essere considerato un aspetto dell'estetica, visibilità e dotazioni possono essere considerati aspetti della sicurezza, e bagagliaio, spazi, imbottiture, dimensioni, massa ed ergonomia possono essere considerati aspetti della comodità.

Basandosi su queste relazioni si può dare una struttura (per esempio, gerarchica) all'insieme di criteri individuato. Da una "nuvola" come quella di Figura 3 si può quindi passare a una struttura come quella mostrata in Figura 4. Osserviamo prima di tutto come questa struttura è di carattere gerarchico, vale a dire, ogni suo elemento può "contenere" altri elementi che gli dipendono gerarchicamente e può a sua volta essere contenuto, o "dipendere" da un altro elemento. La gerarchia è divisa in livelli: al primo livello c'è l'obiettivo, ossia la scelta del modello di auto; al secondo livello ci sono i "criteri" indicati dalle caselle in azzurro, poi, i "sottocriteri", in viola e gli "indicatori" in verde. In generale, la gerarchia può assumere qualunque profondità, cioè gli indicatori possono a loro volta contenere altri elementi, che possono ulteriormente essere divisi, in teoria all'infinito e in pratica alla massima complicazione che siamo disposti ad accettare. Inoltre,

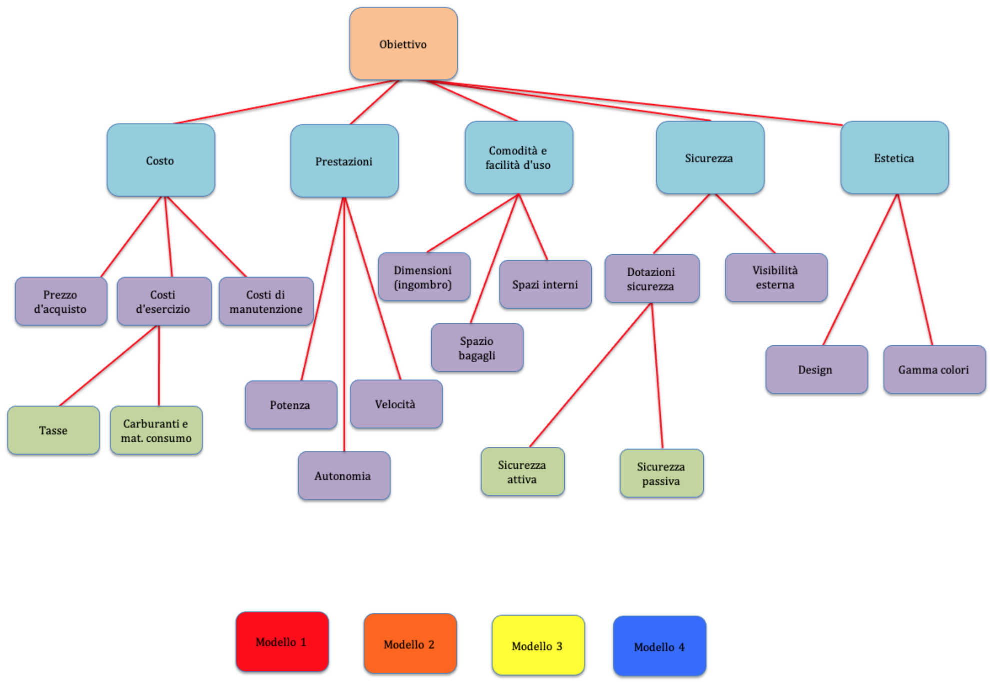

Figura4. Albero gerarchico dei criteri di scelta a fronte delle alternative considerate (esempio).

il numero di elementi per livello non è limitato. Altra osservazione: la struttura in Figura 4 è un “albero”, cioè una figura caratterizzata da “nodi” (nel nostro caso, le caselle contenenti gli elementi della gerarchia) e “rami” (le linee rosse che li connettono, per indicare le reciproche dipendenze) tali che da ogni nodo è possibile raggiungerne ogni altro attraverso un unico percorso, consistente nel risalire i rami che portano all'ascendente comune per poi ridiscendere verso il nodo di destinazione. Con una terminologia presa dagli alberi genealogici, per “ascendente” di un nodo si intende un altro nodo raggiungibile percorrendo solo rami ascendenti, mentre per “discendente” si intende un nodo raggiungibile percorrendo solo rami discendenti. Le coppie di nodi che non sono né ascendenti né discendenti l'uno dell'altro sono detti “collaterali”. Infine il nodo che non ha ascendenti (nel nostro caso, l'obiettivo) è detto “radice” dell'albero e i nodi che non hanno discendenti sono detti “foglie”.

A fronte della gerarchia dei criteri, abbiamo le alternative, cioè i diversi modelli di auto che prendiamo in considerazione (quattro, nella figura). Procedendo dal basso verso l'alto, per ogni foglia dell'albero, dobbiamo stabilire una classifica tra i quattro modelli confrontati rispetto al criterio rappresentato dalla foglia. Per esempio, rispetto alla foglia “Tasse”, possiamo ordinare le alternative per costo crescente del bollo di circolazione, rispetto alla foglia "Autonomia", per numero decrescente di chilometri percorribili con un pieno di carburante (o con una carica di batteria, per i veicoli elettrici). Le classifiche stilate per tutte le foglie devono poi risalire l'albero attraverso tutti i loro ascendenti per raggiungere l'obiettivo, che sarà una sorta di classifica finale sulla cui base scegliere l'auto da acquistare.

Come ci si arriva? Vanno stilate delle classifiche per ogni gruppo di nodi dipendenti da un singolo ascendente. Per esempio, rispetto all'obiettivo dobbiamo stabilire l'importanza relativa di costo, prestazioni, comodità, sicurezza ed estetica. Come si fa ad ottenere queste classifiche? Non è semplice, e più sono le alternative e i criteri più è complicato.

5 Stabilire classifiche

Attribuire le importanze relative di un certo numero di elementi rispetto a un obiettivo comune non è una cosa facile, e diventa sempre più difficile quanti più sono gli elementi da considerare, specialmente se essi non sono riconducibili a una misura quantitativa. Torniamo all'esempio facile di stilare una classifica dei quattro modelli alternativi rispetto all'elemento Tasse. Supponiamo che le tasse di circolazione dei quattro modelli valgano, rispettivamente, 190€, 210€, 150€e 170€. È facile dire che la classifica in questo caso sarà:

- Modello 3
- Modello 4
- Modello 1
- Modello 2

Abbiamo stabilito una classifica *ordinale*, cioè che ci consente di stabilire chi è più importante di chi, ma non *di quanto* è più importante. Se oltre all'ordine vogliamo anche stabilire un peso relativo, cioè vogliamo creare una classifica *cardinale*, possiamo per esempio dividere ogni valore per la somma dei prezzi e attribuire all'alternativa corrispondente il peso $1 - tassa(modello\ n)/somma(tasse)$. In questo caso avremmo

- $somma(tasse) = 720$€
- $peso(modello\ 3) = 1 - 150/720 = 0.79$
- $peso(modello\ 4) = 1 - 170/720 = 0.76$
- $peso(modello\ 1) = 1 - 190/720 = 0.74$
- $peso(modello\ 2) = 1 - 210/720 = 0.71$

Quindi oltre che la classifica abbiamo ottenuto anche un punteggio per ogni alternativa, che dà la massima priorità al modello la cui tassa di circolazione costa meno. Potrebbe essere utile ottenere una classifica con punteggi la cui somma vale 1. La possiamo ottenere dividendo ogni punteggio per la somma dei punteggi, che in questo caso fa 3. Quindi:

- $somma(pesi) = 3$

– $peso(modello\ 3) = 0.79/3 = 0.26$
– $peso(modello\ 4) = 0.76/3 = 0.25$
– $peso(modello\ 1) = 0.74/3 = 0.25$
– $peso(modello\ 2) = 0.71/3 = 0.24$

Notare che i pesi delle alternative rispetto alla tassazione sono in questo caso quasi uguali tra loro. Effettivamente, differenze di poche decine di Euro all'anno non sono molto importanti ai fini della scelta di un modello,[4] ma nessuno ci avrebbe impedito di stabilire regole diverse per l'attribuzione dei pesi nel caso avessimo voluto differenziare maggiormente le quattro alternative.

Ma come la mettiamo se vogliamo stabilire una simile classifica rispetto all'elemento Design? Ognuno di noi ha i suoi gusti e, anche se è in grado di ordinare quattro modelli di auto rispetto al loro design, riuscirà molto più difficilmente ad assegnarvi dei pesi relativi.

Una soluzione a questo problema generale è stata offerta ormai molti anni fa da Thomas L. Saaty[5] con la sua *Analisi del processo gerarchico* (abbreviazione dall'Inglese, AHP), e consiste semplicemente non nello stilare direttamente una classifica ma nel confrontare le alternative due a due specificando di quanto una delle alternative è più o meno importante dell'altra. Per fare questo, Saaty ha stabilito una scala di confronto a pochi livelli, tipo: elementi di uguale importanza; l'elemento 1 è leggermente più importante dell'elemento 2; l'elemento 1 è molto più importante dell'elemento 2; ecc. Confrontare l'importanza relativa di due elementi è in effetti molto più semplice che stabilirla direttamente su una lista di più elementi.

Qui non darò dettagli matematici sull'AHP. Limitiamoci ad osservare quanti confronti due a due dobbiamo fare se abbiamo a che fare con un certo numero di elementi da ordinare. Se abbiamo due elementi, per esempio gli indicatori Tasse e Carburanti in Figura 4, ci basta fare un solo confronto. Se abbiamo a che fare con tre elementi dobbiamo confrontare 1 con 2, 1 con 3 e 2 con 3, per un totale di tre confronti. Se abbiamo a che fare con quattro elementi dobbiamo confrontare 1 con 2, 1 con 3, 1 con 4, 2 con 3, 2 con 4 e 3 con 4, per un totale di sei confronti. In generale, se abbiamo da stilare una classifica di n elementi, dobbiamo eseguire $n \times (n-1)/2$ confronti, quindi il numero di confronti cresce come il quadrato del numero di elementi da confrontare, diventando rapidamente proibitivo (e anche aumentando le possibilità di sbagliare da parte del decisore). Per esempio, per ordinare i cinque criteri rappresentati dalle caselle azzurre in Figura 4, dobbiamo eseguire 10 confronti due a due. Se gli elementi fossero 6 dovremmo fare 15 confronti; se fossero 7, 21 confronti, e così via. Ci sono altri metodi per trattare casi così grandi, ma qui li lasciamo stare.

Saaty ha collegato la scala di importanza relativa basata su confronti due a due a un particolare operatore che genera una classifica cardinale tra le alterna-

[4] Quindi nella costruzione dell'albero gerarchico avremmo anche potuto omettere questo indicatore, rendendo tutto più semplice.

[5] T. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, New York, McGraw-Hill, 1980.
D. Falcone, L. De Felice, T. L. Saaty, *Il decision making e i sistemi decisionali multicriterio*, Milano, Hoepli, 2009.

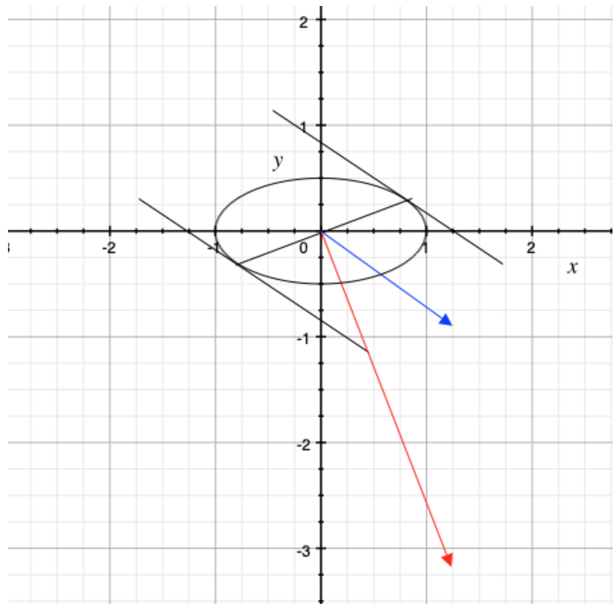

Figura5. Trasformazione di un vettore tramite un operatore.

tive. Vi dico solo che questo operatore si chiama “matrice di giudizio”. Giusto se qualcuno di voi ha voglia di approfondire, ma non voglio dare altri dettagli, si tratta di una matrice reciproca positiva. Vi darò solo un idea geometrica di come funziona. Questo operatore contiene in sé tutti i risultati dei confronti tra coppie di alternative. Come fa a generare una classifica? Un operatore è uno strumento matematico che riceve un ingresso appartenente a un certo insieme di enti matematici e lo trasforma in un’uscita appartenente allo stesso insieme. Tanto per dare un’idea, supponiamo di avere un operatore rappresentato geometricamente dall’ellisse in Figura 5 e che gli oggetti su cui opera siano vettori sul piano che la contiene, rappresentati in figura da frecce di diversa lunghezza e direzione. Supponiamo poi che ogni vettore rappresenti una delle nostre possibili classifiche. Abbiamo già visto che tutti i punteggi di una classifica possono essere moltiplicati per lo stesso numero senza alterare le priorità rappresentate dalla classifica stessa. Questo vuol dire che quello che effettivamente rappresenta una classifica è solo la direzione del vettore; ai nostri fini, la lunghezza non importa. Se applichiamo l’operatore alla classifica rappresentata dalla freccia blu, questa viene trasformata in una freccia con diversa direzione, quindi in un’altra classifica, rappresentata dalla freccia rossa. In un certo senso, quindi, noi e l’operatore non siamo d’accordo sui punteggi da attribuire alle varie alternative. Esiste un caso in cui ci possiamo trovare d’accordo? Almeno uno esiste. Guardate come è costruita la freccia rossa: abbiamo tracciato le due tangenti all’ellisse parallele alla freccia blu, abbiamo unito i punti di tangenza (una proprietà dell’ellisse ci dice che il segmento che li congiunge passa dal centro) e abbiamo trovato la

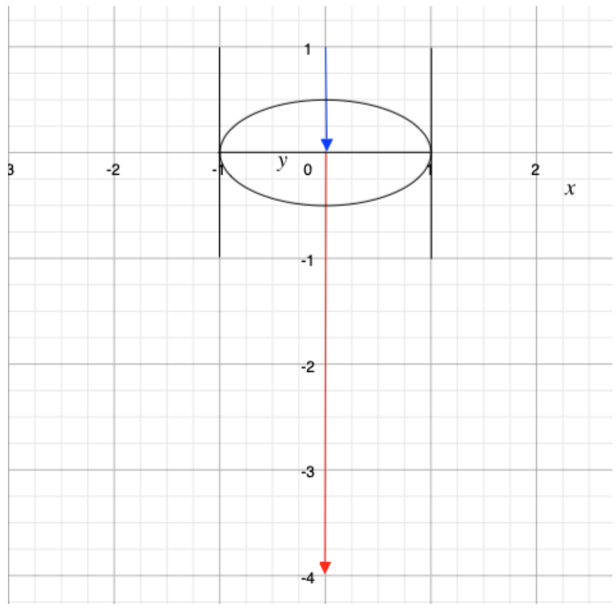

Figura6. Vettore trasformato in una versione amplificata di se stesso.

direzione della freccia rossa tracciando la perpendicolare al segmento che unisce i due punti.

Quindi, a pensarci un po', è facile immaginare in che condizioni l'operatore restituirà la stessa classifica che gli proponiamo. Osserviamo la Figura 6: se la classifica in ingresso è orientata come la freccia blu, il segmento che unisce i due punti di tangenza coincide con l'asse maggiore dell'ellisse, e l'uscita fornita dall'operatore coincide, a meno di un fattore, con la classifica proposta in ingresso, quindi abbiamo trovato i giusti punteggi da attribuire alle alternative. Trovare il giusto vettore per ottenere questo risultato è tanto più difficile quante più sono le alternative considerate. Con la disponibilità dei computer, abbiamo oggi dei metodi numerici in grado di trovare facilmente le classifiche che l'operatore trasforma in se stesse, anche con un numero notevole di alternative.

6 Dalle classifiche alla scelta

Abbiamo visto che è possibile ricavare dei punteggi globali sulla base dei confronti tra coppie di alternative. Questo vale per tutte le alternative nei confronti di tutte le foglie dell'albero gerarchico. Per arrivare a stilare la classifica finale, la tecnica AHP prevede di adoperare una procedura esattamente identica per stabilire l'influenza (il peso) di ogni elemento della gerarchia nei confronti del suo ascendente.

Torniamo all'albero di Figura 4. I criteri (in azzurro) vanno confrontati a coppie come è stato fatto per le alternative, e in maniera esattamente identica

Tabella1. Matrice di decisione. I valori in nero al disotto di ogni peso sono anche detti priorità locali, mentre quelli nella colonna “Scelta” sono detti priorità globali, e su di essi viene operata la scelta finale.

	Scelta														
Mod 1	0.21														
Mod 2	0.30														
Mod 3	0.29														
Mod 4	0.22														
Criteri	Costo				Prestazioni			Comodità			Sicurezza			Estetica	
Pesi	0.10				0.20			0.30			0.30			0.10	
Mod 1	0.23				0.13			0.13			0.34			0.16	
Mod 2	0.42				0.33			0.25			0.30			0.23	
Mod 3	0.17				0.27			0.43			0.15			0.40	
Mod 4	0.19				0.28			0.19			0.22			0.21	
Sottocr.	Prezzo	Eserc.		Manut.	Pot.	Vel.	Aut.	Dim.	Bag.	Int.	Dotaz.		Vis.	Des.	Col.
Pesi	0.50	0.25		0.25	0.40	0.20	0.40	0.33	0.33	0.34	0.50		0.50	0.70	0.30
Mod 1	0.30	0.20		0.10	0.09	0.27	0.09	0.02	0.07	0.30	0.38		0.29	0.08	0.36
Mod 2	0.50	0.34		0.35	0.36	0.25	0.33	0.40	0.28	0.08	0.23		0.37	0.17	0.37
Mod 3	0.10	0.22		0.25	0.43	0.22	0.13	0.35	0.34	0.59	0.17		0.12	0.54	0.06
Mod 4	0.10	0.24		0.30	0.12	0.26	0.45	0.23	0.31	0.03	0.22		0.22	0.21	0.21
Indic.		Tasse	Cons.								S. Att.	S. Pass.			
Pesi		0.20	0.80								0.50	0.50			
Mod 1		0.20	0.20								0.25	0.50			
Mod 2		0.10	0.40								0.25	0.20			
Mod 3		0.30	0.20								0.25	0.10			
Mod 4		0.40	0.20								0.25	0.20			

vanno loro assegnati i pesi (con somma 1) nei confronti dell’obiettivo. Analoga operazione va fatta per tutti i gruppi di sottocriteri (in viola) che discendono da ogni singolo criterio e tutti i gruppi di indicatori (in verde, quando ci sono) che discendono da ogni singolo sottocriterio. I risultati possono essere raccolti nella forma di Tabella 1, detta “matrice di decisione”. Come si vede, essa ricalca esattamente l’albero mostrato nella figura e ogni suo nodo riporta come esempio una classifica cardinale, casuale o derivata dalle classifiche dei suoi discendenti. In blu, sono designati l’obiettivo (Scelta), i criteri, i sottocriteri e gli indicatori; in rosso sono riportati i valori dei pesi ad essi attribuiti (arbitrariamente) e in nero i punteggi ottenuti dai quattro modelli alternativi rispetto a ogni singolo elemento della gerarchia. Come anticipato, le classifiche relative alle foglie si ottengono confrontando direttamente i modelli tra loro e qui sono scelte casualmente mantenendo a 1 la somma dei punteggi, mentre quelle relative a tutti gli altri nodi si ottengono componendo le classifiche attribuite ai rispettivi discendenti secondo i pesi attribuiti. Per esempio, il punteggio del modello 2 rispetto al sottocriterio “Costi di esercizio” (Eserc.) è ottenuto componendo i punteggi attribuiti agli indicatori “Tasse” e “Materiali di consumo” (Cons.), cioè, dalla tabella,

$$punteggio(Tasse) \times peso(Tasse) + punteggio(Cons.) \times peso(Cons.) = punteggio(Eserc.)$$

ovvero $0.10 \times 0.20 + 0.40 \times 0.80 = 0.34$, che è il valore che appare nella colonna "Eserc." in corrispondenza del modello 2. Dalla classifica riportata sotto "Scelta", si vede che il massimo punteggio finale, 0.30, è raggiunto dal modello 2, che quindi è quello che va scelto. Notate che la somma dei numeri in nero in ogni colonnina individuata da un scritta in blu vale sempre 1. I punteggi in essa contenuti stabiliscono la graduatoria delle alternative rispetto a quell'elemento della gerarchia. Per esempio, sotto il criterio "Estetica" (Est. nella tabella) vediamo che il massimo punteggio è ottenuto dal modello 3. Analogamente, la somma dei pesi per ogni gruppo di elementi discendenti da uno stesso nodo vale 1. Per esempio, la somma dei pesi dei nodi che discendono dal nodo "Scelta" (prima riga di numeri in rosso) vale 1.

7 Decidere insieme

Finora abbiamo visto come può procedere un singolo decisore davanti alla scelta tra più alternative. Tutto molto bello. Tuttavia, l'adozione di una decisione raramente influisce solo su chi decide. Metterla in atto tocca normalmente gli interessi di molti, che possono a ragione pretendere di esservi coinvolti. Quando in una scelta sono coinvolti più soggetti, trovare un accordo (che significa convergere su una soluzione di compromesso) non è immediato. A partire dalla necessaria designazione del gruppo di decisori e giù giù fino all'attribuzione delle priorità, si presentano problemi che è necessario e non facile risolvere per pervenire a una decisione giusta, inclusiva e democratica (qualunque cosa questi termini possano significare). Ripercorriamo in quest'ottica tutti i temi qui affrontati.

Persino nel caso "facile" richiamato al Paragrafo 3, che potrebbe far pensare a una decisione incontestabile perché rigorosamente giustificata dalla stretta procedura matematica seguita e dalla natura quantitativa dei dati a disposizione, ci sono evidenti gradi di arbitrarietà che nel caso di decisione affidata a un soggetto collettivo devono essere affrontati prima e al di sopra del problema matematico di individuare la scelta ottima. La scelta delle particolari funzioni costo e dei relativi pesi non è un passo banale, e risente delle sensibilità e degli interessi dei singoli. Proseguendo, a parte la selezione delle alternative tra cui scegliere, sia l'identificazione di un insieme significativo di criteri sia, soprattutto, la costruzione di un sistema gerarchico che li comprenda sono problemi su cui è difficile trovare un accordo senza una fase di approfondito confronto tra i portatori di interessi. Una volta scelta la gerarchia, rimane il problema di stabilire le priorità e i pesi relativi di ogni nodo. Il metodo AHP è solo uno di quelli che si possono adottare per raggiungere l'obiettivo: anche qui, un approfondito confronto è essenziale per giungere a una soluzione condivisa.

È efficace una semplice votazione per determinare tutti i termini su cui basarsi? Certo, sempre meglio che votare direttamente su soluzioni "candidate" da uno o più partecipanti, ma anche in questo caso si può fare di meglio. Mi immagino un gruppo di giudici che non hanno avuto occasione di confrontarsi per cercare di ottenere una base di conoscenza comune e sono messi di fronte a una scelta tra diverse procedure (proposte da chi?) da seguire per arrivare alla decisione. Tra loro ci saranno persone di più o meno riconosciuta autorevolezza e diverse capacità comunicative che sponsorizzano diverse soluzioni. Una votazione potrà essere efficace solo se ognuna di esse sarà stata discussa approfonditamente in tutti i suoi aspetti o, in altre parole, dopo una seria "campagna elettorale". Anche così, però, si va incontro a rischi derivanti dalla prevalenza di alcuni interessi o di particolari doti di convincimento.

Esistono metodi formali per il raggiungimento del consenso, che per esempio limitano il rischio che l'autorevolezza di un partecipante diventi un fattore di prevalenza per la sua opinione. Nonostante anche su questi metodi siano state formulate diverse critiche,[6] la psicologia, la sociologia e le scienze politiche ne studiano diversi, che probabilmente vale la pena di prendere in considerazione quando si tratta di prendere decisioni che influiscono su molte persone.

Rimane un ultimo aspetto da esaminare: una volta stabilite tutte le modalità operative, come mettere insieme i risultati individuali per giungere a una decisione collettiva. È qui che la matematica rientra e fa da protagonista.

Primo problema – consistenza e coerenza dei giudizi dati: confrontare tutte le coppie di alternative tratte da un insieme numeroso è certamente più facile che assegnare un punteggio a ogni singola alternativa, ma più numeroso è l'insieme considerato più facile è formulare giudizi contraddittori. Giusto per fare un esempio banale, se diamo a un'alternativa A priorità sull'alternativa B, e a B priorità sull'alternativa C, allora cadiamo in contraddizione se attribuiamo a C priorità su A. Questo e altri errori importanti ma meno evidenti possono essere individuati matematicamente dall'analisi delle matrici di giudizio derivate dalle scelte dei singoli decisori. Quando chi gestisce la procedura incontra una di queste incongruenze può scegliere se omettere quel giudizio dalla valutazione collettiva o negoziare una sua riformulazione con il decisore interessato.

Secondo problema – grado di consenso: opinioni divergenti tra diversi giudici sono un fenomeno fisiologico, ma eccessive disparità di opinione portano a conclusioni collettive di validità dubbia. In altre parole, quando le opinioni sono eccessivamente disperse, derivarne una "media" non rappresenta una soluzione adeguatamente informativa. D'altra parte, una decisione comporta una precisa, unica, strategia di azione e non può rappresentare adeguatamente opinioni molto divergenti. Anche questa condizione può essere analizzata matematicamente. Quando si verifica che il grado di consenso è eccessivamente basso, se la cosa non deriva da qualcuna delle incongruenze citate sopra, si può stabilire, sempre matematicamente, se qualcuno dei giudici ha cercato di polarizzare la scelta verso una sua particolare preferenza e quindi negoziare una modifica delle sue valutazioni. Si può poi riportare il problema in discussione nella speranza di ottenere un maggiore consenso. Alla fine, se il forte disaccordo si rivela ineliminabile, l'efficacia della decisione rimane fortemente compromessa.

[6] Come introduzione a queste tecniche si può vedere una pagina di Wikipedia: `https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_del_consenso`.

Terzo problema – composizione dei giudizi individuali: dato l'insieme dei punteggi prodotti dai singoli giudici, qual è la stima finale che rispecchia correttamente le diverse opinioni? Una dimostrazione matematica rigorosa[7] porta alla conclusione che l'unica maniera di combinare classifiche cardinali prodotte da metodi come AHP è la media geometrica dei relativi punteggi. Dati n valori positivi, la loro media geometrica è data dalla radice n-esima del loro prodotto.

8 Conclusione

Dai pochi cenni che ho dato, emerge che l'uso di metodi matematici è uno strumento molto efficace per mettere ordine in una classe di problemi estremamente intricati, legati sia al ragionamento individuale sia al consenso tra diversi soggetti e alla sintesi tra opinioni diverse. Emerge anche, chiaramente, che le procedure matematiche seguono sempre impostazioni non sempre ispirate da rigore logico o matematico e che, per assumere un valore pratico, anche i risultati di tali procedure vanno interpretati. E la stessa interpretazione richiede un consenso: anche questo, pur raggiungibile, non risponde sempre a rigore logico o matematico. Ultima cosa: diffidate sempre di chi sostiene un argomento dicendo che "la matematica non è un'opinione". Personalmente, non ho mai sentito un matematico pronunciare questa frase. E ne ho frequentati tanti.

Letture

Sulla calcolabilità dei problemi di decisione, suggerisco il libro di Martin Davis dal titolo *Il calcolatore universale: Da Leibniz a Turing*, Gli Adelphi, 2013.

Quello che dico qui sull'impostazione matematica dei problemi di decisione e l'approccio gerarchico multicriterio segue solo una minuscola parte dei vari punti di vista da cui la matematica ha affrontato il problema. Sfortunatamente, nei pochi anni che ho dedicato a questa ricerca, non mi sono capitati tra le mani testi non specialistici sull'argomento. Chi ha voglia di approfondire, o comunque di farsi una panoramica più completa, può rivolgersi alle pagine di Wikipedia (mai da snobbare):

– `https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_della_decisione`
– `https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_della_scelta_razionale`
– `https://it.wikipedia.org/wiki/Ricerca_operativa`
– `https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_dei_giochi`
– `https://en.wikipedia.org/wiki/Dempster%E2%80%93Shafer_theory`

[7] T. L. Saaty, "On the Measurement of Intangibles. A Principal Eigenvector Approach to Relative Measurement Derived from Paired Comparisons", *Notices of AMS* 60, 192, 2013.
J. Aczel, T. L. Saaty, "Procedures for synthesizing ratio judgments", *Journal of Mathematical Psychology* 27, 93, 1983.

I lucidi di una lezione tenuta dalla professoressa Luisa Santini alla facoltà di ingegneria di Pisa mostrano in maniera un po' più approfondita di quanto non abbia fatto io il meccanismo di gerarchizzazione seguito per la soluzione di un problema di decisione multicriterio, e presentano un elenco di tecniche, inclusa la AHP, utili per risolverlo, oltre a un esempio di carattere urbanistico, molto più serio della scelta di un modello di automobile che presento qui come caso quasi banale:

– `http://www.dic.unipi.it/l.santini/edilearchitettura/AA2018-2019/LEZIO%206%20AMC.pdf`

La lezione della prof. Santini, come il Paragrafo 4 qui sopra, mostra come passare da una nuvola di criteri a un albero ben strutturato. Se si va oltre, c'è il pericolo di tornare a una situazione estremamente complicata. Al di là dello stretto ambito del tema qui trattato, potrebbe interessarvi la lettura di una serie di saggi di Umberto Eco raccolti in un volume dal titolo *Dall'albero al labirinto. Studi storici sul segno e l'interpretazione*, Milano, Bompiani, 2007.

Emanuele Salerno*,* ingegnere elettronico dal 1985, è primo ricercatore presso l'Istituto di Scienza e Tecnologie dell'Informazione "Alessandro Faedo" del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Nel tempo, i suoi interessi scientifici hanno spaziato tra misure non distruttive, l'elaborazione di segnali e immagini, l'analisi di dati per la cosmologia, il telerilevamento e le tecnologie informatiche per i beni culturali. Dal 2020 studia metodi di decisione multicriterio applicati a problemi di valutazione nel settore delle costruzioni. È stato professore a contratto di Fisica, Strumentazione e Misure Elettroniche e Microonde presso l'Università di Pisa e relatore di molte tesi di laurea o dottorato in Ingegneria, Fisica, Astronomia, e Informatica. È socio senior della IEEE e della AEIT e, dal 2018 al 2023, editor associato della rivista *IEEE Transactions on Image Processing.* Tra il 2000 e il 2002 ha frequentato il Master in Comunicazione della Scienza della SISSA a Trieste, conducendo una ricerca sull'influenza dell'informatica sulle discipline umanistiche. Ha tenuto lezioni e curato stage per le scuole superiori ed è autore di articoli non specialistici di argomento scientifico e tecnologico.