



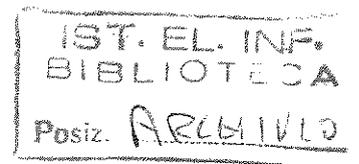
Consiglio Nazionale delle Ricerche

Nota Interna

Basi di geometria differenziale per la cinematica dello spermatozoo: considerazioni di merito

*Luciano Azzarelli, Massimo Chimenti, Ovidio Salvetti,
Tommaso Renieri, Claudio Scala*

B4-28
dic-2000



I.E.I.
ISTITUTO DI
ELABORAZIONE DELLA
INFORMAZIONE

**Basi di geometria differenziale per la cinematica dello spermatozoo:
considerazioni di merito**

*Luciano Azzarelli¹, Massimo Chimenti¹, Ovidio Salvetti¹,
Tommaso Renieri², Claudio Scala²*

¹ Istituto di Elaborazione della Informazione - CNR, Pisa
² Centro Studi Cellule Germinali - CNR, Siena

Abstract

Basi di Geometria Differenziale per la cinematica dello spermatozoo: considerazioni di metodo.

Richiami di nozioni elementari di Geometria Differenziale relative al concetto di CURVATURA, TORSIONE, ACCELERAZIONE e VELOCITA' di una traiettoria. Rassegna di alcuni criteri di riduzione della dimensionalità delle traiettorie dei corpuscoli mobili in $R^{(2)}$ ed in $R^{(3)}$. Esame delle prospettive di analisi teorica del contenuto informativo di alcune possibili procedure di sintesi.

Introduzione del concetto di EFFICIENZA del moto dello spermatozoo.

INTRODUZIONE

Le considerazioni di metodo che seguono riguardano l'obiettivo di **identificare le leggi biofisiche della cinematica dello spermatozoo**, come viene percepita con lo strumento CASA (*Computer Assisted Spermatozoa Analysis*) di cui si farà uso nel corso della ricerca. Presumibilmente tali leggi saranno, nel momento finale della ricerca, espresse in termini di equazioni differenziali. Prima del raggiungimento di questo obiettivo è ovviamente necessaria una estesa ricognizione di tipo statistico, volta a cogliere le uniformità da sottoporre all'attenzione del biologo e del biofisico.

Il dispositivo di rilevazione CASA messo a punto dall'**Istituto di Elaborazione dell'Informazione** del CNR di Pisa¹ consente, *inter alia*, di determinare le coordinate piane della posizione della cellula nella loro evoluzione temporale: per ogni tempo t vengono registrate le coordinate $X(t)$ ed $Y(t)$ di punti predeterminati (collo, testa etc.) del corpuscolo mobile.

Nel momento descrittivo dell'indagine, particolare cura verrà dedicata alle seguenti grandezze, ricche di contenuto interpretativo:

1- Evoluzione della distanza Δ_{cu} fra il punto-collo e l'ultimo punto del flagello; dall'analisi della serie sarà possibile stimare (per difetto) l'elongazione massima dello spermatozoo e la sua pulsazione di movimento.

¹cfr. 1)-AZZARELLI L. et. al. - Sviluppo di un sistema per l'analisi assistita del movimento degli spermatozoi - Documento interno B4-09 del CNR-Istituto per l'elaborazione dell'Informazione- Pisa, maggio 1998; 2)-MINUTOLI S. - Sequence Analyzer v.1 - Documento interno: CNR-Istituto per l'elaborazione dell'Informazione- Pisa, 1998

In termini formali, se $\{X_c(t), Y_c(t)\}$ è la traiettoria associata al punto "collo" e $\{X_u(t), Y_u(t)\}$ è la traiettoria associata all'ultimo punto marcato sul flagello, la variabile indotta:

$$\Delta_{cu}(t) = \sqrt{(X_c(t) - X_u(t))^2 + (Y_c(t) - Y_u(t))^2}$$

registrerà, nel tempo, l'andamento della *distanza euclidea* fra i due punti.

2- Evoluzione temporale della lunghezza *LaxSEC* (t) dell'asse secondario della testa dello spermatozoo; dall'analisi della sua pulsazione sarà possibile stimare il ritmo di rotazione della cellula. Un sintetizzatore statistico di *dispersione goniometrica*, (oppure un indice di *entropia relativa* avente per supporto la densità uniforme) associato al segnale *LaxSEC* (t) potrà probabilmente fungere da indicatore di *linearità di movimento*.

3- Studio del rapporto $E_{se} = \frac{\Delta_{se}}{S_{se}}$ fra la distanza start-end Δ_{se} del punto-collo (distanza fra il punto di inizio e quello di fine della traiettoria) e lo spazio S_{se} realmente percorso dallo stesso punto. Tale rapporto fornisce una valutazione dell' "efficienza" del movimento.

Un importante problema preliminare da risolvere sul piano metodologico riguarda la scelta del miglior criterio² di neutralizzazione dell'effetto *drift* (o *trend*, o *deriva*) delle traiettorie (in particolare degli spermatozoi in qualche modo "patologici"), e degli algoritmi di filtraggio più adatti all'epifanizzazione delle componenti cicliche dei segnali che verranno esaminati. In particolare va esaminata l'opzione fra l'applicazione degli "spline" interpolatori (utilissimi in termini meramente descrittivi) *prima* o *dopo* l'applicazione degli algoritmi di *drift* e di filtraggio.

Dal punto di vista operativo sarà probabilmente conveniente procedere anzitutto all'esame esaustivo del segnale di rotazione dell'ellissoide *testa* e delle serie correlate, e solo in un secondo momento passare all'esame dei segnali *distanza*.

GENERALITÀ SUGLI STRUMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

L'impianto numerico della rilevazione fa sì che la geometria delle traiettorie riassunte dagli insiemi del tipo $\{X(t), Y(t)\}$ possa essere trattata in forma di equazioni parametriche. Così ad esempio le derivate $D_{1y} = \frac{dY}{dX}$ e $D_{2y} = \frac{d}{dX} \left(\frac{dY}{dX} \right)$ etc. potranno essere scritte:

²Ovviamente dovrà essere definita l'ottimalità, tenendo presente che le esigenze del biologo debbono far premio su quelle dello statistico.

Ad ogni modo, è presumibilmente utile, prima di iniziare una qualsiasi procedura di valutazione comparativa fra distinte traiettorie, ricorrere in via preliminare al "coricamento" delle traiettorie tramite una opportuna rotazione (per es. nel senso della massima variabilità)

$$D_{1y}(t) = \frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dX}{dt}} = \frac{y'}{x'}$$

$$D_{2y}(t) = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$$

$$D_{3y}(t) = \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{(x')^5}$$

con simbolismo di ovvio significato, in cui gli apici si riferiscono ad operazioni di derivazione rispetto al parametro t (che per noi sarà sempre il *tempo*).

Non può non essere percepito il grande vantaggio per i calcoli numerici offerto dalla possibilità di trattare la traiettoria $\{X(t), Y(t)\}$ in forma parametrica³. La derivazione numerica (per es. in algoritmo 'spline') offerta frequentemente dai software matematico-statistici risulta così agevolata al massimo. Poiché il tipo di calcoli che interessa nel momento empirico-descrittivo dell'indagine richiede un gran numero di derivazioni (in pratica numeriche), anche l'impianto teorico della trattazione conviene sia impostato in forma di equazioni parametriche.

Così l'importante grandezza S_{se} che corrisponde alla lunghezza di una curva data in forma parametrica potrà essere ad esempio scritta: $S_{se} = \int_{T_s}^{T_e} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$ nel dominio T_s (tempo di inizio) e T_e (tempo di fine) di durata della traiettoria.

Anche le importanti espressioni della velocità del punto $V(t)$ e della sua accelerazione (*tangenziale*) $A(t)$ possono essere scritte in maniera conveniente:

$$V(t) = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

$$A(t) = \frac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

e costituiscono delle sintesi univariate particolarmente apprezzabili delle coppie bivariante $\{X(t), Y(t)\}$.

Scriveremo in forma parametrica anche le espressioni della *curvatura*⁴ $K(t)$ e del *raggio di curvatura* $R(t)$ di una curva (piana) governata dalla coppia di equazioni parametriche $X(t), Y(t)$:

$$K(t) = \frac{\det \begin{bmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{bmatrix}}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{x'y'' - y'x''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}, \quad R(t) = \frac{1}{K(t)}.$$

³Anche la rappresentazione in forma **parametrico-complexa** è utile: per es. la *spirale logaritmica* può essere scritta: $z = a \cdot e^{b \cdot t}$ con z, a, b , complessi e t parametro; per il cerchio si può scrivere $z = e^{i \cdot t}$ mentre la *retta* può essere scritta: $z = z_1 + t \cdot (z_2 - z_1)$ in cui z_1 e z_2 sono due punti (complessi) collineari. L'*ellisse* sarà: $z = z_1 + c \cdot e^{i \cdot t} + d \cdot e^{-i \cdot t}$, con z_1, c, d complessi; l'*iperbole* $z = a \cdot \cosh(t) + i \cdot b \cdot \sinh(t)$ con a e b complessi etc.

⁴E' appena il caso di ricordare che la grandezza $K(t)$ misura il tasso di variazione della direzione di una curva data, e può essere interpretata anche come una valutazione dell'entità dello scostamento di una curva dalla linea retta (per una retta $K = 0$ ed $R = \infty$; ciò vale però anche per i punti di flesso). Va inoltre tenuto presente, per l'interpretazione cinematica dei fenomeni che si investigano nella ricerca, che è sempre possibile utilizzare le espressioni di $A(t)$ e di $V(t)$.

Le coordinate dei centri di curvatura $X_c(t)$ ed $Y_c(t)$ che definiscono l'osculante centrica saranno: $X_c(t) = X(t) - \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - y'x''} y'$; $Y_c(t) = Y(t) - \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - y'x''} x'$.⁵

Si osservi il fatto notevole che l'espressione $K(t)$ costituisce *de facto* anch'essa una sintesi delle sequenze temporali che ne costituiscono l'essenza, con conseguente riduzione di dimensionalità del fenomeno che si studia. In altri termini, le due sequenze temporali $X(t)$ ed $Y(t)$ vengono riassunte in una sola sequenza $K(t)$ che ne assorbe, rielaborandola, l'informazione di cui esse sono portatrici⁶. Ciò consente di utilizzare l'imponente patrimonio di metodi di analisi del segnale relativi ai processi univariati: ad esempio, il processo bivariato $\{X(t), Y(t)\}$ può essere riassunto iconograficamente tramite lo spettrogramma del processo $K(t)$, al livello di dettaglio che si desidera.⁷

Può essere di qualche interesse mettere in luce l'esistenza di un'elegante relazione fra i tre processi di sintesi:

$$A = A(t) = \frac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, K = K(t) = \frac{x'y'' - y'x''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}, V = V(t) = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}.$$

Infatti se si scrive:

$$\frac{A}{K} = \frac{\frac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}}{\frac{x'y'' - y'x''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}} = \frac{x'x'' + y'y''}{\frac{x'y'' - y'x''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}} = \frac{x'x'' + y'y''}{x'y'' - y'x''} v^2$$

si esplicita la grandezza $\frac{x'x'' + y'y''}{x'y'' - y'x''}$ la quale altro non è se non l'accelerazione radiale (o centripeta) A_R per cui è facile trarre il risultato:

$$\boxed{K = \frac{A}{A_R V^2}}$$

Si è osservato in precedenza che la sequenza di sintesi $K(t)$ riduce la dimensionalità del fenomeno, semplificando non solo la complessità della sua descrizione ma epifanizzando certi aspetti dell'informazione che da esso si vuol trarre⁸. Una riduzione di dimensionalità

⁵ Poiché non va dimenticato che la traiettoria della cellula si sviluppa in realtà nello spazio, vale la pena di richiamare qui l'espressione della curvatura anche nel caso tridimensionale:

$$K(t) = \left(\frac{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)((x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

⁶ Può rivelarsi opportuno ricorrere a semplici trasformate della sintesi ottenuta. Ad es. per neutralizzare l'effetto di punti di infinito in $R(t)$ si può utilizzare la trasformata $\frac{|R(t)|-1}{|R(t)|+1}$. Va da sé che è indispensabile studiare la relativa funzione di trasferimento, per apprezzare l'effetto della trasformazione sui contenuti armonici del segnale.

⁷ E' qui il caso di ricordare che anche la velocità di variazione $V(t)$ e l'accelerazione tangenziale $A(t)$ definite in precedenza riducono la dimensionalità del fenomeno.

⁸ E' appena il caso di osservare, come del resto si è già detto in precedenza, che può rivelarsi utile lavorare con semplici trasformate delle grandezze cui si è fatto cenno. Ad esempio, se il campo di variazione $0 \leq R(t) \leq \infty$ non appare conveniente, la trasformata $\tau[R(t)] = \frac{|R(t)|}{|R(t)|+1}$ si colloca nel campo: $0 \leq \tau[R(t)] \leq 1$

processo $F(t)$ può essere assoggettato ad una trasformazione di Fourier (\hat{f}) di cui si potrà studiare il valore assoluto $abs \{ \hat{f} [F(t)] \}$. Il corrispondente spettro assorbe chiaramente il contenuto armonico della traiettoria $\{X(t), Y(t)\}$ e ne deve dare, in qualche modo, ragione. Possono essere studiati naturalmente altri tipi di trasformazioni su variabile complessa.

Il problema della terza dimensione

Tralasciando, per il momento, il problema delle sintesi più opportune (la cui soluzione dipenderà dagli obiettivi che saranno di volta in volta definiti), va fermata l' attenzione sulla definizione della fisionomia del problema della ricostruzione della traiettoria *vera* del corpuscolo mobile: esso è di natura squisitamente statistico-matematica.

Va tenuto anzitutto tenuto presente che il corpuscolo mobile si evolve in realtà nello spazio tridimensionale, per cui esiste oltre alle coordinate $X(t), Y(t)$ anche una coordinata $Z(t)$ ignota: il dispositivo non la rileva, e la sua specificazione costituisce uno degli obiettivi della ricerca. E' utile pertanto considerare la traiettoria $\{X(t), Y(t)\}$ una proiezione ortogonale di una traiettoria *vera*: $\{X(t), Y(t), Z(t)\}$. Ai fini della sua individuazione potrà essere di aiuto la nozione di *torsione* $T(t)$ di una curva nello spazio.

Ricordando che la curvatura nello spazio è

$$K(t) = \left(\frac{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)((x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^3} \right)^{1/2}$$

e che $R(t) = 1/K(t)$, l' espressione della *torsione* $T(t)$ è la seguente:

$$T(t) = (R(t))^2 \cdot \frac{\det \begin{bmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{bmatrix}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^3}.$$

Vale la pena di richiamare l' attenzione sulla circostanza che $K(t)$ e $T(t)$ costituiscono sintesi univariate di processi trivariati.

Semplificando all' estremo, a puro titolo di esemplificazione , ed ipotizzando un movimento a spirale (con asse non necessariamente rettilineo) del corpuscolo, la forma parametrica della traiettoria si potrà scrivere come:

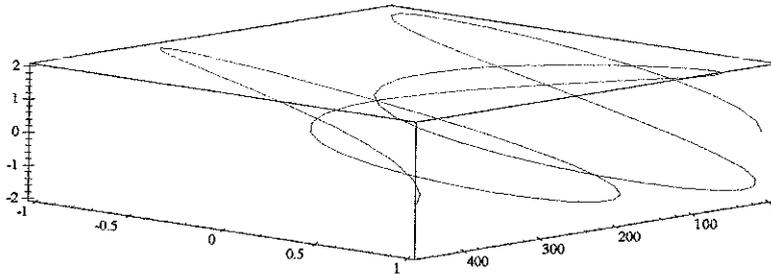
$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi_x(t) = A \cos(2\pi t/P_x) \\ Y(t) &= \Phi_y(t) = B \sin(2\pi t/P_y) \\ Z(t) &= \Phi_z(t) \end{aligned}$$

dove $\Phi_z(t)$ è una funzione incognita da determinare mentre A, B, P_x, P_y sono parametri di ovvio significato fisico.

Immaginando di disporre della funzione $\Phi_z(t)$ e dei valori dei parametri

$$\Phi_z(t) = t - t^2 + t^3, A = 1, B = 2, P_x = 2, P_y = \pi$$

la traiettoria sarebbe quella della figura seguente.



La forma di $\Phi_z(t)$ va però, nel concreto, non semplicemente postulata ma trovata a partire dai protocolli sperimentali.

Va tuttavia osservato che nella prima fase (meramente ricognitiva) della ricerca che si sta qui delineando, vista la compressione (vetrini del preparato microscopico) del campo di variazione della dimensione Z , ci si potrà limitare al lavoro in due dimensioni.

La rotazione assiale dello spermatozoo

Lo spermatozoo ruota su se stesso, attorno all'asse longitudinale, con una frequenza Ψ (cicli nell'unità di tempo Δt). Un problema che si pone è quello di correlare Ψ (che presumibilmente è in realtà una $\Psi(t)$) con le funzioni che governano il processo tridimensionale $\{X(t), Y(t), Z(t)\}$. Sono qui, evidentemente, necessarie nozioni di cinematica biofisica relative a questo genere di fenomeni.

Dal punto di vista metodologico conviene riguardare il processo di evoluzione del corpuscolo come un pacchetto di funzioni:

$$\{X(t), Y(t), Z(t), \Psi(t)\}$$

vuoi formalmente specificate, vuoi espresse da serie storiche empiriche calcolate numericamente sulla base delle informazioni attingibili dal protocollo di rilevamento sequenziale. Più propriamente, a causa della prevedibile dipendenza delle serie fra di loro, il processo sarà esprimibile per mezzo di un sistema Ψ di equazioni :

$$\leftrightarrow \{X(t), Y(t), Z(t), \Psi(t)\}.$$

Sistemi e caos

La presenza di una pluralità di traiettorie e di singole sequenze di sintesi più o meno complesse induce spontaneamente ad un'analisi in chiave di *teoria dei sistemi* (incentrata attorno al concetto di *segnale*), con tutto l'apparato di metodi di stima statistica da essa derivato, sul quale esiste una letteratura ricchissima (incentrata sul concetto, equivalente ma diversamente sfumato, di *serie temporale*) ed un patrimonio di software ampiamente collaudato⁹.

Va da sé che è necessario prevedere l'analisi di una *casistica di traiettorie* $\{X(t), Y(t)\}$ ideali, formalmente definite per via matematica, per le quali calcolare teoricamente le espressioni di *curvatura* o del relativo *raggio* etc. e per le quali tracciare i corrispondenti spettrogrammi. La conoscenza teorica della curvatura consente di capire quale è il contenuto dell'informazione armonica propria di $\{X(t), Y(t)\}$ che viene in essa incapsulata e quale è la sua distorsione. E' in questa circostanza che si potranno sperimentare le tecniche di *Wavelet* (ed altri tipi di analisi, per es. la trasformata di *Wigner*), per giudicare se effettivamente, nel contesto di questa ricerca, possano costituire un superamento (remunerativo) dello spettrogramma classico.

Una possibile ed interessante variante di analisi, in un ambito di funzioni di variabile complessa, potrebbe essere costituita dal trattamento del cosiddetto *segnale analitico* che è di largo impiego in sismologia. Nel nostro caso, data una sintesi univariata (per es. la curvatura $K(t)$), il *segnale analitico* $\Xi(t)$ sarebbe:

$$\Xi(t) = K(t) + j \cdot \Omega(t)$$

dove $\Omega(t)$ è la *trasformata di Hilbert* del segnale $K(t)$.

Sintesi statistica (componenti principali etc.)

Un'importante area da esplorare, in chiave di algebra lineare, è quella associata agli autovettori ed autovettrici delle *matrici di varianza-covarianza* associate alle matrici costituite

⁹E' qui opportuno un *caveat* sulla necessità di verificare preliminarmente, prima di operare su una traiettoria data nei termini di cui si è detto, se la sua sintesi resiste a opportuni test di caoticità (per es. al test di *Diks*).cfr. : C. DIKS, J. C. van HOUWELINGEN, F. TAKENS, J. DEGOEDE: *Physics Letters A* 201 pp. 221-228 (1995)

per es. da colonne $R(t), A(t), V(t)$. L'analisi teorica risulterebbe di facile impianto, essendo le grandezze $R(t), A(t), V(t)$ esplicitabili formalmente sulla base della definizione del processo $\{X(t), Y(t)\}$; di conseguenza gli elementi della *matrice di varianza-covarianza* sarebbero formalmente esplicitabili anch'essi e sarebbe pertanto inseguibile l'informazione del processo originario riassunta¹⁰ (per es. negli autovalori) con il procedimento descritto. Un importante capitolo dell'**analisi statistica multivariata** (*componenti principali, analisi dei fattori, analisi delle componenti canoniche* etc.) è incentrato sullo studio di questo tipo di sintesi, ed è disponibile un enorme patrimonio di risultati teorici che costituiscono la base anche per rappresentazioni iconografiche certamente utili nell'ambito della ricerca di cui ci si sta occupando.

Analisi per matrici indotte

Ai fini di una ricognizione descrittiva preliminare del movimento dello spermatozoo potranno certamente rivelarsi utili delle matrici costruite in modo da raccogliere le informazioni relative alle distanze fra le traiettorie definite dai punti marcati sul suo corpo. Ad es. se $\{X_c(t), Y_c(t)\}$ è una traiettoria (pivotal) associata al punto "collo" e $\{X_u(t), Y_u(t)\}$ è associata all'ultimo punto marcato sul flagello, la matrice bicolonnare $[t, \Delta_{xyyy}(t)]$, in cui la variabile indotta :

$$\Delta_{xyyy}(t) = \sqrt{(X_c(t) - X_u(t))^2 + (Y_c(t) - Y_u(t))^2}$$

registrerà, nel tempo, l'andamento della *distanza euclidea* fra i due punti. La matrice può diventare multicolonnare, nel senso che può essere arricchita da ulteriori vettori contenenti le distanze fra la pivotale $\{X_c(t), Y_c(t)\}$ ed altri punti collocati in altre, distinte posizioni del flagello. Una siffatta condensazione dell'informazione cinetica si presta ad essere trattata ad es. in termini di *regressione vettoriale*, con il recupero di tutto il patrimonio di risultati associati a questo tipo di manipolazione statistica.

La traiettoria pivotale può naturalmente essere diversa da $\{X_c(t), Y_c(t)\}$. Va da sé che in quest'ordine di idee diventa pensabile una matrice (simmetrica, a diagonale nulla) i cui elementi sono costituiti da vettori ciascuno dei quali composto dalle distanze fra due traiettorie combinate. Per intenderci: siano $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ i punti marcati sul corpo

¹⁰ Il *riassunto* comporta, per definizione, una perdita di informazione. In realtà l'informazione originaria potrebbe essere, al contrario, *esaltata*, sia pur al costo di eventuali distorsioni. Essendo però quest'ultime note, il recupero dell'informazione costituisce al più un fastidio al quale può essere ben conveniente sottomettersi.

dello spermatozoo. Sia $\Delta_{i,j}(t)$ con $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k$ il vettore di distanze fra le traiettorie $\{X_i(t), Y_i(t)\}$ e $\{X_j(t), Y_j(t)\}$; la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta_{12}(t) & \Delta_{13}(t) & \dots & \Delta_{1k}(t) \\ \Delta_{21}(t) & 0 & \Delta_{23}(t) & \dots & \Delta_{2k}(t) \\ \Delta_{31}(t) & \Delta_{32}(t) & 0 & \dots & \Delta_{3k}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{k1}(t) & \Delta_{k2}(t) & \Delta_{k3}(t) & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

apre la via a manipolazioni di carattere tensoriale. Anche per questo genere di calcoli, normalmente molto faticosi dal punto di vista numerico, è oramai disponibile del software ampiamente collaudato.¹¹

Una ricognizione numerica

Vengono proposti qui di seguito degli elementari grafici illustrativi relativi al protocollo CON12 (soltanto per le prime 90 immagini-frame). La sintesi utilizzata e' il *raggio di curvatura* (si è in pratica operato, per pura comodità descrittiva, sulla trasformata $\text{Log}(\text{Abs}(\text{Raggio}+1))$ che non disturba l'investigazione sui contenuti armonici (lineari e non-lineari) dei segnali.

Di particolare interesse sono i grafici relativi allo *spettro di potenza* ed allo *spetrogramma* dinamico. Appare evidente infatti che esistono informazioni utili incorporate nella serie storica di sintesi ed epifanizzati dallo strumento statistico. Ad es. dallo spettro¹² relativo al COLLO emerge una frequenza dominante di periodo pari a circa $1/.06 = 16.667\Delta t = 16.667 \cdot (90/515) = 2.9127 \approx 3$ millisecondi. Da un' ispezione sommaria dello spettrogramma (Raggio COLLO) l'onda di periodo pari a circa 3 millisecondi viene dichiarata come dominante negli intorni del tempo $110\Delta t = 110 \left(\frac{90}{515}\right) = 19.223$ millisecondi e del tempo $180\Delta t = 180 \left(\frac{90}{515}\right) = 31.456$ millisecondi dall' inizio del processo-traiettoria. Questa vibrazione riappare dominare approssimativamente al tempo $390 \left(\frac{90}{515}\right) = 68.155$ millisecondi dall' inizio del processo .

¹¹ cfr. per es. : R. Portugal & S. L. Sautú, **Applications of Maple to General Relativity**, Computer Physics Communications 105 (1997) 233-253.

¹² Va richiamata l' attenzione sulla circostanza che lo strumento spettrale classico postula una struttura lineare armonica di un processo stazionario, mentre lo spettrogramma (con le sue varianti: trasformata di *Wigner* etc.) si propone di rivelarne le non-linearità transienti, certamente ricche di informazione biofisica o schiettamente biologica relativa al fenomeno che si esamina.

Lo spettro e lo spettrogramma relativi alla traiettoria CENTRO-TESTA mettono in luce una cinetica del punto "centro-testa" percettibilmente diversa da quella appena descritta, nonostante la ingannevole somiglianza *prima facie* delle due traiettorie¹³. La cinetica della traiettoria CENTRO-TESTA, anch'essa ovviamente percepita tramite la sintesi *raggio di curvatura*, oltre a contenere la vibrazione di circa 3 millisecondi presente nella traiettoria COLLO, ne contiene un'altra di periodo 1/.11, pari a $(1/.11) \Delta t = (1/.11) \left(\frac{90}{515}\right) = 1.5887$ millisecondi (armonica della precedente?). Le due vibrazioni sono ben visibili, nei loro momenti di parossismo, nel relativo spettrogramma: esso appare del resto ricco anche di altre informazioni NON percettibili nello spettro di Ampiezza, il quale rappresenta palesemente una sintesi eccessivamente rozza dell'informazione armonica del processo¹⁴. Altre informazioni, alcune delle quali ovvie, sono percettibili nei riassunti grafici: ad es. la densità co-spettrale, la funzione di cross-correlazione etc. documentano la prevedibilità, facilmente modellabile in termini statistico-matematici, della cinetica COLLO come effetto della cinetica CENTRO-TESTA.

Un esercizio in simbolico

Allo scopo di verificare eventuali difficoltà di formalizzazione modellistica, ci proponiamo ora di definire il raggio di curvatura di una traiettoria governata dalle equazioni:

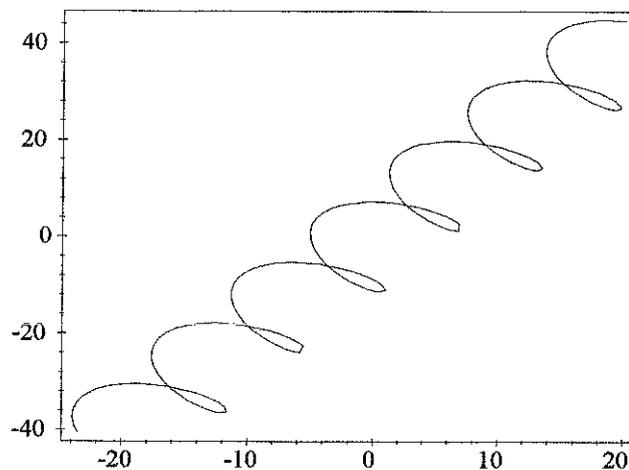
$$X(t) = t + 2 \sin t - 4 \cos t$$

$$Y(t) = 2t + 3 \sin t + 5 \cos t$$

riprodotta graficamente nella figura che segue.

¹³L'immagine corrispondente alla *differenza* fra le due immagini-spettrogramma (depurate delle curve di livello) offre un' utilissima informazione relativa alla diversità dei due processi a confronto.

¹⁴Lo spettrogramma come tale non fornisce informazioni sui transienti non-lineari relativi alle *fasi* associate alle onde del processo. Ad esso si può naturalmente associare, senza difficoltà, un "fasogramma" opportunamente studiato. Una maniera economica di ricavare l'equivalente di uno spettrogramma-fasogramma può probabilmente trovare fondamento nel procedimento di demodulazione complessa del segnale. Il recupero di questa (veneranda) tecnica, associato ai moderni metodi di visualizzazione delle funzioni di variabile complessa (cfr. per es. *Richardson J.L. : "Visualizing Complex Functions"*, in <http://home1.gte.net/jrsr/complex.html>) sembra presentare delle prospettive particolarmente promettenti per l'ottenimento di sintesi matematico-iconografiche dei processi che interessano.



Il raggio di curvatura è definito come:

$$R(t) = \frac{\left(\left(\frac{d}{dt}(X(t)) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(Y(t)) \right)^2 \right)^{3/2}}{\det \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(X(t)) & \frac{d}{dt}(Y(t)) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}(X(t)) \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}(Y(t)) \right) \end{bmatrix}}$$

da cui, sostituendo:

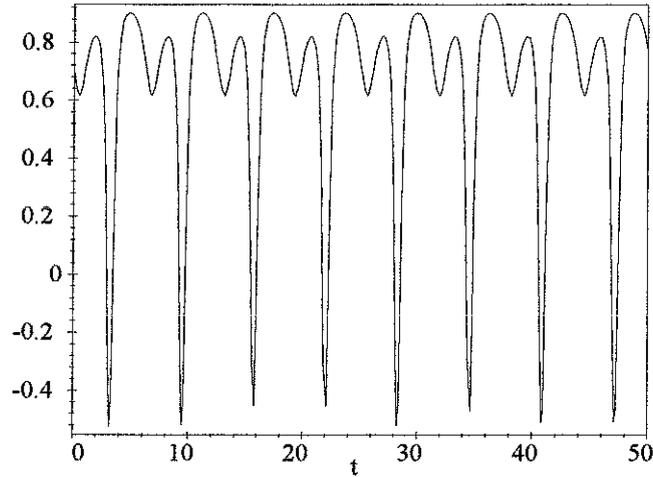
$$R(t) = \frac{\left(\left(\frac{d}{dt}(t+2 \sin t - 4 \cos t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(2t+3 \sin t+5 \cos t) \right)^2 \right)^{3/2}}{\det \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(t+2 \sin t - 4 \cos t) & \frac{d}{dt}(2t+3 \sin t+5 \cos t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}(t+2 \sin t - 4 \cos t) \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}(2t+3 \sin t+5 \cos t) \right) \end{bmatrix}}$$

$$R(t) = \frac{\left(\sqrt{(1+2 \cos t+4 \sin t)^2 + (2+3 \cos t-5 \sin t)^2} \right)^3}{\sin t - 13 \cos t - 22}$$

Facendo ricorso alla trasformata:

$$\frac{|R(t)|-1}{|R(t)|+1}$$

si ottiene il grafico che segue, dal quale emerge una struttura molto semplice e facilmente trattabile.



$$\frac{\left(\frac{\sqrt{((1+2 \cos t+4 \sin t)^2+(2+3 \cos t-5 \sin t)^2)}}{\sin t-13 \cos t-22} \right)^3}{\left(\frac{\sqrt{((1+2 \cos t+4 \sin t)^2+(2+3 \cos t-5 \sin t)^2)}}{\sin t-13 \cos t-22} \right)^3} \begin{matrix} -1 \\ +1 \end{matrix}$$

Calcoliamo ora il rapporto di efficienza $E_{se} = \frac{\Delta_{se}}{S_{se}}$ nell' arco temporale delimitato da

T_s e da T_e .

Sarà innanzitutto:

$$\Delta_{se} = \sqrt{(X(T_s) - X(T_e))^2 + (Y(T_s) - Y(T_e))^2}$$

$$\sqrt{(T_s + 2 \sin T_s - 4 \cos T_s - T_e - 2 \sin T_e + 4 \cos T_e)^2 + (2T_s + 3 \sin T_s + 5 \cos T_s - 2T_e - 3 \sin T_e - 5 \cos T_e)^2}$$

La grandezza: $S_{se} = \int_{T_s}^{T_e} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$, ricordando che

$$X(t) = t + 2 \sin t - 4 \cos t$$

$$Y(t) = 2t + 3 \sin t + 5 \cos t$$

potrà essere scritta:

$$S_{se} = \int_{T_s}^{T_e} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} (t + 2 \sin t - 4 \cos t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} (2t + 3 \sin t + 5 \cos t) \right)^2} dt$$

da cui:

$$E_{se} = \frac{\Delta_{se}}{S_{se}} = \frac{\sqrt{(T_s + 2 \sin T_s - 4 \cos T_s - T_e - 2 \sin T_e + 4 \cos T_e)^2 + (2T_s + 3 \sin T_s + 5 \cos T_s - 2T_e - 3 \sin T_e - 5 \cos T_e)^2}}{\int_{T_s}^{T_e} (\sqrt{46 + 16 \cos t - 12 \sin t - 28 \cos^2 t - 14 \cos t \sin t}) dt}$$

Fissando: $T_s = 0$ e $T_e = 2\pi$ si ottiene:

$$E_{se} = \frac{\Delta_{se}}{S_{se}} = \frac{\sqrt{(0+2 \sin 0-4 \cos 0-(2 \cdot \pi)-2 \sin(2 \cdot \pi)+4 \cos(2 \cdot \pi))^2+(2 \cdot 0+3 \sin 0+5 \cos 0-2(2 \cdot \pi)-3 \sin(2 \cdot \pi)-5 \cos(2 \cdot \pi))^2}}{\int_0^{2 \cdot \pi} (\sqrt{46+16 \cos t-12 \sin t-28 \cos^2 t-14 \cos t \sin t}) dt}$$

$$= .41713$$

L'efficienza è dunque del 41.713 percento.

Si conclude che per spostarsi dal punto iniziale a quello finale della traiettoria , nel tempo dato, lo spermatozoo ha percorso un cammino pari a $1 - .41713 = .58287$ cioè del 58.287 per cento maggiore di quello strettamente necessario *se lo spostamento fosse avvenuto in linea retta*.

Il concetto di efficienza qui elaborato è , diciamo così, di *natura meramente metrica* , nel senso che si raffrontano delle lunghezze , senza prendere in considerazione aspetti più pregnanti dell' economia del fenomeno.

Passiamo ora , per tentare un superamento della fisionomia banalmente geometrica delle considerazioni precedenti, ad alcune riflessioni di tipo energetico.

Naturalmente è necessaria una forza F per trainare un corpuscolo di massa costante m nell' intervallo metrico elementare Δs . Il lavoro ΔL svolto per la dislocazione è pertanto $\Delta L = F \cdot \Delta s$.

Nel tempuscolo elementare Δt si ha $\Delta s \approx ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$.

Ne segue che il lavoro totale L speso nel percorrere una traiettoria dall' inizio $\{X(T_s), Y(T_s)\}$ alla fine $\{X(T_e), Y(T_e)\}$,

cioè sviluppato nell' arco temporale delimitato da T_s e da T_e , si potrà scrivere:

$$L = \int_{T_s}^{T_e} F \cdot \Delta s \cdot dt = \int_{T_s}^{T_e} F \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot dt .$$

Qualora si ipotizzasse $F = \text{costante}$

$$L = \int_{T_s}^{T_e} F \cdot \Delta s \cdot dt = F \int_{T_s}^{T_e} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = F \cdot S_{se}$$

dove, lo ricordiamo, S_{se} è la lunghezza della traiettoria percorsa.

Comparando tale lavoro con il lavoro ipotetico che si sarebbe dovuto svolgere per trainare il corpuscolo in linea retta dall' inizio $\{X(T_s), Y(T_s)\}$ alla fine $\{X(T_e), Y(T_e)\}$ della traiettoria lo spostamento (*segmento di retta*) sarebbe stato:

$$\Delta_{se} = \sqrt{(X(T_s) - X(T_e))^2 + (Y(T_s) - Y(T_e))^2}$$

e la traiettoria si sarebbe collocata sulla retta $y = A + Bx$ collineare con i punti $\{X(T_s), Y(T_s)\}$ e $\{X(T_e), Y(T_e)\}$. Il lavoro associato $L_{segmento}$ (=lavoro speso in Δ_{se} nell' intervallo di tempo $T_e - T_s$) ipotizzando $F = \text{costante}$ sarebbe stato:

$$L_{segmento} = F \cdot \Delta_{se}.$$

Il rapporto di **efficienza energetica** $\frac{L_{segmento}}{L} = \frac{F \cdot \Delta_{se}}{F \cdot S_{se}} = \frac{\Delta_{se}}{S_{se}} = E_{se}$ pertanto , *ma solo nell' ipotesi di una forza $F = \text{costante}$* , è perfettamente equivalente a quello, precedentemente definito, di **efficienza metrica**.

E' piuttosto improbabile, nella realtà del fenomeno, che questa ipotesi possa essere considerata persuasiva, per cui dovranno, in prospettiva, essere elaborati dei concetti di efficienza propriamente energetica più aderenti all' effettivo stato di natura nel cui ambito si opera.

Esempi

Le figure seguenti riportano i grafici ottenuti elaborando i dati relativi ad alcune immagini del protocollo CON12.

In particolare, le figure 1 ÷ 7 sono state ricavate da una singola immagine. Le figure 1 e 2 mostrano rispettivamente le traiettorie dei punti denominati collo e centro-testa; le figure 3 e 4 gli mostrano spettri di ampiezza dei relativi raggi di curvatura; le figure 5 e 6 mostrano gli spettrogrammi tempo-frequenza; la figura 7 mostra la differenza tra i precedenti spettrogrammi.

Le figure 8 ÷ 22 mostrano i risultati ottenuti elaborando i dati ottenuti elaborando altre 15 immagini della sequenza. In ogni figura viene mostrato il grafico della traiettoria del punto denominato collo; sono inoltre riportati i seguenti grafici e diagrammi relativi agli 11 punti individuati sulla coda della cellula: velocità media; valore massimo dell'accelerazione(in valore assoluto); variazione lenta delle distanze rispetto al collo; matrice di associazione delle distanze; matrice di associazione delle velocità; valori massimi e minimi delle velocità.

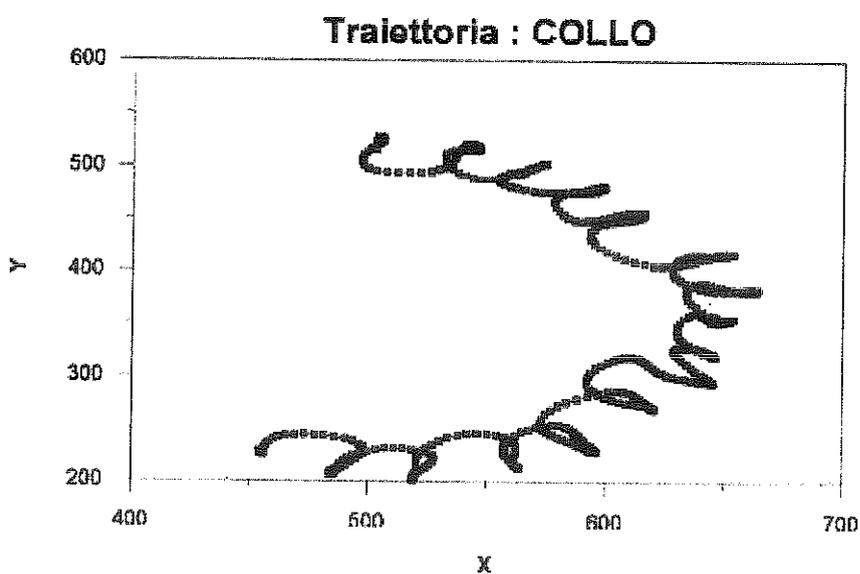


Figura 1

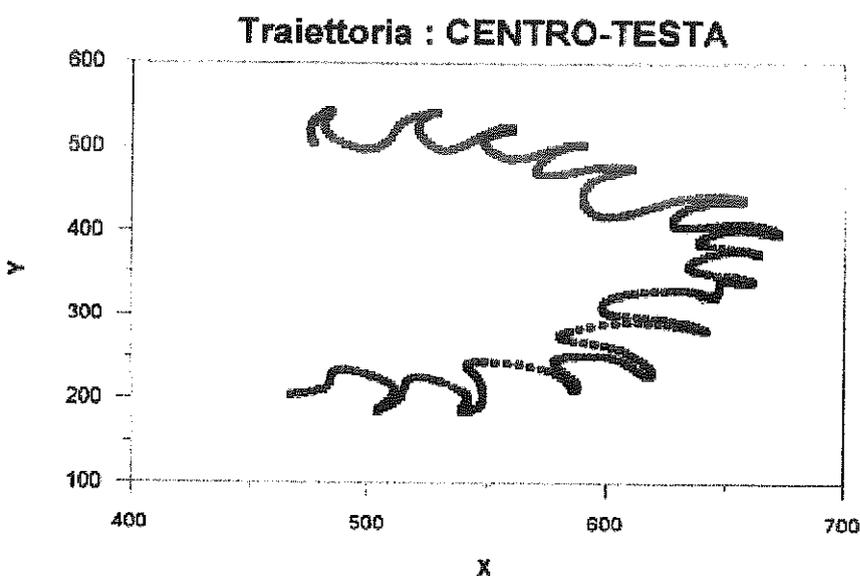


Figura 2

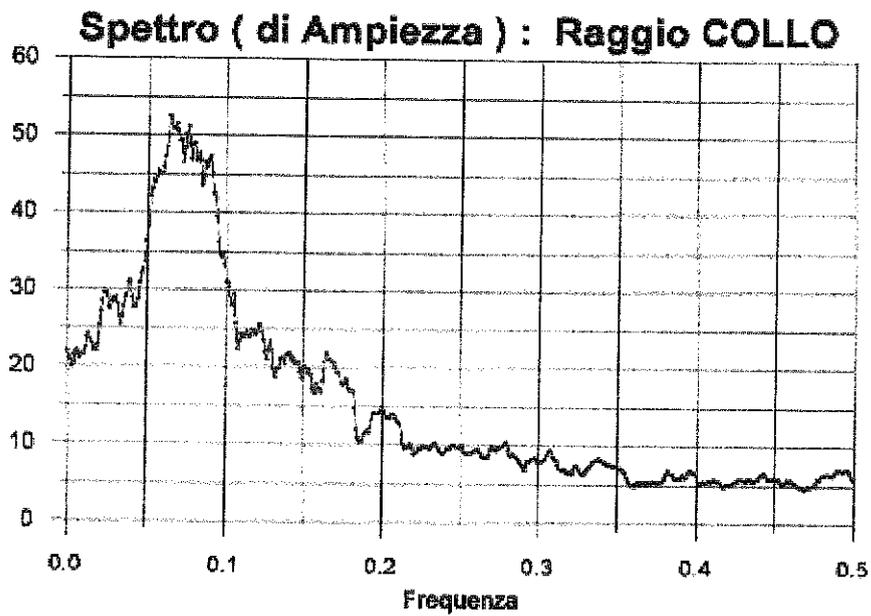


Figura 3

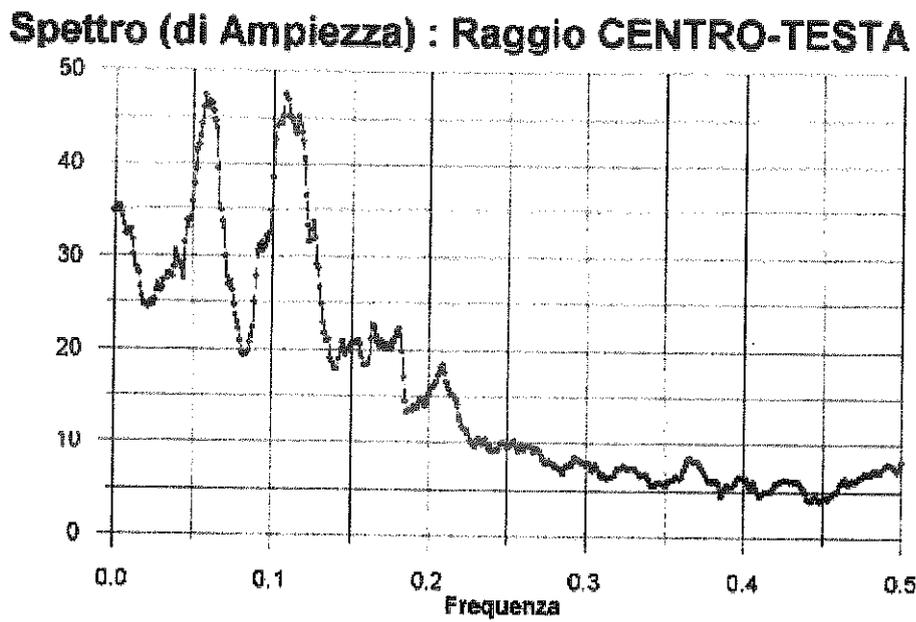


Figura 4

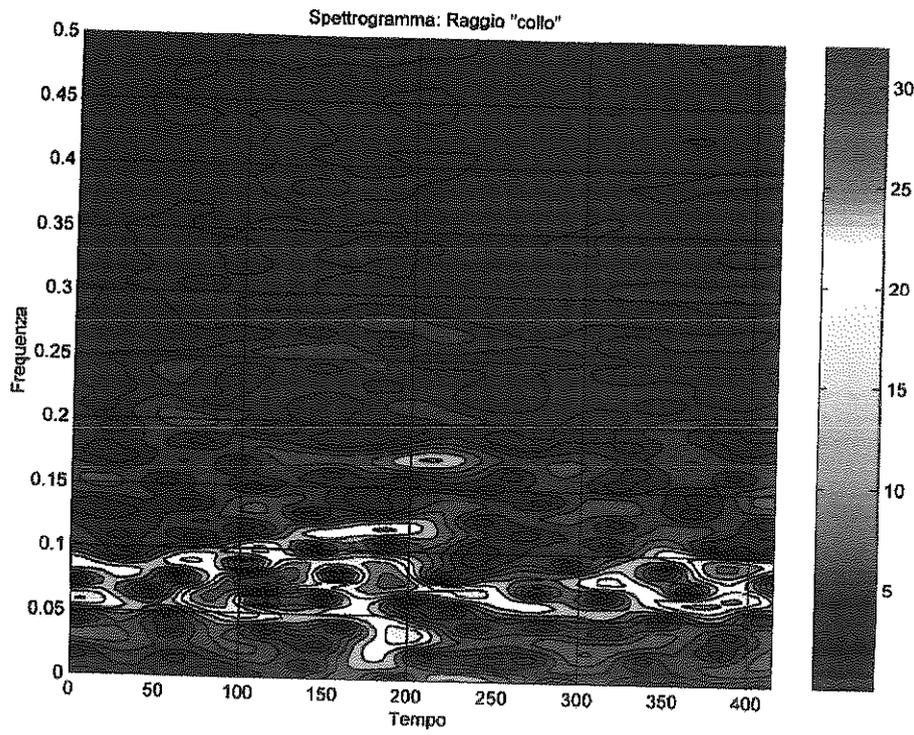


Figura 5

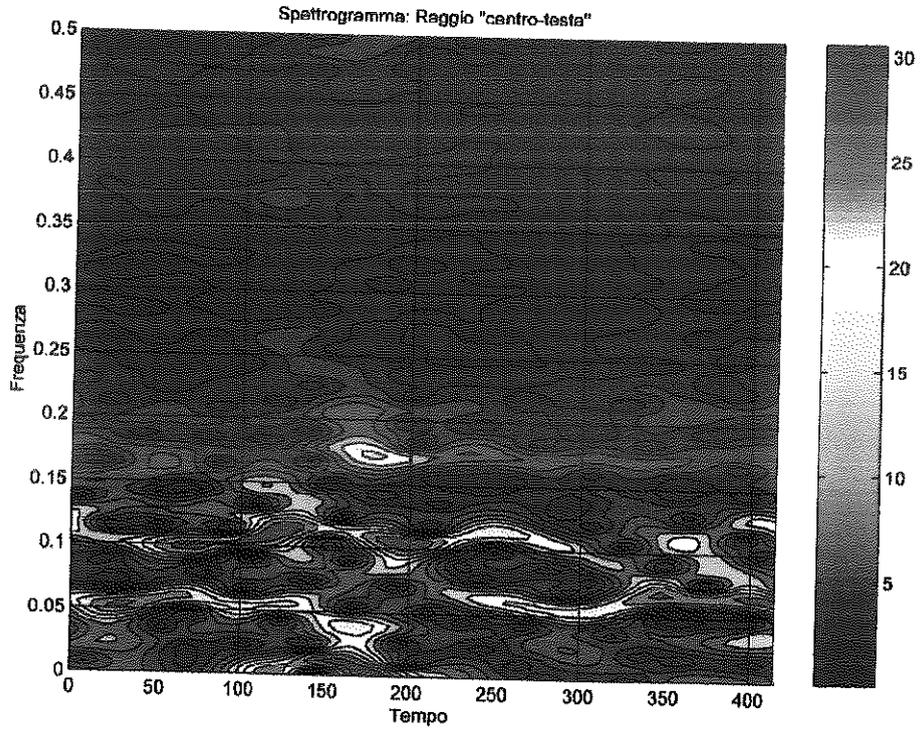


Figura 6

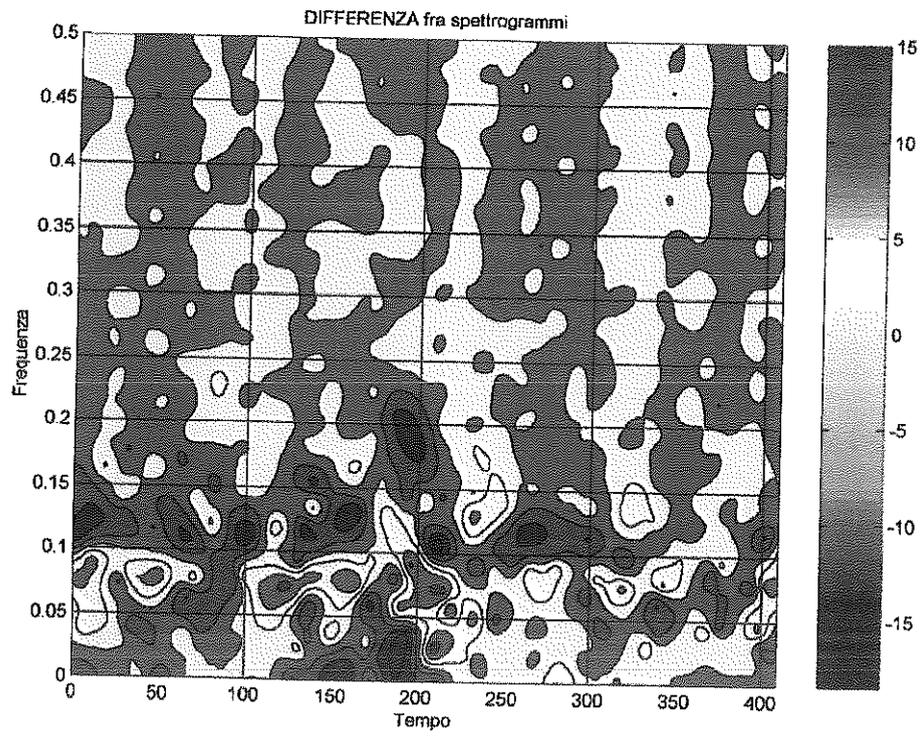


Figura 7

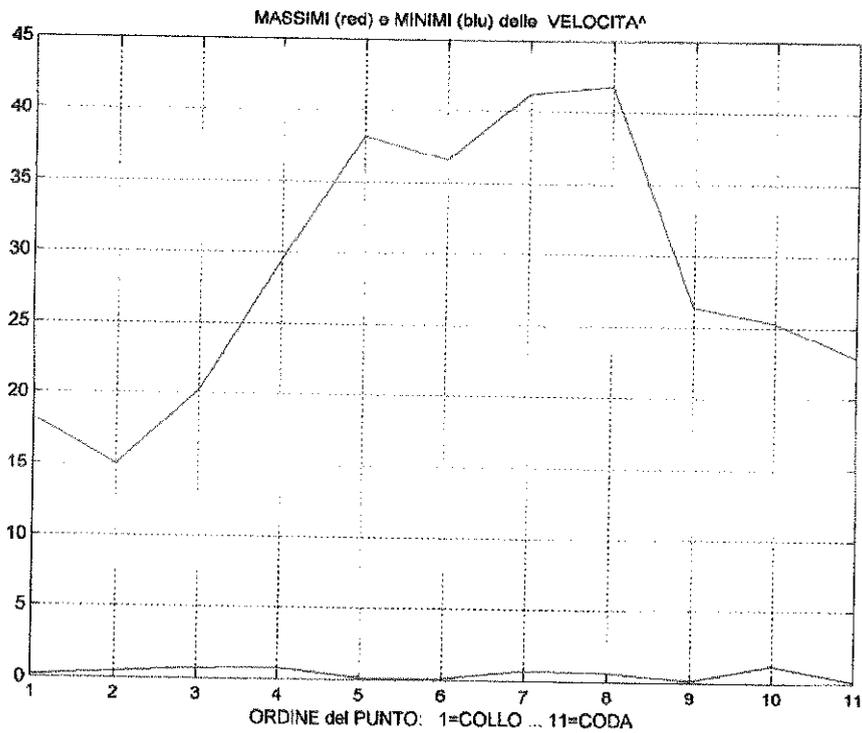
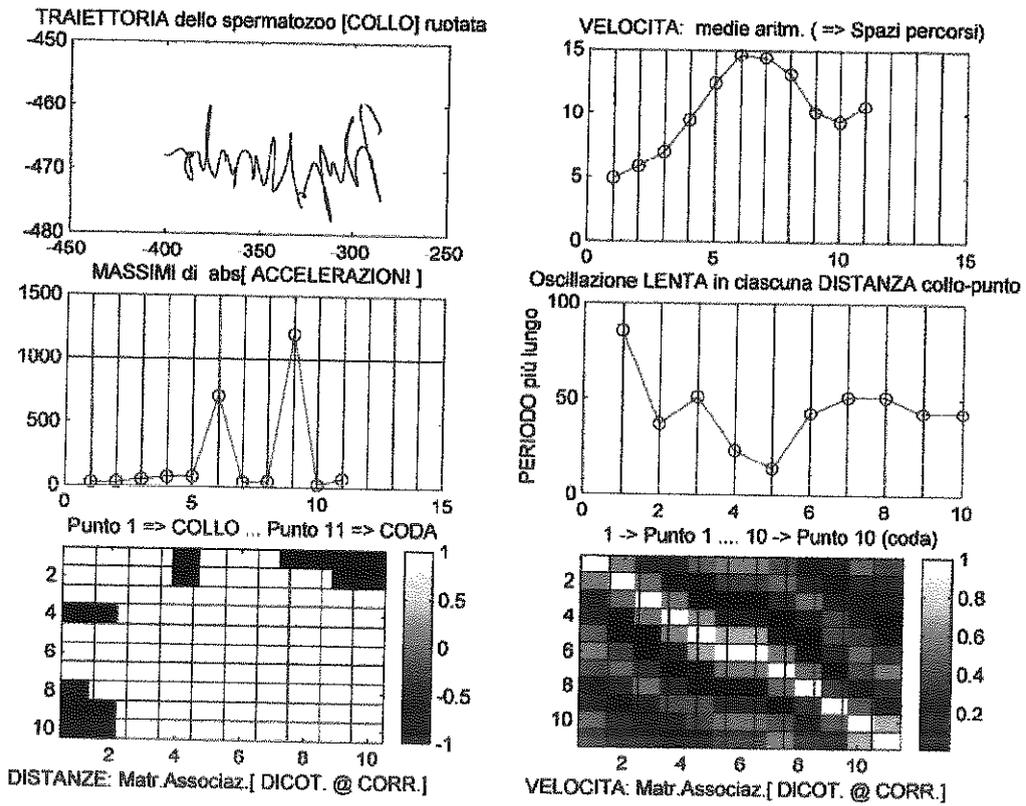


Figura 8

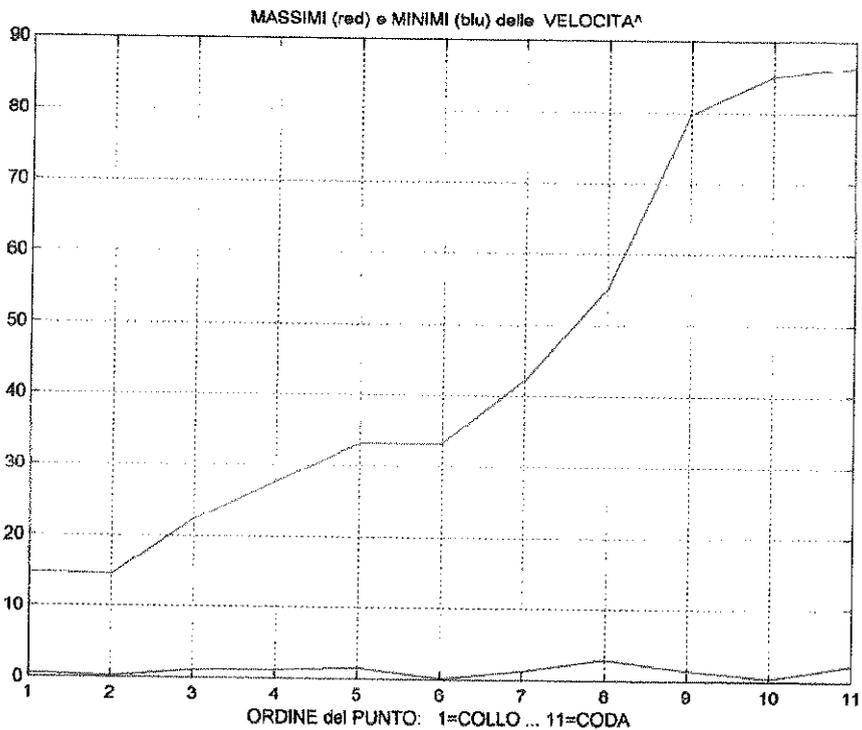
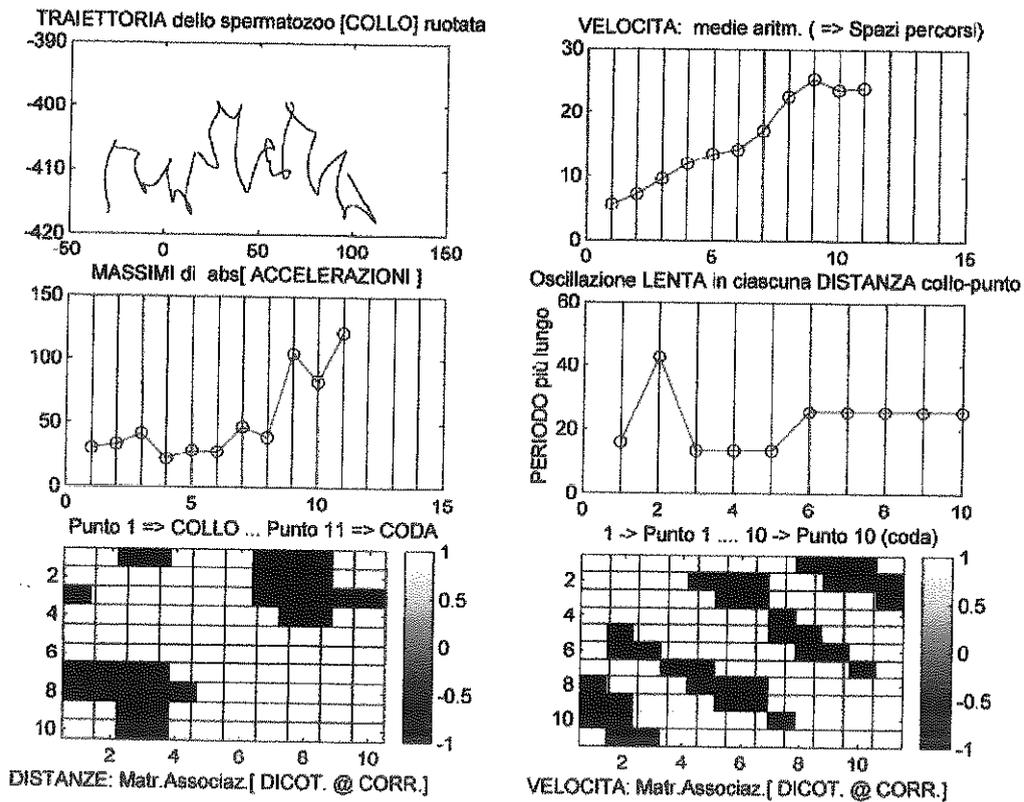


Figura 9

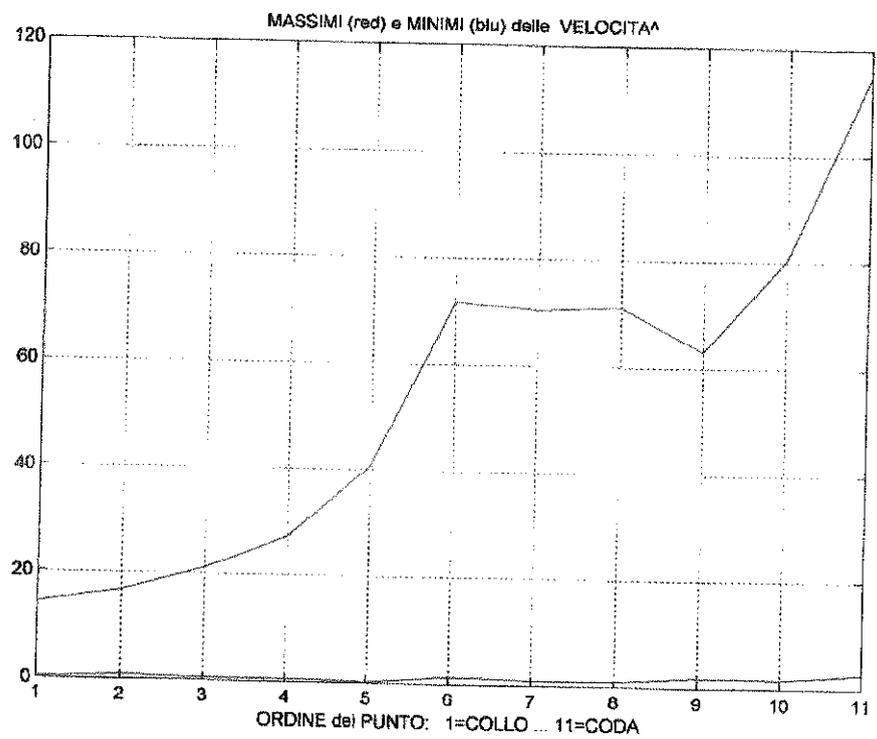
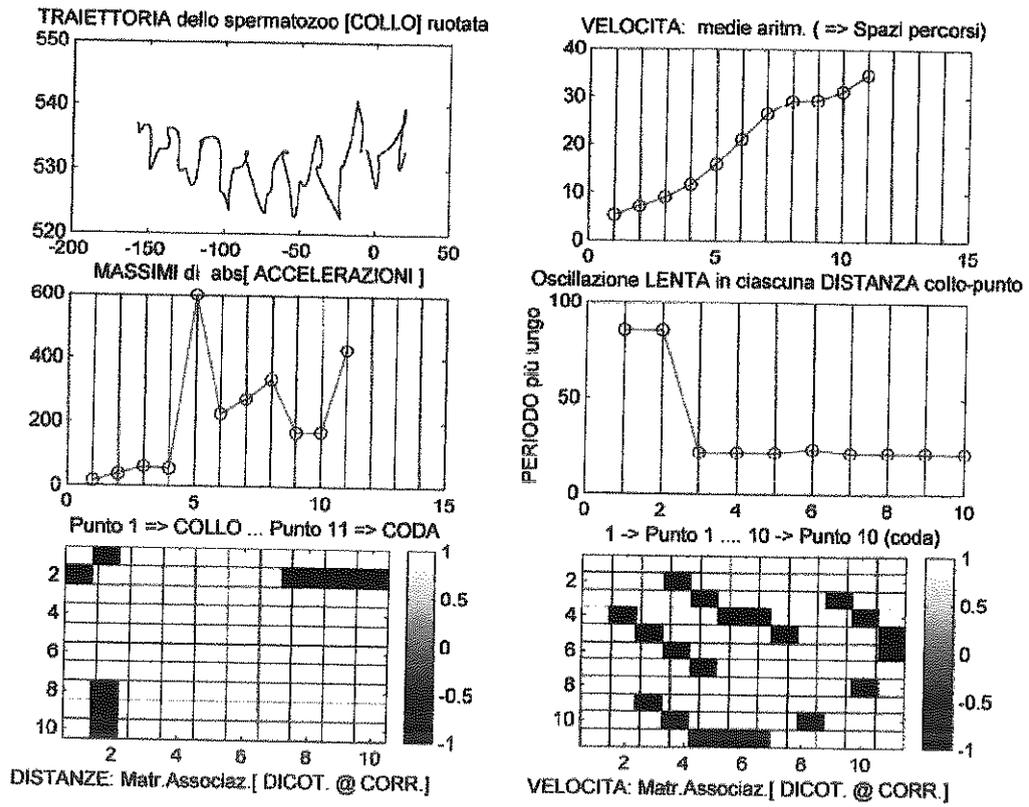


Figura 10

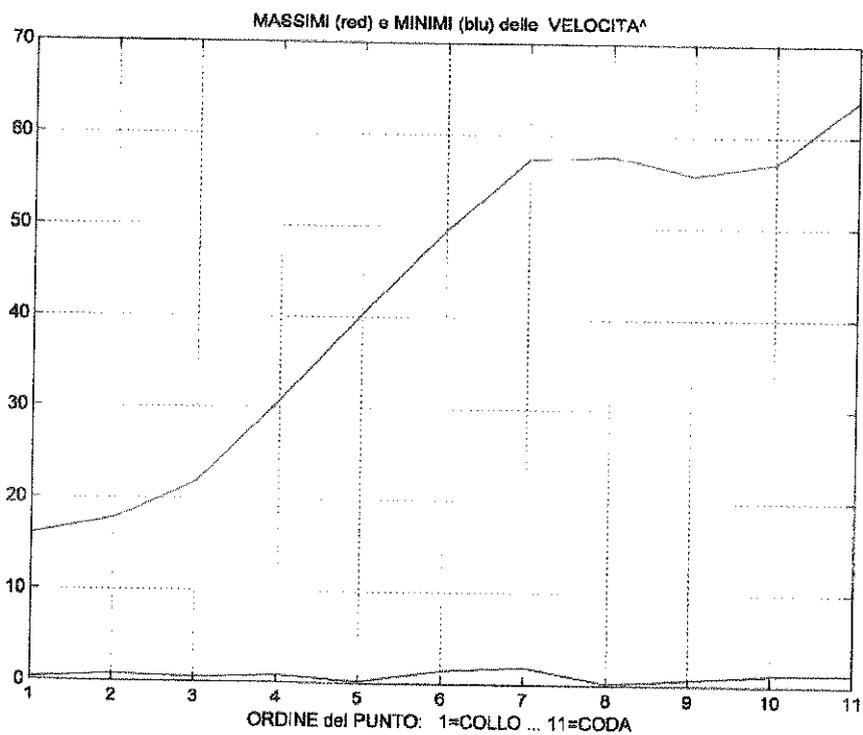
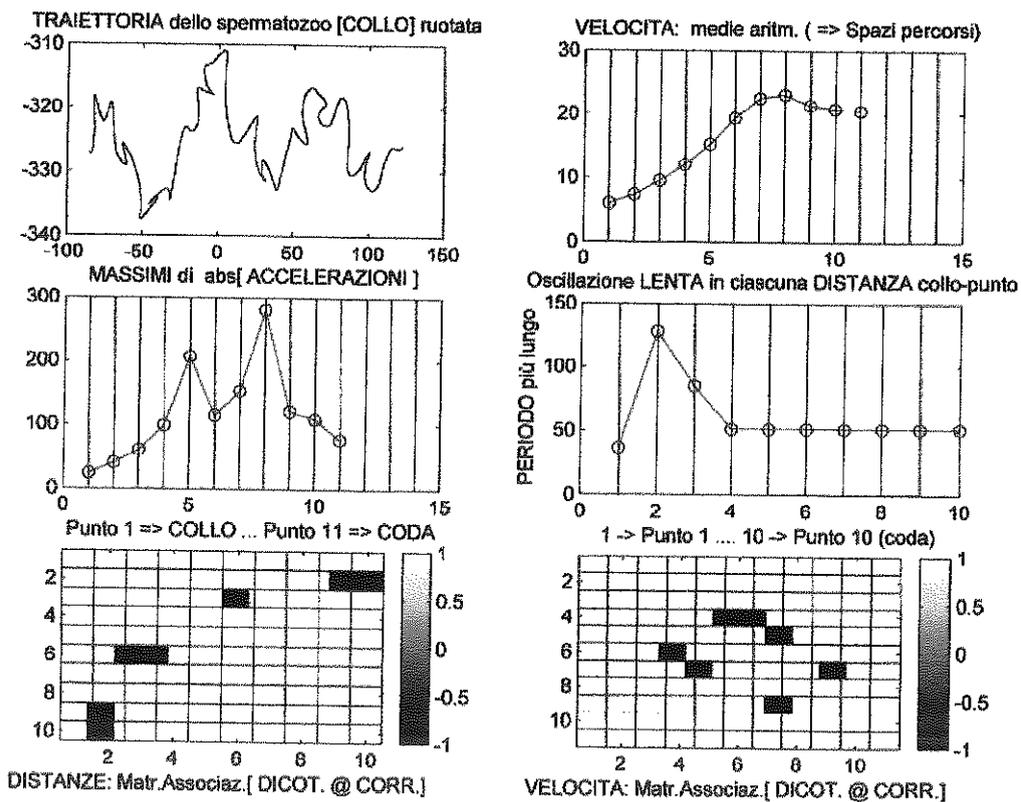


Figura 11

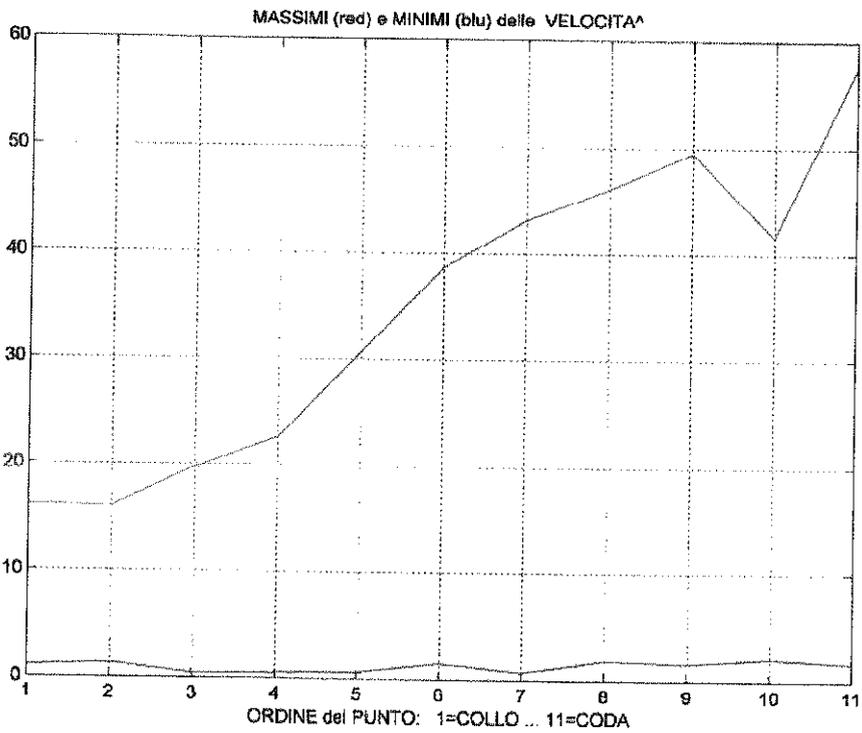
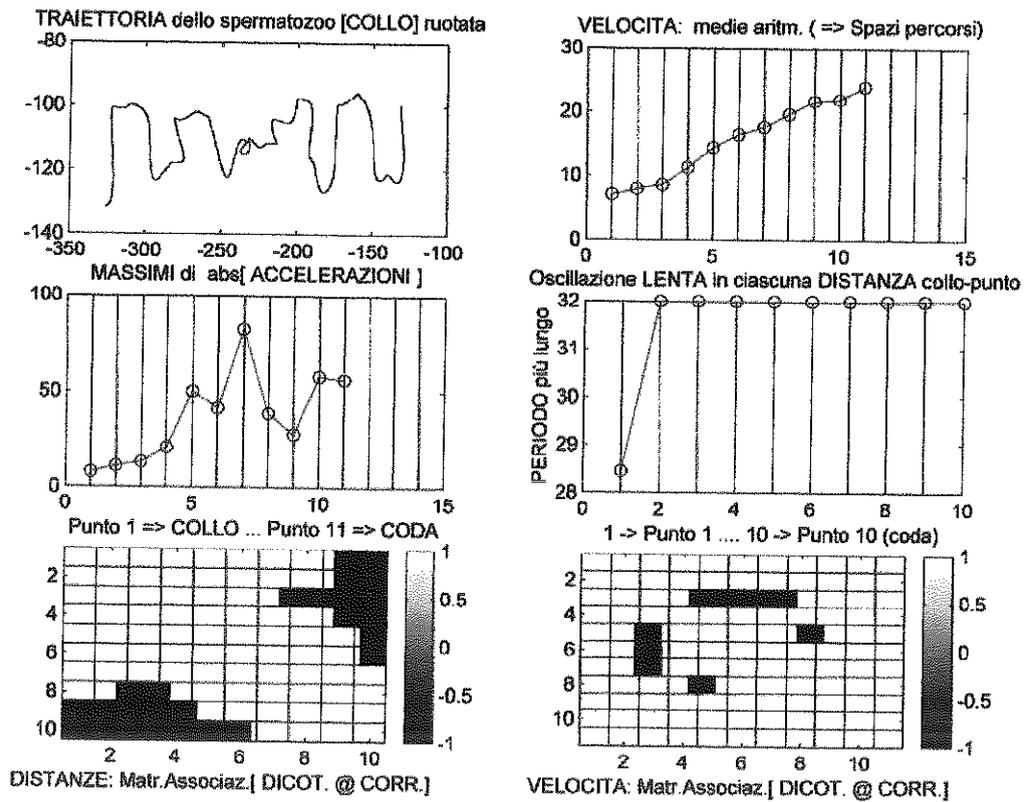


Figura 12

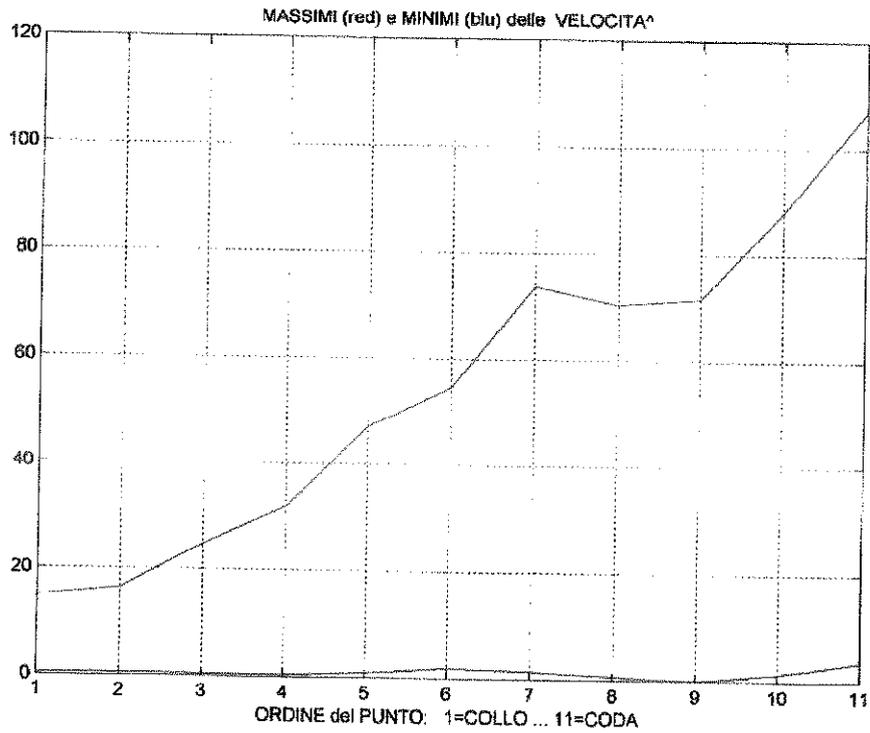
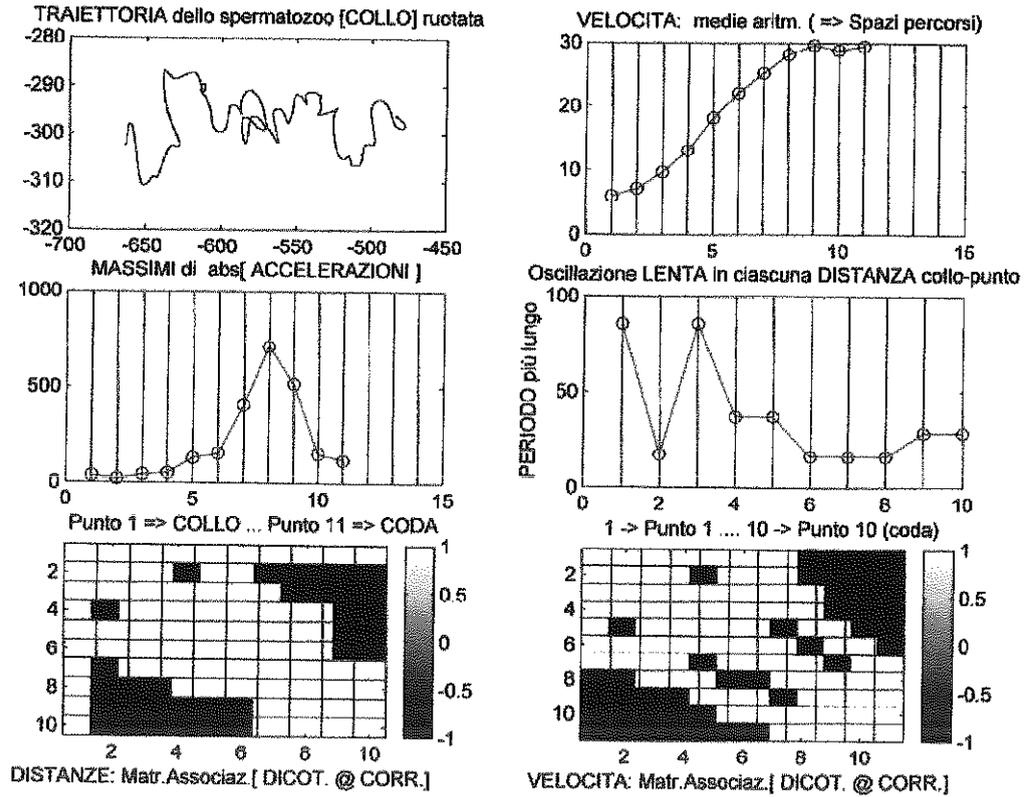


Figura 13

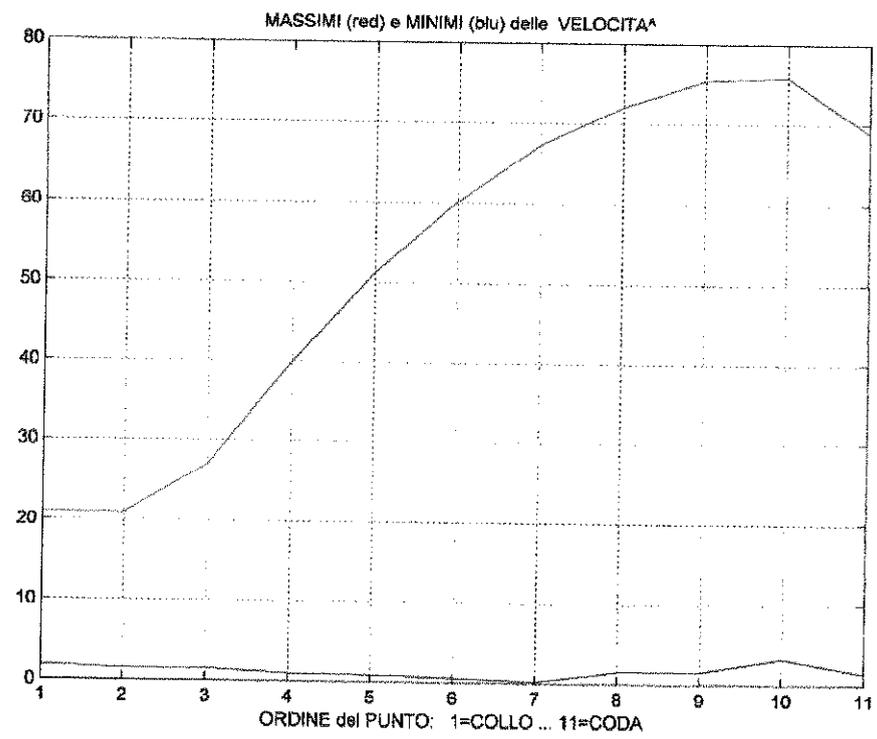
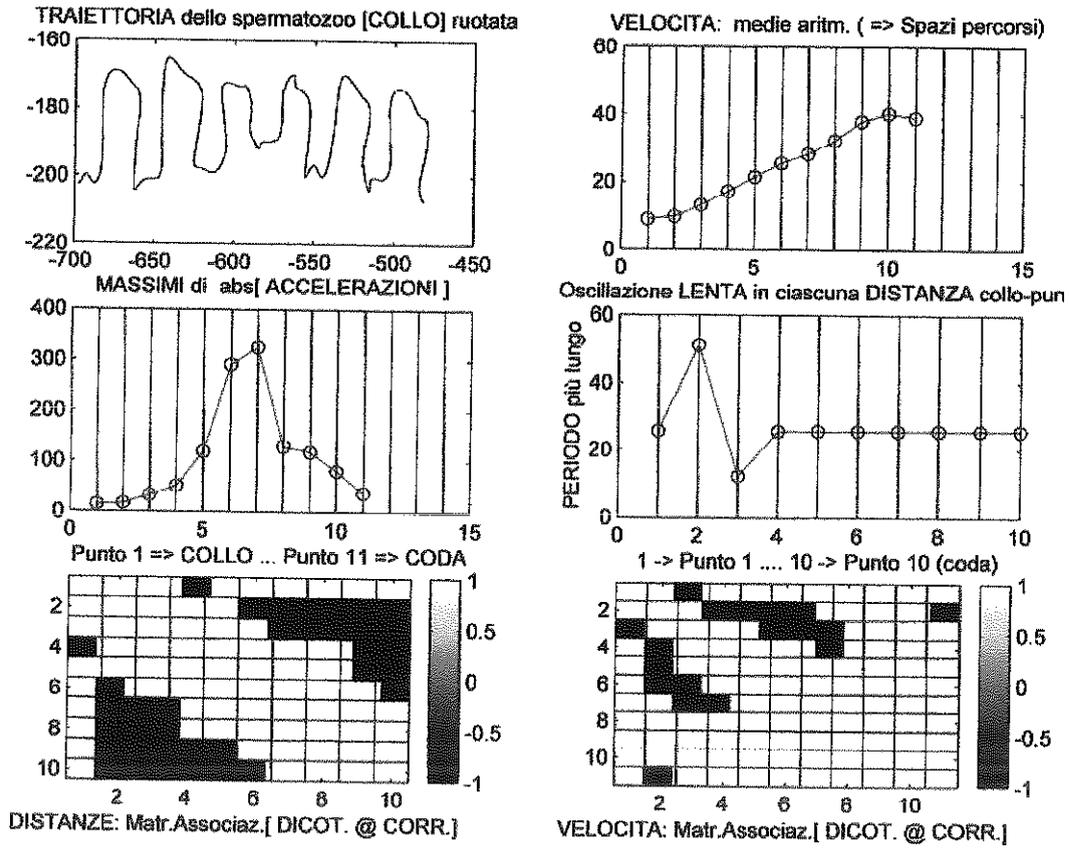


Figura 14

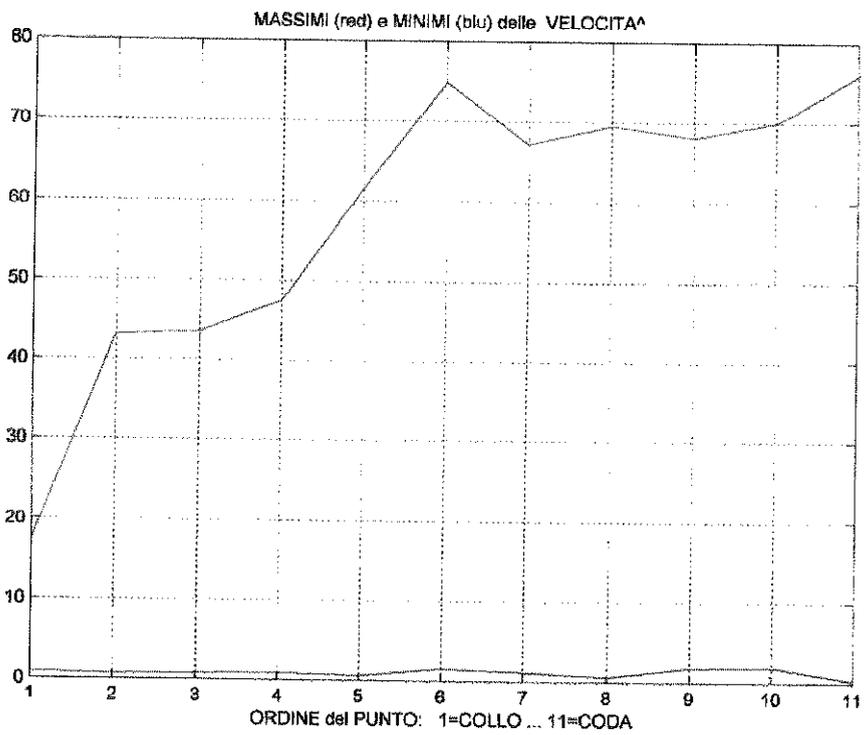
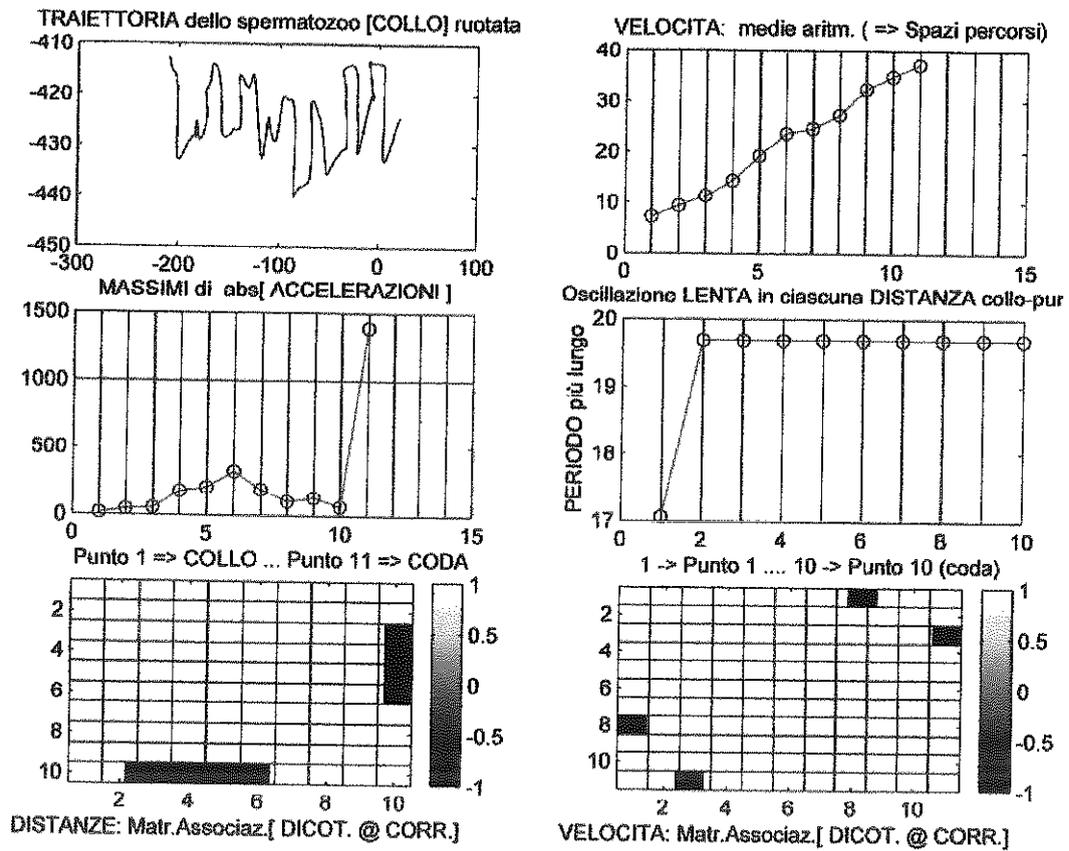


Figura 15

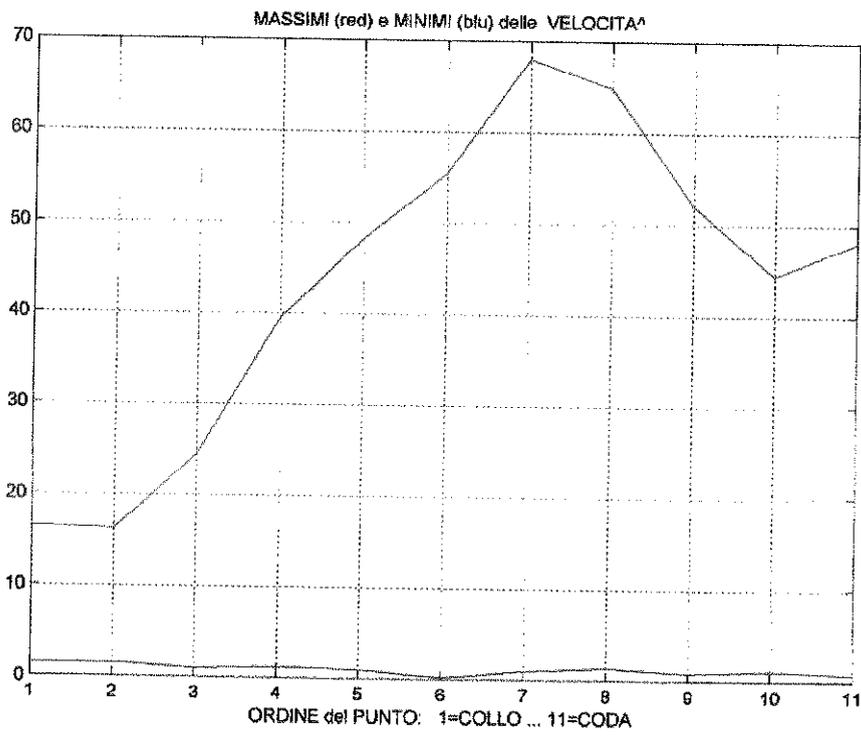
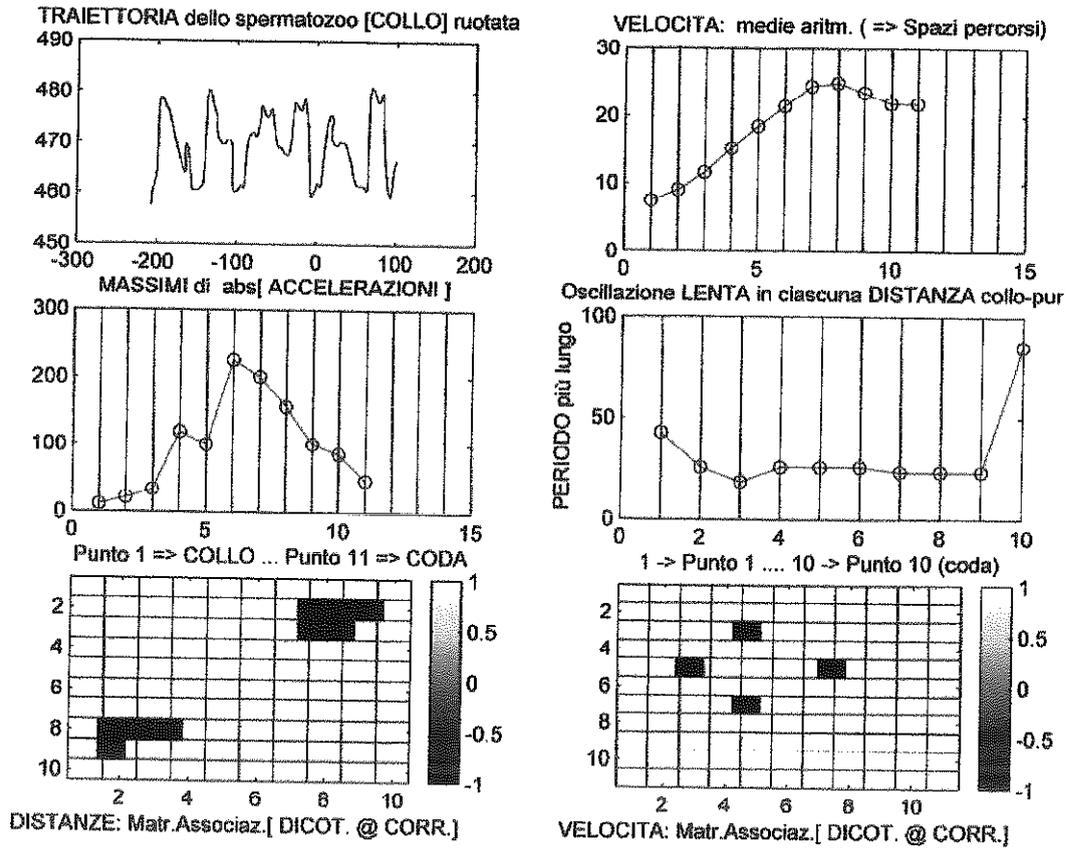


Figura 16

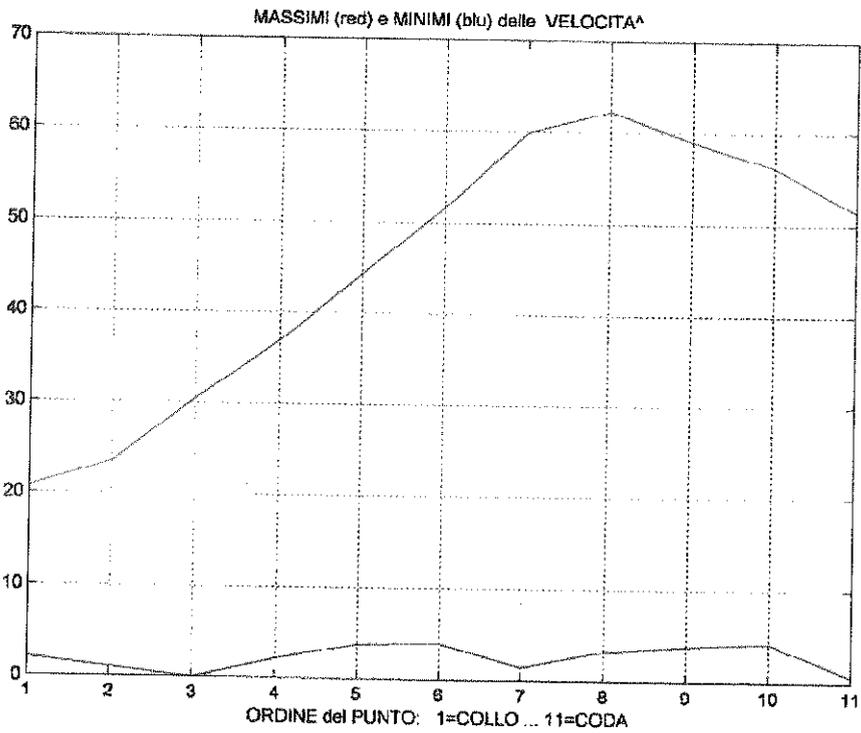
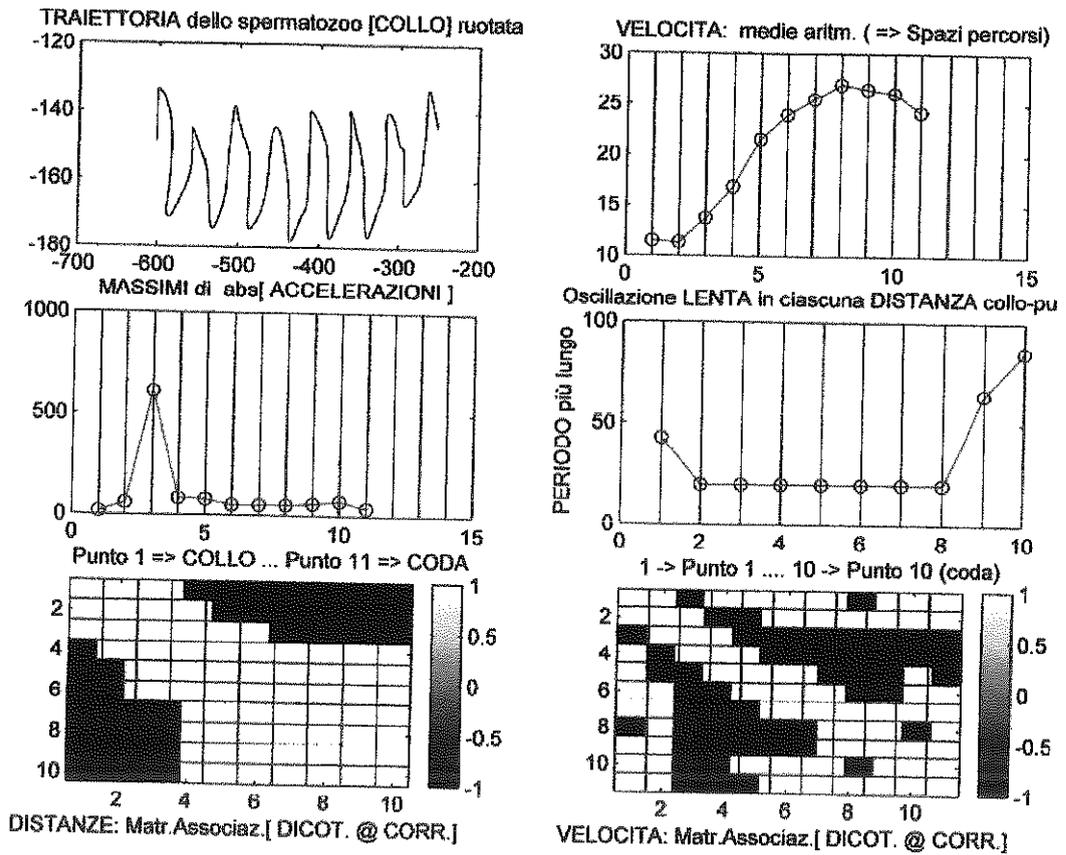


Figura 17

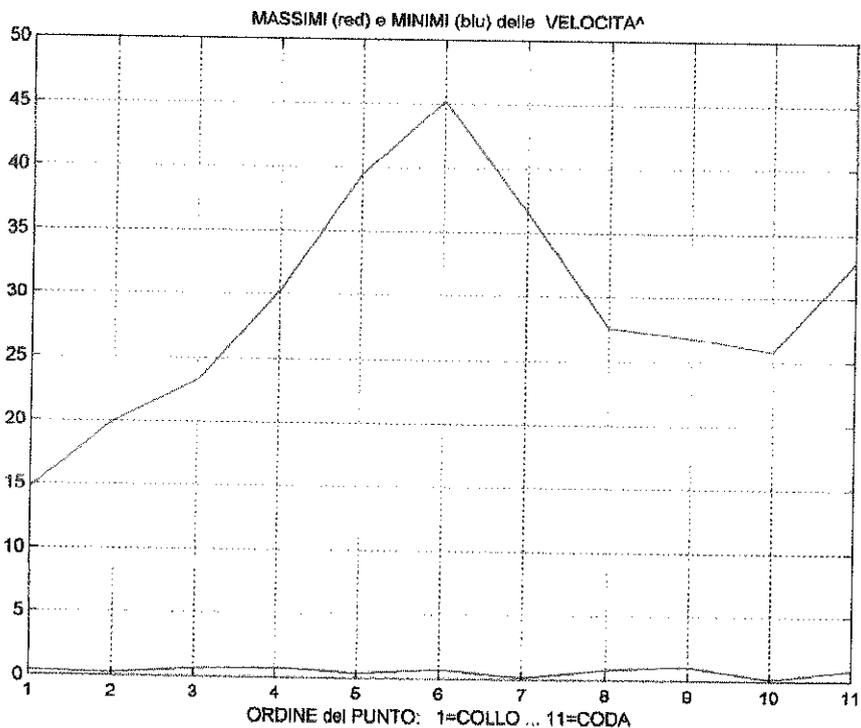
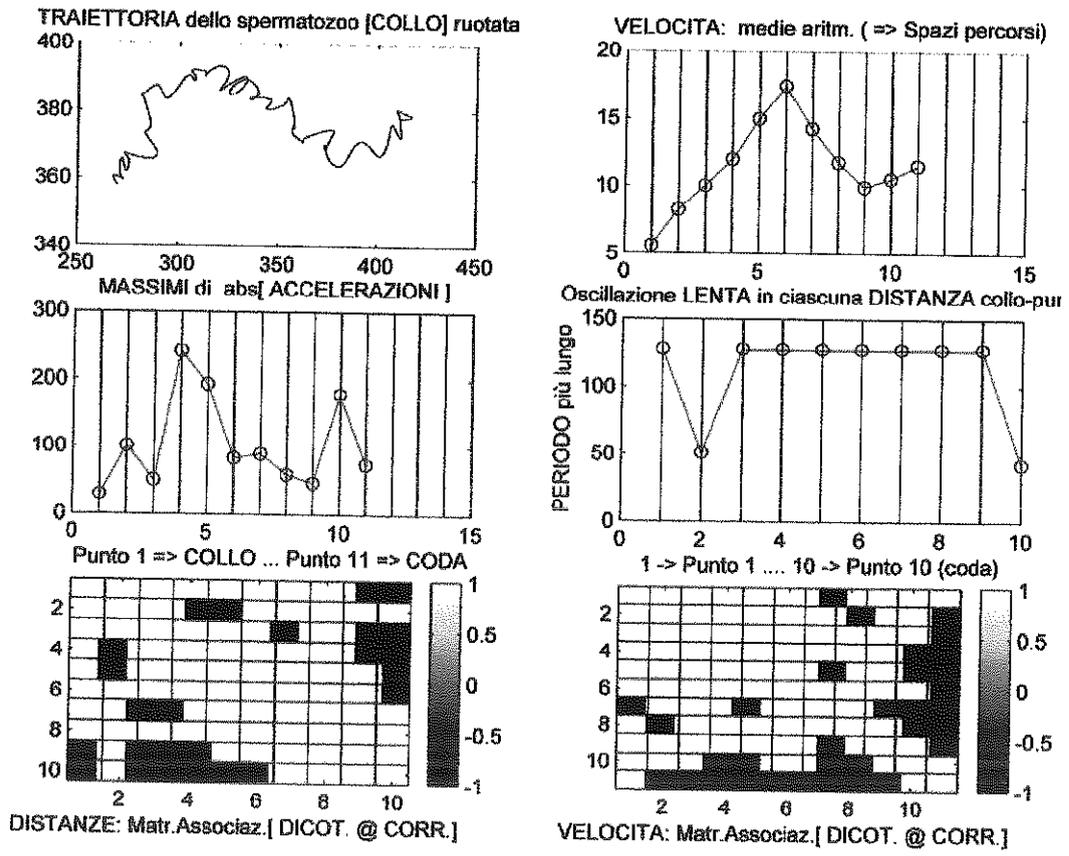


Figura 18

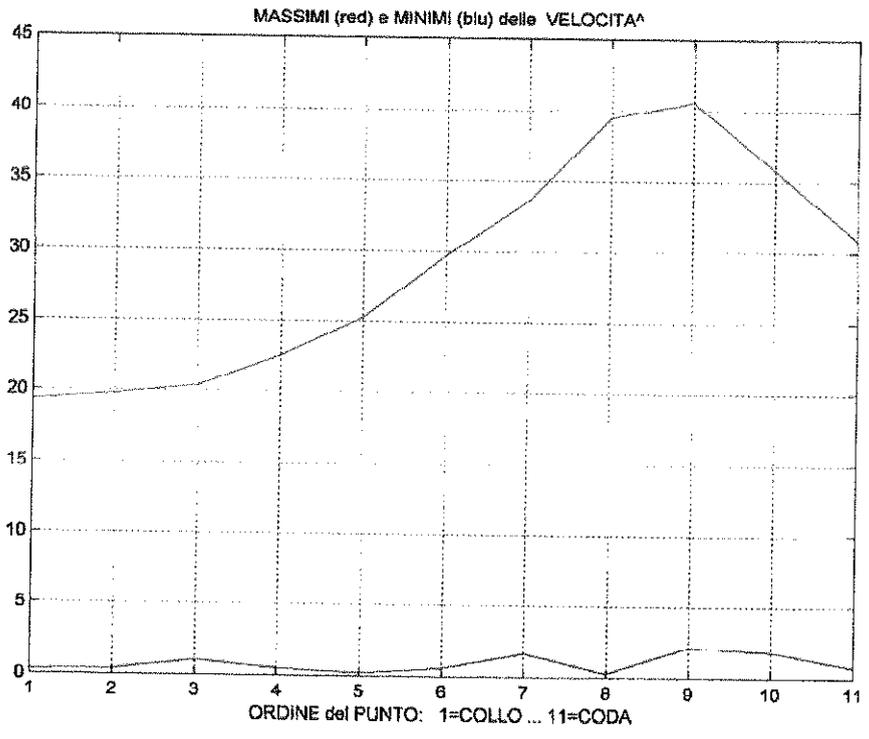
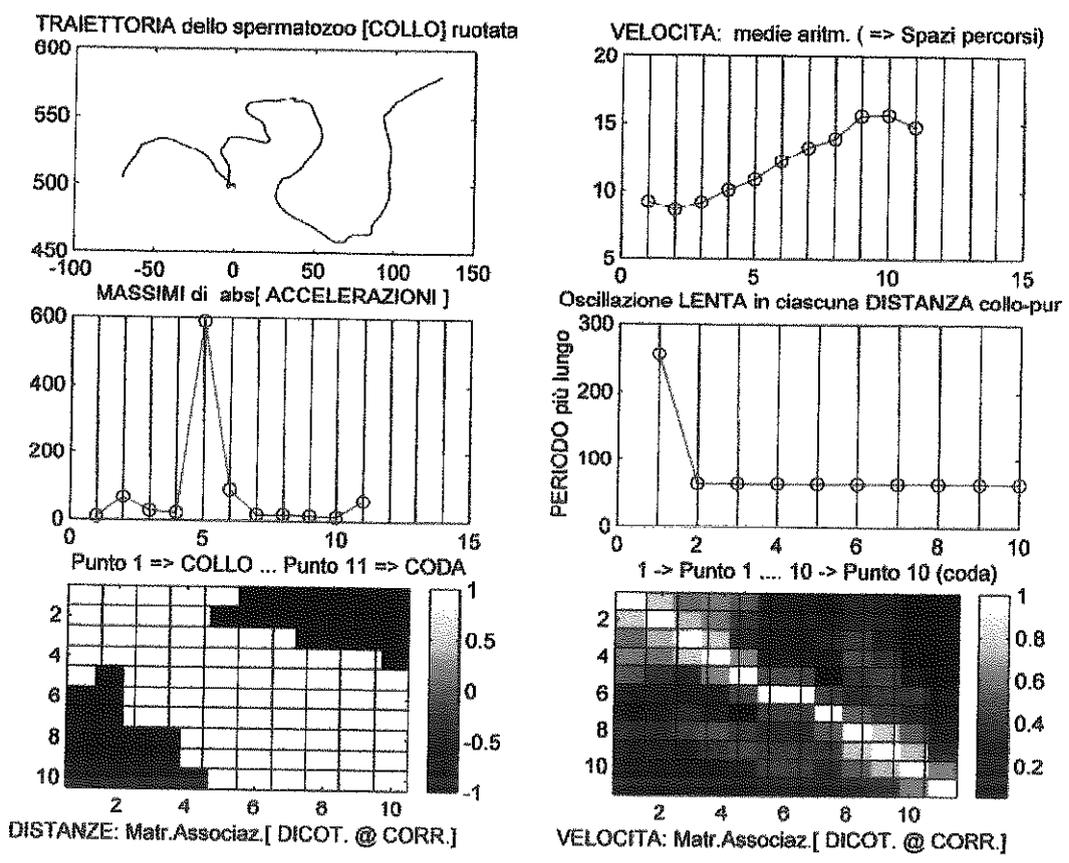


Figura 19

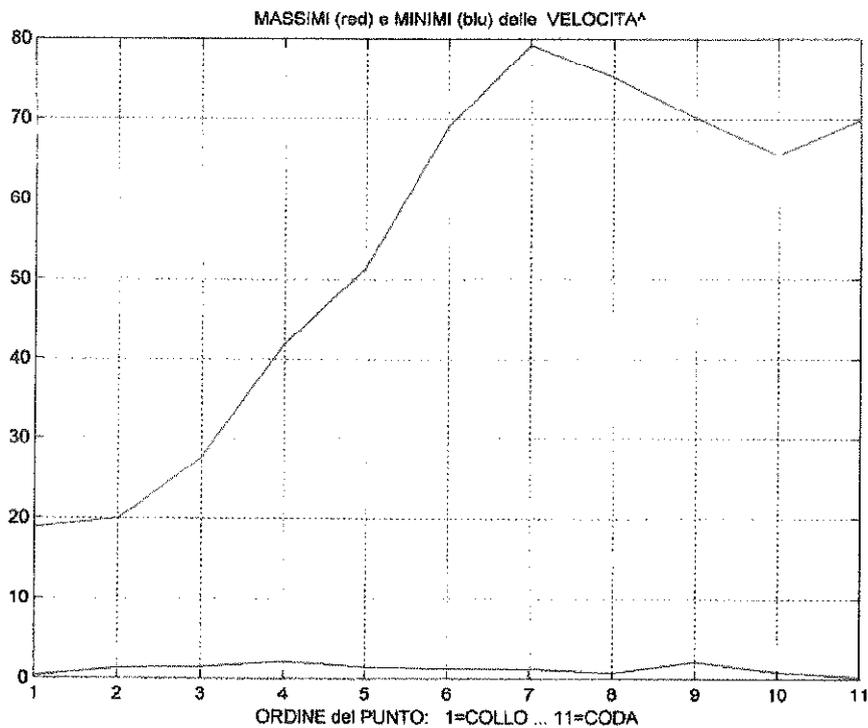
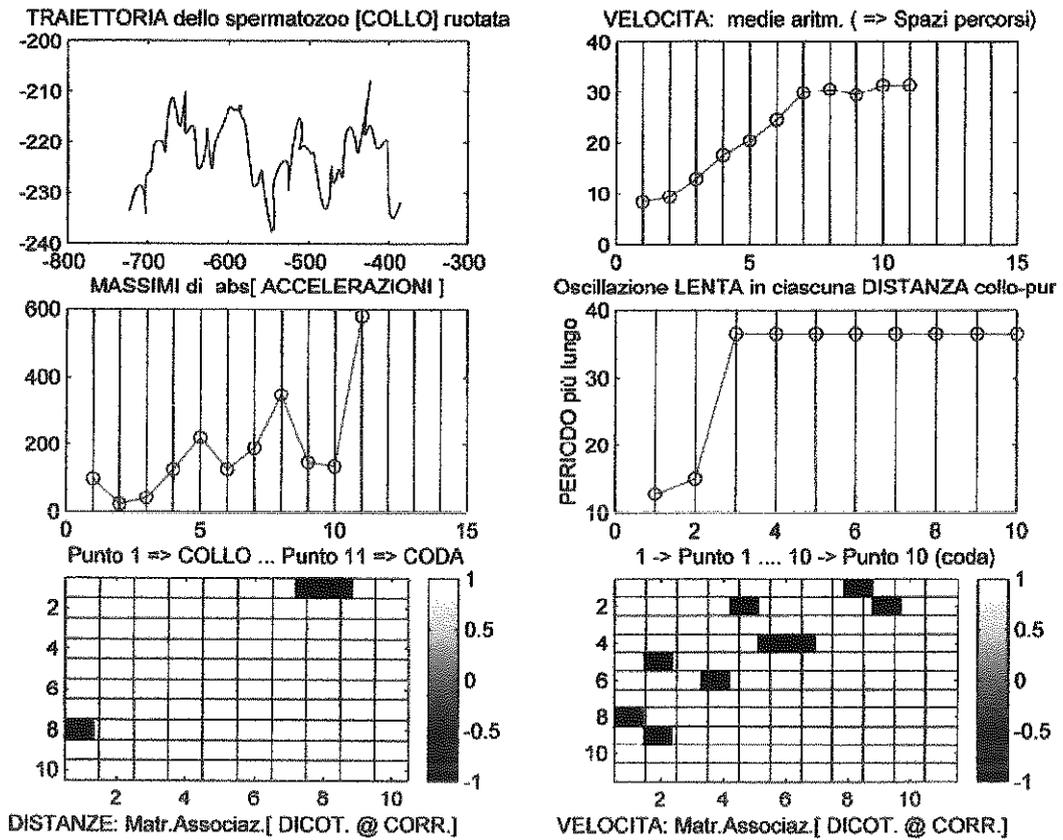


Figura 20

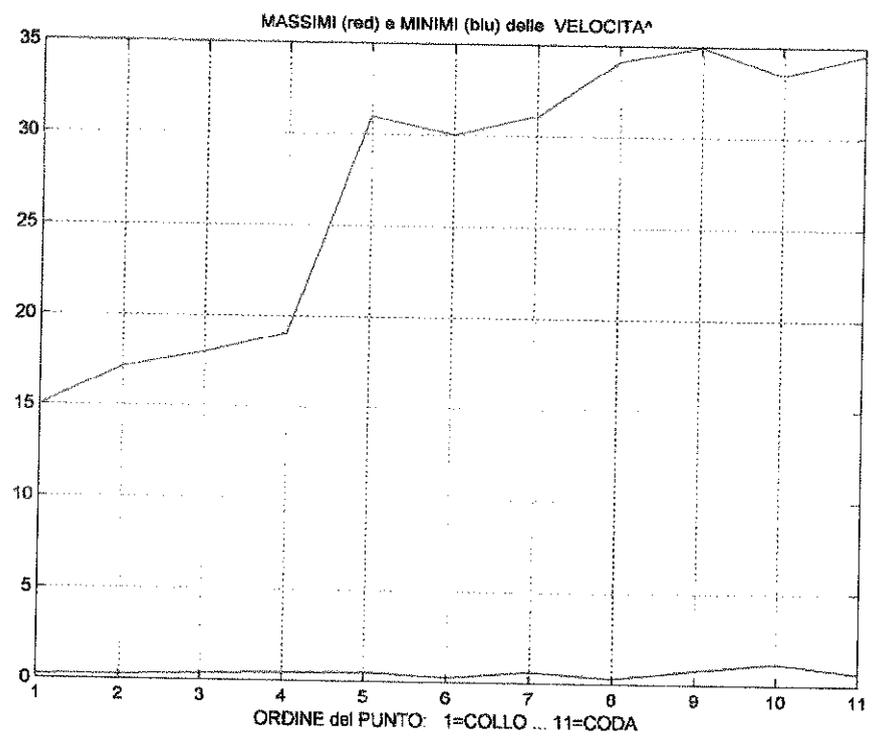
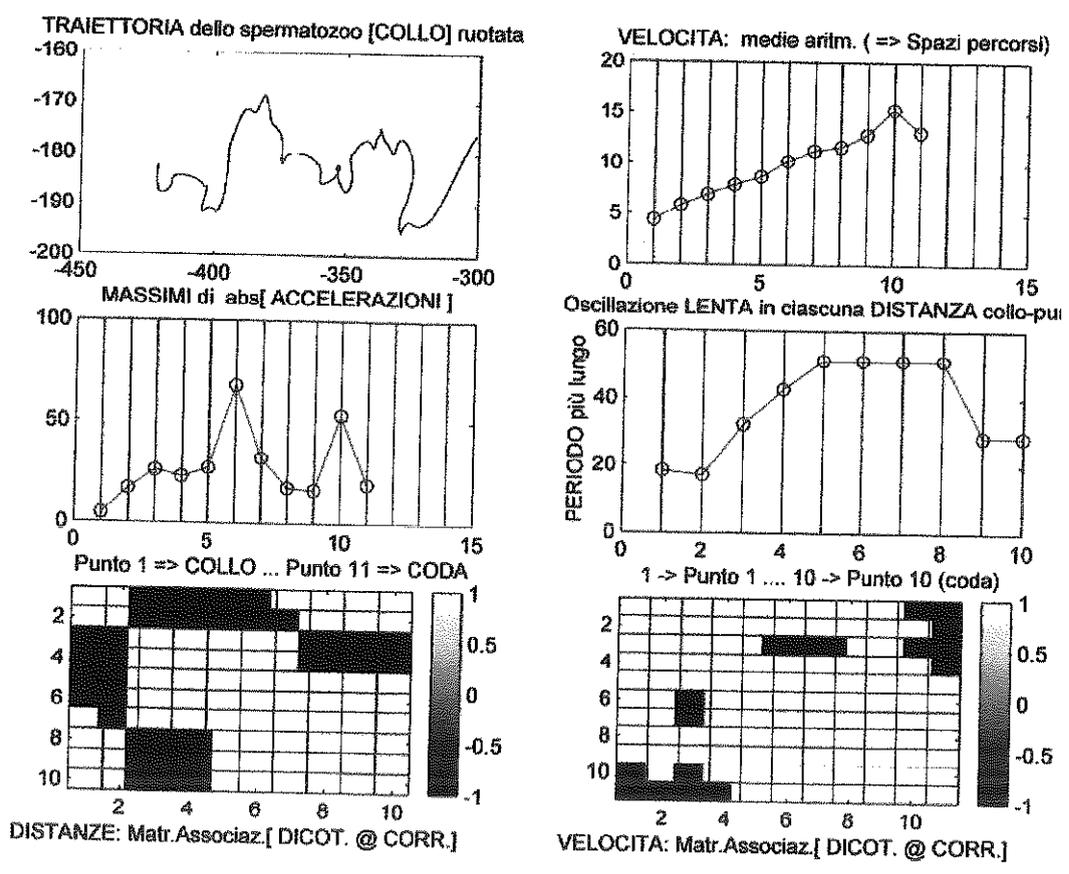


Figura 21

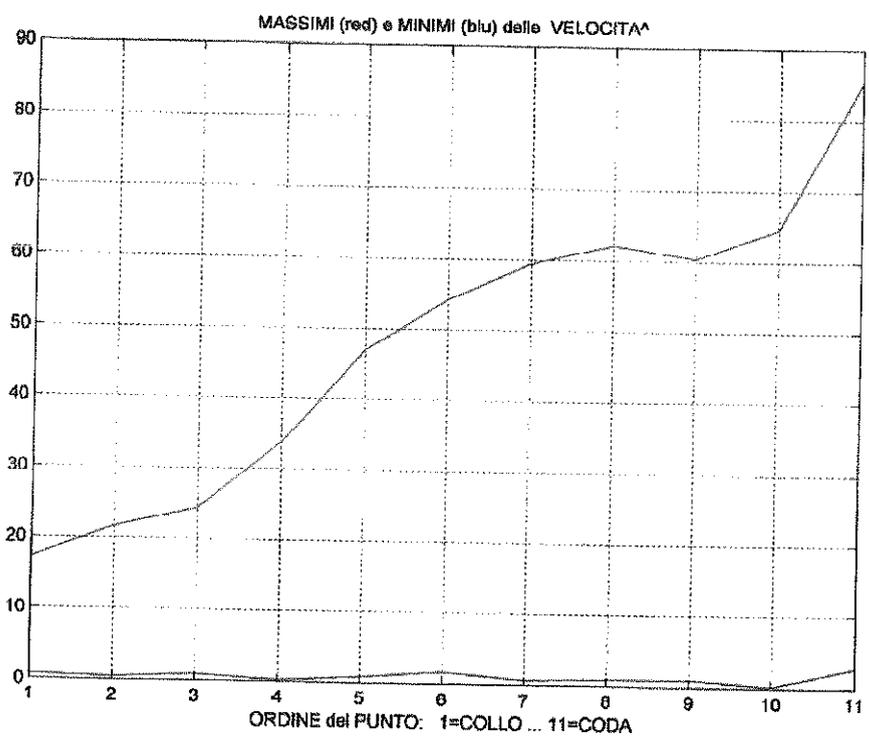
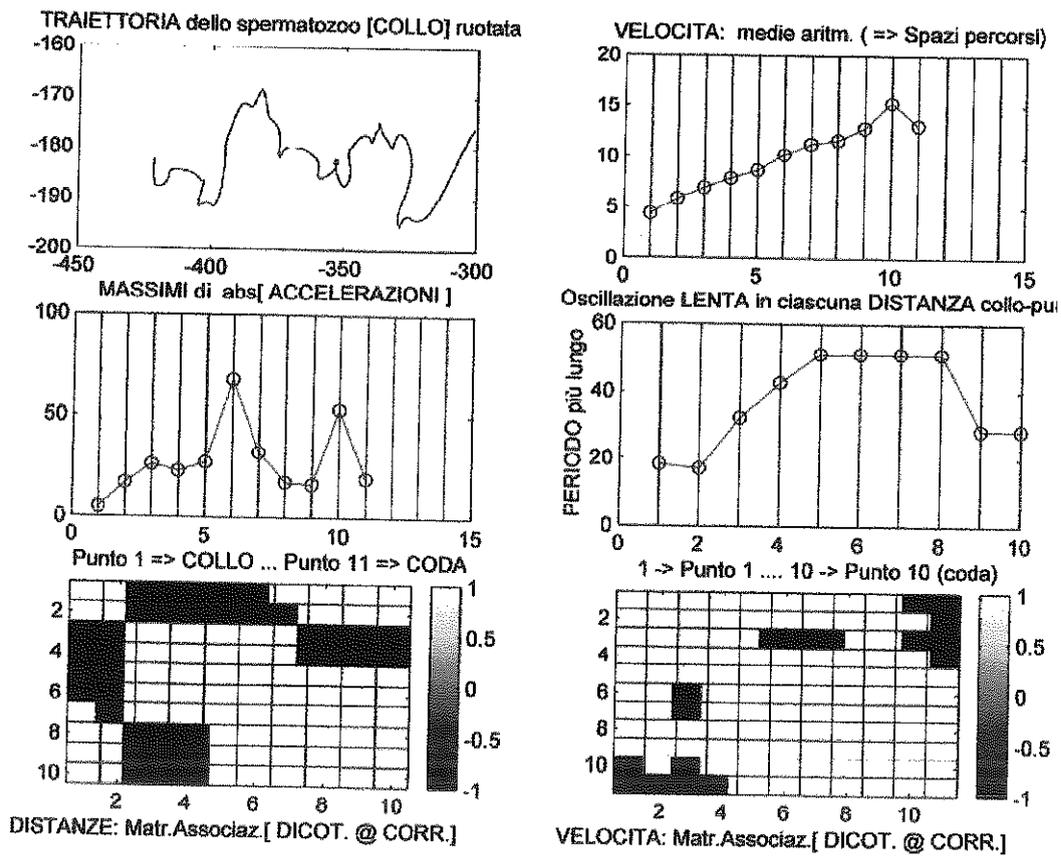


Figura 22