

B4-67

BOZZA

Sintesi di segnali audio basata su modelli fisici.  
Implementazione di un modello per la corda vibrante.

G.Bertini, A.Guerra, L.Tarabella

Nota Interna B4-67

Dicembre 1990

## Sommario

In questa nota viene presentato un'approccio alla sintesi di segnali audio con tecniche basate su modelli fisici (*Physical modelling*) e viene descritta l'implementazione di un algoritmo per la simulazione della corda vibrante di uno strumento musicale.

Nella prima parte si riassumono i concetti e le problematiche in relazione alla meccanica e al funzionamento degli strumenti musicali tradizionali e alla trasmissione del suono nei vari mezzi.

Successivamente viene proposto un modello della corda vibrante pizzicata e formulato l'algoritmo per il calcolo del segnale prodotto utilizzando tale modello.

Infine viene descritto il set-up utilizzato e discussi i risultati ottenuti dalla sperimentazione.

## INTRODUZIONE.

Nel settore della strumentazione elettronica musicale, professionale e commerciale, per l'elaborazione e la sintesi digitale di segnali audio, la grande diffusione di tali apparecchiature e lo sviluppo continuo della tecnologia elettronica hanno dato un impulso notevole alla ricerca di nuove tecniche di sintesi.

Le tecniche di sintesi attualmente adottate negli apparati di produzione elettronica del suono prodotti su scala industriale, sono basate su algoritmi di tipo matematico (FM, sintesi additiva, sottrattiva, distorsione non lineare, ecc.) []; esse, infatti, nel caso di imitazione dei suoni di strumenti musicali tradizionali, sono orientate alla generazione del segnale, prescindendo dal meccanismo fisico con cui vengono prodotti, limitandosi all'analisi e alla sintesi di una determinata funzione temporale.

Uno dei principali problemi legati a queste tecniche è la mancanza di una corrispondenza ben definita tra il cambiamento di un parametro e il risultato sonoro prodotto che quindi non sempre è prevedibile, costringendo l'utente a sperimentarne empiricamente l'equivalente acustico.

Negli ultimi anni sono iniziati studi e ricerche per la sintesi digitale di segnali, basati sulle leggi che governano la meccanica di un determinato fenomeno acustico, analizzando la trasmissione delle onde sonore prodotte dalla sorgente fisica all'ambiente circostante.

Questo metodo sembra poter offrire un maggiore grado di flessibilità e consentire un'utilizzazione più intuitiva rispetto alle tecniche attuali.

Fondamentalmente, uno strumento musicale è schematizzabile con tre parti ben distinte: l'eccitatore, il meccanismo e mezzo di propagazione delle onde ed il risuonatore.

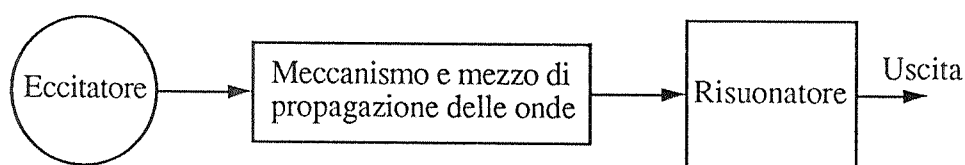


Fig.1

In base a questa distinzione, la simulazione tramite modello fisico consiste nell'esprimere con leggi opportune il funzionamento degli elementi essenziali dello strumento musicale e le loro interazioni.

In tale direzione sono stati fatti diversi tentativi di simulazione (J. O. Smith C.C.R.M.A. Stanford-California, G. De Poli C.S.C. Università di Padova ed altri) che si differenziano in qualche presupposto, relativamente al diverso approccio fisico.

Il concetto di base, comune a tali modelli e a quello proposto in questa nota, partono dalla soluzione di D'Alembert dell'equazione d'onda.

Sostanzialmente, l'operazione di generazione di un segnale è compiuta eseguendo un determinato algoritmo, al quale sono passati alcuni parametri di ingresso rappresentanti i valori di determinate grandezze fisiche e geometriche (lunghezza, tensione di una corda, sezione trasversale, distanza dal punto di eccitazione, ecc.).

In definitiva, simulare uno strumento musicale con questo tipo di approccio significa assemblare idealmente le tre parti suddette in maniera opportuna, rispettandone le relative leggi fisiche.

In particolare, in relazione al modello schematizzato in Fig.1, l'oggetto del nostro lavoro consiste nella simulazione del meccanismo e del mezzo di propagazione delle onde.

Nel caso di simulazione di uno strumento reale, lo scopo è quello di arrivare ad ottenere un risultato sonoro il più possibile paragonabile a quello ottenuto con le tecniche di sintesi attuali.

I vantaggi ottenibili dalle tecniche di sintesi basate sui modelli fisici sono molteplici:

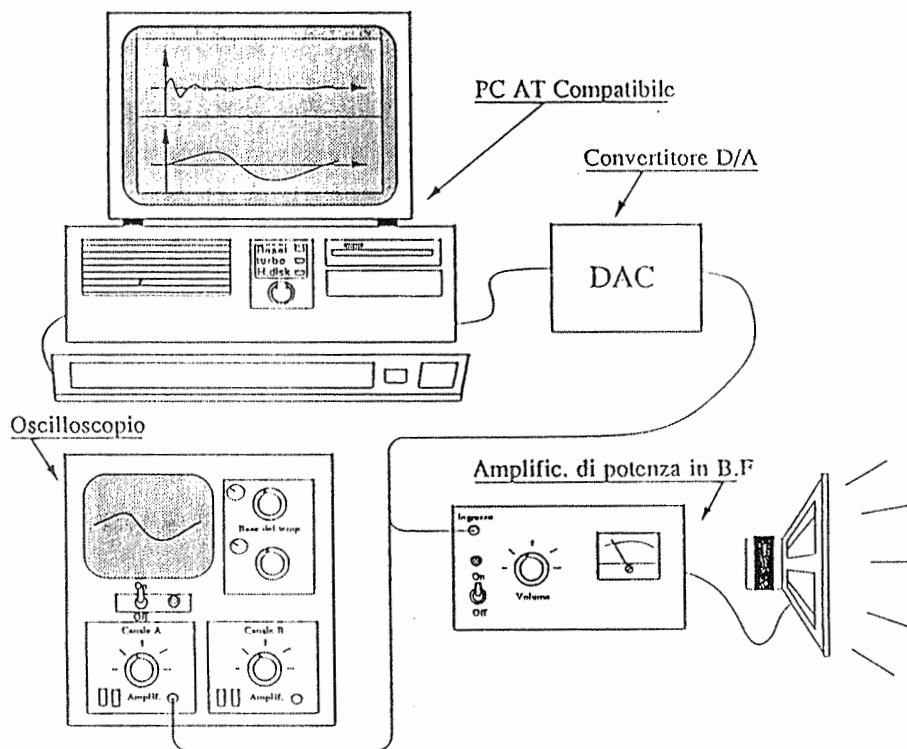
- Corrispondenza diretta tra i parametri a disposizione e la realtà costruttiva dello strumento.
- Possibilità di gestire il range dei parametri in gioco oltre i limiti imposti dalla realizzabilità fisica stessa.
- Realizzazione di strumenti musicali con alcune caratteristiche "ideali" altrimenti non realizzabili in pratica (basti pensare ad un'arpa eccitata dall'archetto di un violino).
- Approccio più intuitivo nella realizzazione di uno strumento, dato che l'assemblaggio viene eseguito come se fossero a disposizione realmente i vari pezzi costituenti lo strumento stesso.

D'altronde, nello stato dell'arte attuale, per avere una resa acustica accettabile occorre una quantità di calcolo molto più grande rispetto a quella necessaria alle altre tecniche di sintesi.

Per verificare il grado di bontà del modello proposto è stato allestito un set-up costituito essenzialmente da un PC MS-DOS compatibile e da un convertitore D/A a 16 bit e il software di gestione è stato realizzato in linguaggio C.

Per ottenere la generazione di segnali in tempo reale sarà necessario ottimizzare l'implementazione dell'algoritmo e utilizzare apparati di calcolo special purpose (ad esempio moduli con microprocessori DSP).

- Sistema hardware



- Strumento software

Linguaggio C della Microsoft, versione 5.01

## §1.1 - Il suono e le sue proprietà principali.

Il suono è definito come una qualsiasi vibrazione di un mezzo solido, liquido o gassoso, compresa nella gamma di frequenze percepibili dall'orecchio umano, cioè, tra 16 Hz e 16 KHz. La sua manifestazione è legata ai movimenti delle particelle costituenti il mezzo di propagazione, qualora quest'ultimo sia perturbato da un agente esterno; le caratteristiche di un suono sono quindi strettamente legate alla natura del mezzo stesso. Da ciò risulta evidente che il suono non può propagarsi nel vuoto.

Si faccia riferimento all'aria quale mezzo di propagazione. A pressione e temperatura ambiente, essa si comporta con buona approssimazione come un gas ideale, rispondendo quindi alla nota legge di stato

$$PV=nRT \qquad (1.1)$$

dove P, V e T sono rispettivamente la pressione, il volume e la temperatura del gas considerato, n è il numero di moli dello stesso ed R è la costante dei gas.

In questo caso, è possibile schematizzare il mezzo in questione con un modello semplificato dove, in particolare, le sue molecole possono approssimarsi a dei punti materiali, e gli urti tra questi ultimi sono assai improbabili da ritenersi trascurabili.

In assenza di perturbazioni, l'aria si trova in una condizione di equilibrio, mantenuto da forze di legame di varia natura; in tale situazione è possibile affermare che le sue particelle sono mediamente ferme.

Un'azione perturbatrice agente sul sistema si manifesta come una forza ulteriore che va ad alterare il suddetto equilibrio. La perturbazione imprime un moto alle particelle immediatamente vicine alla zona interessata.

Queste ultime, a loro volta trasferiscono parte della propria energia alle altre particelle con cui sono direttamente legate; durante questo trasferimento, il contenuto energetico delle prime, dovuto alla loro quantità di moto, diminuisce, facendo sì che le forze di legame tornino ad essere prevalenti; essendo queste principalmente di tipo elastico imprimono ad ogni particella un moto oscillatorio forzato stazionario o smorzato a seconda della durata della perturbazione.

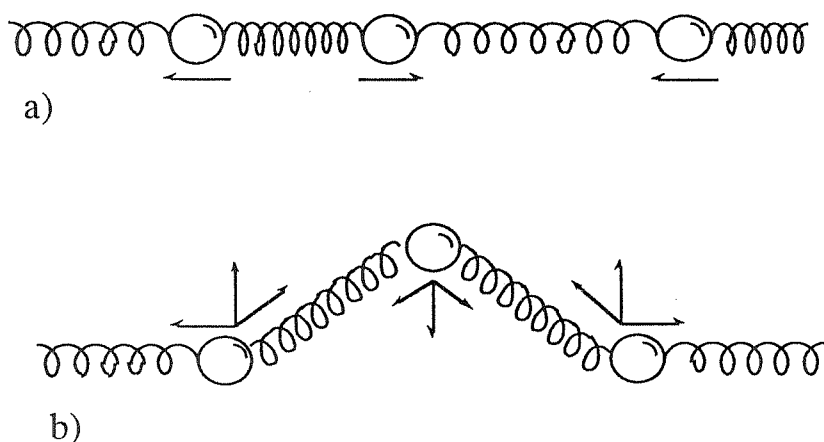


Fig. 1.1

Questo fenomeno si ripete a catena fino a quando l'energia trasmessa non diventa inferiore alle altre forme di energia in gioco, che tendono a riportare il sistema in condizioni di equilibrio. In Fig.1.1 sono riportati due modelli semplificati monodimensionali relativi rispettivamente a scostamenti longitudinali e trasversali; le frecce, che indicano la direzione delle forze agenti su ogni particella, possono essere facilmente interpretate anche in termini di pressione [4] secondo la nota relazione

$$dF = PdS \quad (1.2)$$

la quale afferma che la pressione  $P$  relativa ad un certo elemento di superficie  $dS$  è uguale al differenziale della forza  $dF$  esercitata su tale superficie.

In realtà, da un punto di vista microscopico, il meccanismo di trasferimento di energia è assai più complesso, in quanto le interazioni non avvengono tra due sole particelle alla volta; inoltre, le forze di legame agiscono spazialmente e non in una sola direzione. Questi fattori indicano che a tale livello non è facile distinguere una certa regolarità nell'evoluzione del fenomeno.

A livello macroscopico, invece, è possibile individuare un meccanismo di propagazione strettamente legato alla legge che governa dinamicamente l'azione perturbatrice; se, ad esempio, tale azione è di tipo sinusoidale, nell'aria circostante si verifica una successione di strati addensati e strati rarefatti alternativi che seguono la stessa legge dell'eccitazione. L'esistenza di queste zone a diversa densità giustifica anche la corrispondente variazione di pressione precedentemente accennata.

A rigore, la perturbazione di un mezzo aeriforme produce anche una variazione di temperatura che, in accordo alla relazione (1.1), nei limiti in cui questa può ritenersi

valida, ha la sua influenza sul segno della variazione di pressione, il quale può quindi risultare anche opposto a quello della variazione di densità. In ogni modo, la variazione di temperatura nel tempo è talmente lenta nei confronti della variazione delle altre grandezze di interesse principale da potere essere considerata trascurabile.

Ciò porta ad affermare che, in condizioni ambientali, le variazioni di densità e di pressione dell'aria sono strettamente legate in maniera direttamente proporzionale.

Da quanto detto risulta evidente che la propagazione del suono nell'aria avviene per trasferimento di energia e non di materia e risulta descrivibile dall'andamento temporale della pressione.

Essendo le forze maggiormente influenti sulla struttura dell'aria di tipo elastico, anche le onde sonore ivi generate a causa di una perturbazione sono elastiche.

La velocità del suono in un gas ideale [2] è data da

$$v_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (1.3)$$

dove  $p$  è la pressione del mezzo,  $\rho$  è la sua densità volumetrica e  $\gamma$  è un coefficiente tipico del gas in questione; il radicando della (1.3) è proporzionale alla temperatura assoluta, espressa in gradi Kelvin. La velocità  $v_s$  può quindi essere espressa dalla seguente relazione

$$v_s = 20.04 \sqrt{t_a} \quad (1.4)$$

che a 0 °C (273 °K) risulta pari a circa 331 m/sec .

Il suono, a causa della sua natura ondulatoria, gode delle stesse proprietà che caratterizzano le onde elettromagnetiche (riflessione, interferenza, etc.).

La proprietà che riveste particolare interesse nel lavoro svolto in questa nota è la riflessione totale e parziale.

La riflessione ha luogo quando un'onda sonora investe una superficie elastica; le particelle costituenti quest'ultima vengono poste in vibrazione, producendo a loro volta delle onde che, combinate tra loro, danno origine ad un'onda riflessa.

Alcuni materiali, tipo la lana di vetro o il polistirolo, sono caratterizzati da un basso coefficiente di riflessione e un alto coefficiente di assorbimento, venendo così utilizzati per insonorizzare determinati ambienti.

Altri materiali, oltre che dai suddetti coefficienti, sono caratterizzati anche da un terzo coefficiente, detto di trasmissione; esso indica che una parte dell'onda sonora incidente sull'interfaccia tra due mezzi di natura fisica e/o geometrica diversa viene



trasmessa dall'uno all'altro, mentre la parte restante viene riflessa.

## §1.2 - Cenni sulla meccanica degli strumenti musicali.

La suddivisione di uno strumento musicale descritta brevemente nell'introduzione consente di individuare un unico modello a carattere generale, indipendentemente dalla classe di appartenenza dello strumento stesso (a corda, a fiato, a percussione); infatti, in ogni strumento musicale è possibile individuare un meccanismo di eccitazione, un mezzo di propagazione delle onde ed un risuonatore. Sarà la parametrizzazione del modello a caratterizzare il tipo di strumento da simulare.

Nel seguito viene data una descrizione fisica delle tre parti suddette soffermando l'attenzione sul meccanismo e mezzo di propagazione delle onde date le problematiche introdotte dagli elementi rimanenti che non consentono di individuarne un modello deterministico.

### §1.2.1 - Meccanismi di eccitazione.

Negli strumenti musicali a corda e a fiato esistono diversi meccanismi di eccitazione che non sono esprimibili con delle equazioni matematiche ben precise del relativo modello fisico, data la casualità dei vari fattori che intervengono durante l'evoluzione di tali fenomeni.

L'evoluzione del suono di uno strumento musicale è caratterizzabile attraverso quattro fasi distinte che schematizzano l'involuppo della forma d'onda globale; in letteratura, tali fasi sono definite, seguendone il rispettivo ordine di evoluzione temporale, rispettivamente **attacco** (attack), **decadimento** (decay), **sostegno** (sustain), **rilascio** (release). La variazione della composizione dei parametri associati alle varie fasi consente di modellare forme d'onda diverse, allo scopo di simulare quelle generate dagli strumenti musicali tradizionali, o di ottenere nuove sonorità. In pratica, le suddette fasi caratterizzano lo spettro dinamico del suono, a partire dall'istante iniziale, fino al suo esaurimento.

A seconda del tipo di strumento considerato, il meccanismo di eccitazione ha la sua influenza maggiormente nella fase di attacco e/o quella di sostegno.

Ad esempio, negli strumenti a corda tipo la chitarra o il pianoforte, l'azione perturbatrice si fa sentire principalmente nella fase di attacco, mentre nel caso del violino la perturbazione incide principalmente sulla fase di sostegno.

Da un punto di vista fisico, tale azione si traduce in un trasferimento di energia dal meccanismo di eccitazione al mezzo di propagazione delle onde e la sua natura può essere

a carattere prevalentemente potenziale o cinetico a seconda della dinamica del meccanismo stesso.

Il problema sta nella determinazione dell'entità di questa energia in quanto, essendo legata ad un'azione umana, è tipicamente non deterministica.

### §1.2.2 - Risuonatori.

Un risuonatore, o corpo risonante, è quel mezzo fisico preposto alla trasformazione di energia meccanica in energia vibrazionale [2]; le caratteristiche fisiche e geometriche di un risuonatore devono rispettare grosso modo alcuni requisiti propri dello strumento per cui viene progettato.

Negli strumenti musicali acustici, o semiacustici, a corde, il corpo risonante è realizzato in legno opportunamente stagionato e trattato con smalti adeguati, talvolta distribuiti in strati spessi  $1.5 + 2$  mm di vernici al poliesteri; in alcuni casi, per mantenere il più possibile inalterate le proprietà dei legni, vengono utilizzati dei minimi strati di resine naturali a scopo puramente protettivo.

A parte alcuni dettagli tecnici di carattere costruttivo, indirizzati ad ottenere una resa timbrica diversa in due strumenti dello stesso tipo (ad esempio, geometrie differenti nell'assemblaggio dei sostegni della tavola armonica), il risuonatore di uno strumento si comporta similmente a quello di un'altro strumento uguale al primo, ma mai nello stesso modo, soprattutto se di provenienza artigianale; ciò è dovuto al fatto che le vibrazioni meccaniche di una tavola di legno, a prescindere dalla sua sagoma e dalla stagionatura, dipendono, in primo luogo, dalla sua costituzione. In particolare, due tavole dello stesso legno aventi la stessa forma, a parità di trattamento subito, una volta che vengono sottoposte alla stessa oscillazione, rivelano dei modi di oscillazione diversi l'una dall'altra.

Tali differenze, rilevabili sperimentalmente, sono conseguenza dell'inevitabile diversità delle venature dei legni; per cercare di minimizzare questa causa, si adottano delle tecniche di intagliatura tali da mantenere pressoché inalterata la direzione delle venature stesse sulla sagoma in costruzione, cercando di scartare i legni nodosi; non è detto, però, che tali legni siano da scartare in senso assoluto, in quanto può essere richiesta da parte del musicista la costruzione di uno strumento con particolari caratteristiche timbriche che solamente la presenza di certi nodi disposti in un determinato modo può garantire.

Per analizzare più in dettaglio i fenomeni che hanno luogo in un risuonatore, si consideri la tavola armonica del corpo risonante di un violino.

Come nel caso di una corda vibrante, la struttura elastica della tavola ha dei modi di

oscillazione preferenziali; in questo caso, però, data la complessità del fenomeno, non è possibile ricavare delle equazioni matematiche atte a descriverne il modello fisico. Per questa ragione, l'unico metodo di analisi è di tipo sperimentale e viene affrontato utilizzando un oscillatore meccanico sinusoidale come agente perturbatore, posto nella zona in cui viene montato normalmente il ponticello.

Le onde elastiche generate si propagano in due dimensioni, a partire dal punto di eccitazione, e vengono riflesse ai bordi della tavola armonica; risulta quindi evidente che l'unico modo possibile di vibrazioni stabili è dato da onde stazionarie compatibili con la particolare geometria della tavola stessa.

Il rilevamento delle vibrazioni non può essere effettuato ad occhio nudo, neanche approssimativamente; per questo, viene utilizzata una tecnica sperimentale basata sull'utilizzazione di raggi laser, chiamata olografia.

Il modo di oscillazione più semplice della tavola armonica è pressochè sinusoidale, la cui ampiezza massima è localizzata nella sua zona centrale, mentre i bordi di quest'ultima fungono da nodi; la frequenza di questa vibrazione determina il cosiddetto **tap tone**, ovvero, il suono generato da una singola percussione sulla tavola stessa.

Gli altri modi di oscillazione non sono approssimabili con delle leggi ben precise; per essi è possibile individuarne sperimentalmente solo un andamento qualitativo.

### §1.2.3 - La corda vibrante.

Una corda tesa è un sistema fisico che, se eccitato opportunamente, si mette a vibrare intorno ad una posizione di riposo; in particolare, si nota che la deformazione prodotta dall'eccitazione progredisce lungo la corda ad una velocità ben determinata, funzione di alcune grandezze fisiche che verranno specificate più avanti [4].

In base alle seguenti considerazioni semplificative, è possibile ricavare l'equazione d'onda della corda vibrante :

- La corda sia infinitamente lunga;
- Il suo moto avvenga trasversalmente sul piano  $xy$ , in direzione perpendicolare all'asse  $x$ ;
- Ciascun tratto della corda abbia una piccola inclinazione rispetto all'asse  $x$ ;
- Un elemento  $\Delta x$  della corda si muova solo trasversalmente, cioè ortogonalmente all'asse  $x$ .

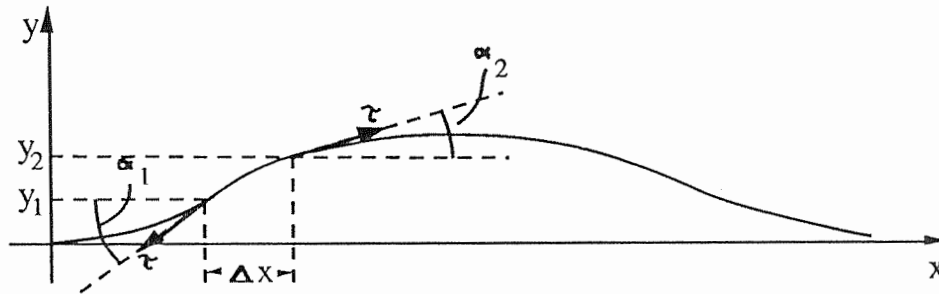


Fig. 1.3

Sia  $\tau$  la tensione della corda in ogni suo punto. In relazione alla Fig.1.3, se ne consideri il tratto in corrispondenza dell'intervallo  $\Delta x$ ; gli angoli  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  di inclinazione della corda agli estremi di tale intervallo sono in generale diversi, quindi la forza risultante agente sul tratto in questione è non nulla. Le componenti di quest'ultima sono esprimibili con le relazioni seguenti:

$$\tau_x = \tau (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad (1.18.1)$$

$$\tau_y = \tau (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \quad (1.18.2)$$

Essendo  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  piccoli per ipotesi, è possibile fare delle approssimazioni:

$$\cos \alpha_2 \approx \cos \alpha_1 \approx 1 \quad (1.19.1)$$

$$\sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x} \quad (1.19.2)$$

$$\sin \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x} \quad (1.19.3)$$

La prima delle relazioni di cui sopra porta a considerare  $\tau_x \approx 0$ ; le restanti contribuiscono a modificare l'espressione della tensione sul tratto di corda considerato. Poiché ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, la tensione cui è sottoposta la corda deve essere equilibrata da una forza, propria della corda stessa,

determinabile in base al secondo principio di Newton ( $F = ma$ ); detta  $\mu$  la massa per unità di lunghezza della corda, la massa relativa al tratto  $\Delta x$  è  $\mu \Delta x$ . L'equilibrio dinamico relativo a  $\Delta x$  risulta, pertanto:

$$\tau \left( \frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x} \right) = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

dove  $\partial^2 y / \partial t^2$  rappresenta l'accelerazione trasversale del generico punto della corda di ascissa  $x$ ; dividendo ambo i membri per  $\tau \Delta x$  e facendo il limite per  $\Delta x$  che tende a zero, si ottiene l'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.21)$$

dove

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (1.22)$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale (1.21) è del tipo  $y = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ , dove  $f_1$  ed  $f_2$  sono due funzioni arbitrarie e indipendenti tra loro; in particolare, la soluzione di D'Alembert è della forma seguente:

$$y(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (1.23)$$

Il significato di tale soluzione sta nel fatto di potere considerare la forma d'onda  $y(x,t)$  come combinazione lineare di due onde viaggianti, una in senso opposto all'altra; si dice che  $f_1$  ed  $f_2$  rappresentano rispettivamente un'onda **progressiva** e un'onda **regressiva**.

Di interesse pratico, in particolar modo nel campo musicale, non è la corda di lunghezza infinita, ma una corda tesa, di lunghezza  $L < \infty$ , fissata ai due estremi (Fig. 1.4).

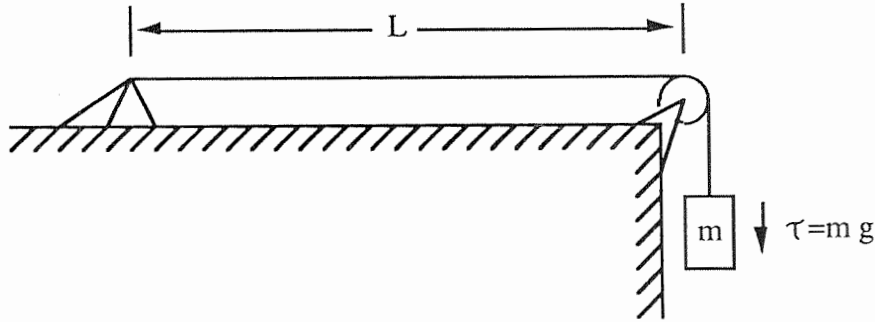


Fig. 1.4

per questa è ancora valida la soluzione di D'Alembert dell'equazione d'onda, in quanto le approssimazioni fatte sopra anche qui sono ampiamente giustificate. Infatti, lo scostamento delle oscillazioni di una corda in uno strumento musicale è talmente piccolo rispetto alla lunghezza della corda stessa da potere considerare piccoli anche in questo caso gli angoli  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  visti nella precedente trattazione; i punti della corda vibrante, in realtà, descrivono una traiettoria trasversale pressoché ellittica, ma la notevole differenza di lunghezza fra i due assi di tale curva permette ancora di considerare piano il moto della corda stessa.

Si dimostra che una corda tesa, di lunghezza  $L$ , fissata ai due estremi, una volta che viene posta in oscillazione è sede di un'onda stazionaria, cioè, un'onda che non si propaga lungo la corda; la sua forma, nel tempo e nello spazio, è data dalla somma di due onde, una progressiva e l'altra regressiva, esattamente uguali. Queste onde, nel momento in cui giungono ai punti di ancoraggio della corda, vengono riflesse, totalmente o parzialmente, a seconda che le terminazioni siano prive di perdite o meno; nel primo caso esse viaggiano indefinitamente nel tempo, senza venire alterate. Nel secondo caso, invece, la presenza di attriti alle terminazioni comporta una dispersione di energia con conseguente smorzamento dell'oscillazione.

Si consideri, per semplicità, il caso di terminazioni perfettamente riflettenti; nel sistema fisico considerato, fra tutte le forme immaginabili di onde stazionarie sono possibili solo quelle aventi come nodi i punti di ancoraggio della corda [2]. Dette onde sono quindi periodiche di lunghezza d'onda  $\lambda_1 = 2L$ ; nel caso più generale, esse non sono sinusoidali, ma comunque scomponibili in serie di Fourier, pertanto l' $n$ -esima armonica ha una lunghezza d'onda

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (1.24)$$

La frequenza di oscillazione della fondamentale e delle armoniche superiori è legata

alla lunghezza d'onda dalla velocità di propagazione delle onde (1.20), secondo la seguente relazione:

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (1.25)$$

Dalla precedente espressione risulta evidente che il periodo di oscillazione della corda dipende strettamente dalla tensione a cui è sottoposta e dalla sua costituzione fisica e geometrica; questi ultimi due fattori sono conglobati nella densità lineare  $\mu$ , che può essere ricavata dal prodotto tra la densità volumetrica  $\rho$  (caratteristica fisica) e la sezione trasversale (caratteristica geometrica) della corda stessa; in particolare, se la corda ha una sezione trasversale circolare di raggio  $r$ , si ha:

$$\mu = \pi r^2 \rho \quad (1.26)$$

I risultati ottenuti sono validi anche quando i punti di ancoraggio della corda non siano perfettamente riflettenti, ma in qualche misura dissipativi; la differenza sostanziale in questo caso consiste nello smorzamento temporale dell'oscillazione.

Volendo analizzare più in dettaglio tale smorzamento è necessario introdurre una quantità caratteristica, chiamata **DECAY HALF-TIME**: essa rappresenta l'intervallo di tempo dopo il quale l'ampiezza di un'oscillazione sinusoidale risulta dimezzata rispetto a quella che aveva all'istante iniziale. E' bene mettere in evidenza che lo smorzamento segue un andamento esponenziale; ciò può essere giustificato dal fatto che un qualsiasi comportamento dissipativo nell'evoluzione di un determinato fenomeno fisico, viene tradotto analiticamente con l'introduzione di un termine differenziale del primo ordine nell'equazione che modella il fenomeno stesso. E' noto, infatti, che la soluzione di una tale equazione comprende anche un termine esponenziale decrescente nel tempo.

In particolare, si verifica che per oscillazioni sinusoidali di uguale frequenza, anche se di ampiezza diversa, il DECAY HALF-TIME è lo stesso, mentre varia al variare della frequenza. Infatti, si dimostra analiticamente che all'aumentare della frequenza della libera oscillazione, aumenta in valore assoluto anche l'esponente del termine che caratterizza lo smorzamento, riducendo così il tempo di decadimento.

Questo concetto di carattere generale può essere applicato anche ad una forma d'onda complessa generata da una corda con comportamento lineare; durante la libera evoluzione si ha un mutamento dinamico del contenuto armonico, in particolare, con un'attenuazione maggiormente sentita sulle frequenze più alte.

Nel caso che si tratti di una corda di strumento musicale, le sue vibrazioni vengono

trasmesse ad un risuonatore, per mezzo del quale risulta possibile udire l'equivalente acustico dell'oscillazione generata; in questo modo si percepisce una variazione dinamica del timbro, dovuta proprio al corrispondente mutamento dello spettro.

Questo fenomeno può essere qualificato anche con un paragone tecnico: in generale, l'ambiente circostante un sistema fisico si comporta nei confronti di questo come un filtro passa-basso su di un segnale avente banda maggiore della frequenza di taglio del filtro stesso.

#### §1.2.4 - Il tubo acustico.

Il meccanismo che governa le oscillazioni dell'aria in un tubo acustico è alla base degli strumenti musicali a fiato e degli organi a canne.

Si consideri inizialmente un tubo cilindrico molto sottile [2], aperto alle due estremità (Fig. 1.5); in ogni punto al suo interno può verificarsi un incremento, un decremento o un'oscillazione della pressione, in riferimento alla pressione atmosferica esterna. Le pareti rigide del tubo e l'inerzia della colonna d'aria racchiusa da esse contribuiscono a bilanciare le forze d'interazione tra particelle, giustificando così le variazioni di pressione.

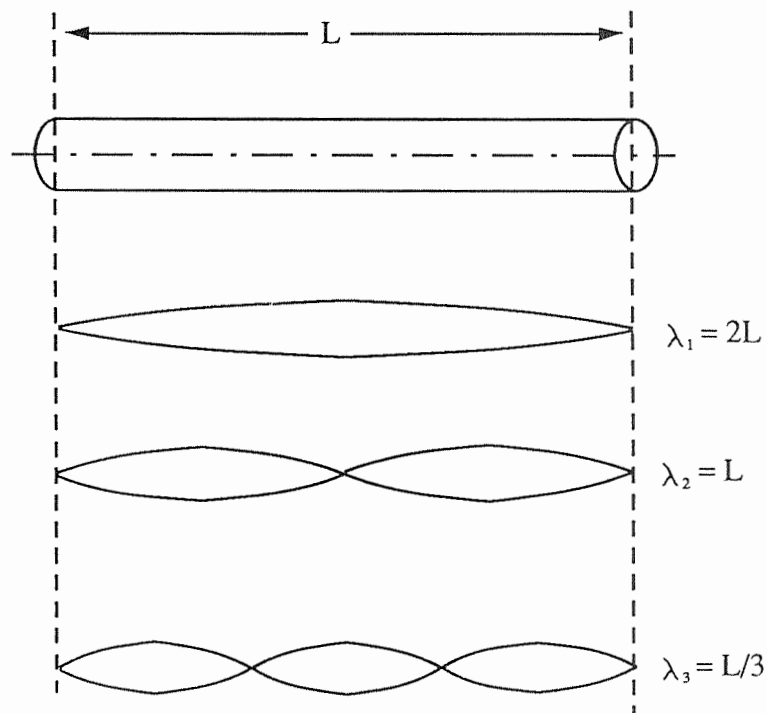


Fig. 1.5



Viceversa, alle estremità, essendo aperte, non si ha alcuna variazione di pressione, in quanto non si verifica alcun bilanciamento di forze del tipo di quello che si ha all'interno del tubo; nel caso di oscillazioni dell'aria interna, tali punti si comportano come nodi di pressione, riflettendo le onde ivi incidenti. Ecco quindi che si riscontra una situazione formalmente analoga al caso della corda vibrante, visto nel paragrafo precedente, dove i punti di ancoraggio svolgono la stessa funzione delle estremità del tubo. In questo caso, le uniche vibrazioni stabili possibili sono onde stazionarie longitudinali.

Considerando oscillazioni sinusoidali della pressione, le corrispondenti oscillazioni delle particelle sono sfasate di  $90^\circ$  rispetto alle prime, nel senso che lo scostamento tra particelle immediatamente adiacenti è massimo dove la pressione è minima, e viceversa. Ciò significa che le due estremità del tubo, essendo dei nodi per le oscillazioni di pressione, si comportano come ventri per le oscillazioni delle particelle.

Per quanto detto precedentemente, la frequenza di oscillazione dipende dalla velocità del suono nel mezzo considerato, quindi dalla temperatura, e dalla lunghezza d'onda; in particolare, tenendo presente che i due nodi consecutivi di pressione sono situati alle estremità aperte del tubo, se ne deduce che la lunghezza d'onda è pari al doppio della lunghezza del tubo stesso; in tal caso si ottiene

$$f_1 = \frac{v_s}{\lambda_1} = \frac{1}{2L} 20.04 \sqrt{t_a} \quad (1.27)$$

per la fondamentale, e

$$f_n = \frac{n}{2L} 20.04 \sqrt{t_a} \quad (1.28)$$

per le armoniche superiori.

In virtù delle relazioni (1.27) e (1.28), gli strumenti musicali basati su tubi acustici, prima di essere suonati, devono essere accordati in base alla temperatura dell'ambiente in cui si trovano.

Le estremità aperte del tubo non necessariamente devono coincidere con le estremità fisiche dello stesso, ma possono essere disposte in altri punti; è comunque necessario tenere presente che la lunghezza  $L$  utilizzata nel calcolo delle varie grandezze fisiche coincide con la distanza tra le due estremità aperte. In Fig. 1.6 è schematizzato un esempio di quanto detto adesso, che rappresenta in maniera semplificata un modello di

flauto idealizzato.

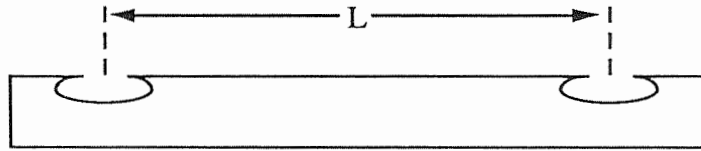


Fig. 1.6

Un'altro caso di notevole interesse è il tubo di lunghezza  $L$  aperto ad una sola estremità. Fisicamente, esso si comporta analogamente al caso precedente; la differenza sostanziale sta nel fatto che all'estremità chiusa si manifesta la massima variazione di pressione, mentre all'estremità aperta risulta, al solito, nulla (Fig. 1.7).

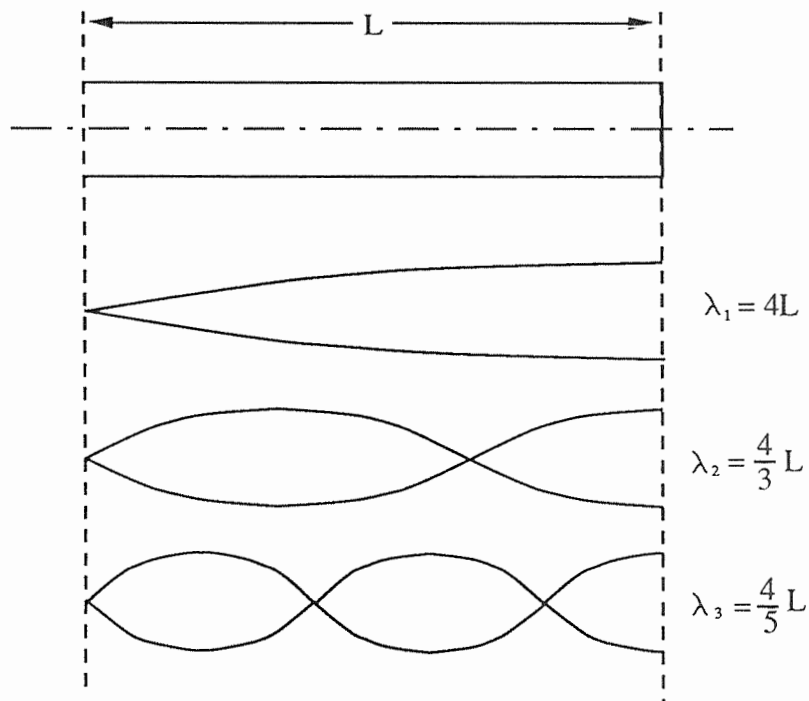


Fig. 1.7

Conseguenza di ciò, è che il suo modo di oscillazione fondamentale presenta per tutta la lunghezza  $L$  un solo nodo e un solo ventre di pressione consecutivi; questo significa che la lunghezza d'onda della fondamentale è pari a  $4L$ , corrispondente alla frequenza

$$f_1 = \frac{1}{4L} 20.04 \sqrt{t_a} \quad (1.29)$$

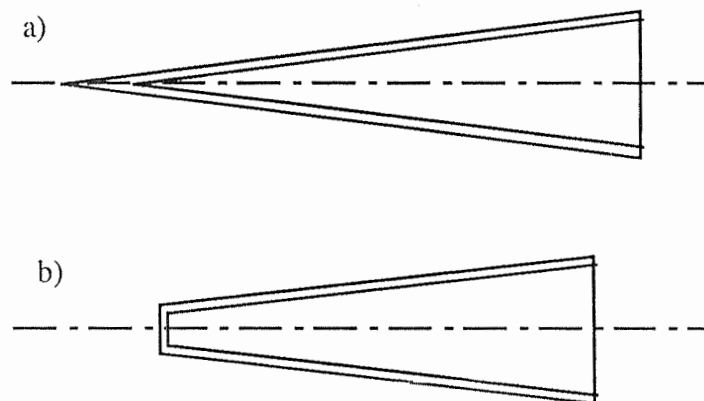
Ciò comporta che a parità di frequenza un tubo chiuso ad una estremità è lungo la metà di un tubo aperto da entrambe le parti.

Un'altra conseguenza molto importante è relativa al fatto che gli unici modi di oscillazione possibili sono multipli interi dispari della fondamentale, quindi il timbro del suono generato è sicuramente diverso da quello ottenibile con un tubo aperto alle due estremità.

Uno strumento musicale tipico realizzato sulla base di un tubo acustico aperto ad una sola estremità è il clarinetto; esso è infatti aperto dalla parte della campana, mentre la parte opposta (bocchino - ancia) si comporta come una terminazione chiusa.

Gli organi a canne sono dotati di entrambi i tipi di tubi acustici visti; in particolare, le canne chiuse ad una estremità vengono utilizzate laddove sono richieste delle sonorità esclusivamente a contenuto armonico dispari, in modo da risparmiare sia in spazio, sia economicamente. Infatti, in questi termini sarebbe dispendioso utilizzare canne aperte da entrambe le parti, eccitate da meccanismi che generassero oscillazioni prive di armoniche di ordine pari.

Un'ultimo caso, anch'esso di particolare importanza, è il tubo acustico di forma conica o tronco-conica, chiuso rispettivamente al vertice o all'estremità di sezione inferiore (Fig. 1.8).



- a) Tubo acustico conico;
- b) Tubo acustico tronco-conico.

Fig. 1.8

La determinazione dei modi di oscillazione della colonna d'aria generata al suo

interno richiede un'analisi piuttosto complessa. Ad ogni modo, i risultati possono essere riassunti brevemente: nel caso di tubo conico, si verificano gli stessi modi di oscillazione di un tubo cilindrico aperto ad entrambe le estremità, della stessa lunghezza  $L$ ; nel caso di un tubo tronco-conico, i vari modi di vibrazione non sono, in generale, multipli della fondamentale secondo relazioni tra numeri interi. In questo caso, nel range di frequenze più basse si manifesta un comportamento approssimativamente simile a quello di un tubo cilindrico aperto ad entrambe le estremità, mentre per le frequenze più elevate il comportamento approssima quello del tubo cilindrico chiuso ad una estremità.

In definitiva, i modi di oscillazione di una colonna d'aria all'interno di un tubo tronco-conico sono inarmonici, ovvero, la forma d'onda generata non è analizzabile mediante uno sviluppo in serie di Fourier.

Gli strumenti musicali realizzati sulla base di quest'ultimo tipo di tubo acustico sono quelli appartenenti alla famiglia dei sassofoni; in particolare, quello che ne implementa direttamente anche la configurazione geometrica è il sassofono soprano, il cui asse è rettilineo; gli altri tipi di sassofoni, pur avendo una geometria conica con asse curvilineo generano una colonna d'aria avente le stesse proprietà del soprano. La necessità della loro realtà costruttiva è giustificata dal range di frequenze che devono generare, orientato più su quelle basse (sassofono baritono, contralto, basso), che comporta un notevole aumento della lunghezza  $L$  del tubo.

Le relazioni (1.27) e (1.29), in realtà non danno proprio la frequenza di oscillazione fondamentale, ma una frequenza che si discosta leggermente da essa; possono comunque essere sfruttate a patto di introdurre un fattore di correzione sul diametro  $d$  delle estremità aperte (tipicamente,  $0.3*d$ ).

### § 1.3.1 - Simulazione della corda vibrante.

E' stato visto in §1.2.3 che una corda tesa fissata alle due estremità, qualora venga posta in vibrazione, diventa sede di onde stazionarie.

La soluzione dell'equazione d'onda di D'Alembert assume in tal caso la seguente forma:

$$y(x,t) = f(x-vt) + f(x+vt)$$

In particolare, se  $L$  è la sua lunghezza, il corrispondente periodo di oscillazione fondamentale è proporzionale a  $2L$ ; ciò implica che anche le onde progressiva e regressiva abbiano lo stesso periodo.

Si consideri una corda i cui punti di ancoraggio siano costituiti da terminazioni perfettamente riflettenti; nel caso che la sua forma sia uguale ad un semiperiodo di senoide di ampiezza  $A$ , le due onde viaggianti hanno ampiezza  $A/2$ . Quando queste ultime sono in fase, la loro somma rende proprio la forma iniziale della corda; quando, invece, sono in opposizione di fase, la corda passa per la sua posizione di riposo.

In Fig. 5.1 è riportata la situazione del fenomeno nell'istante in cui l'onda progressiva e quella regressiva sono in fase.

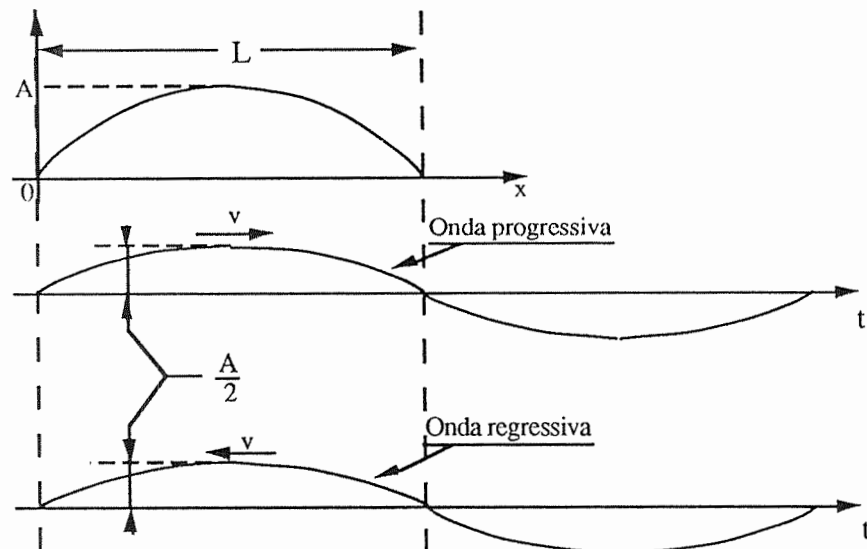


Fig. 5.1

Le due frecce in corrispondenza delle onde viaggianti indicano la loro direzione di propagazione a velocità  $v$ ; al variare del tempo, i punti di ancoraggio svolgono sempre la

funzione di nodi per l'onda stazionaria. Questo si traduce in un requisito necessario alla determinazione delle due onde in questione; esse, infatti, non solo devono essere uguali nella forma, ma ad ogni istante la loro somma in corrispondenza delle estremità della corda deve essere nulla.

Tipicamente, la corda di uno strumento musicale, nel momento in cui viene rilasciata alla sua libera evoluzione, ha una forma iniziale triangolare. In tal caso, tenendo presente quanto detto sopra, le onde progressiva e regressiva hanno la forma rappresentata in Fig. 5.2.

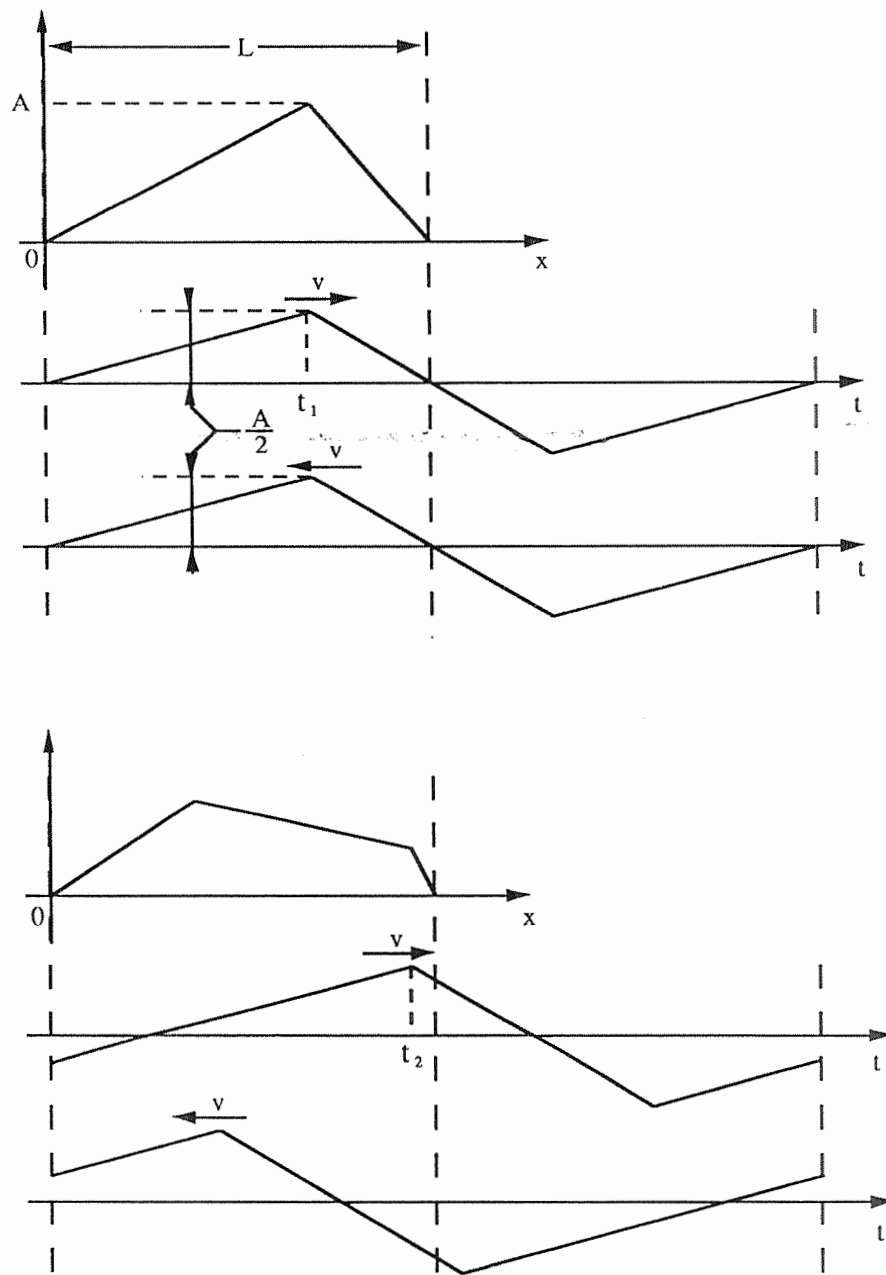


Fig. 5.2

La figura mostra anche l'andamento della forma della corda nel tempo; in a), onda progressiva e regressiva sono in fase ed il vertice della prima si trova nella posizione schematizzata all'istante  $t_1$ . In b) è raffigurata la situazione dopo un intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , per il quale l'onda di cui sopra ha la sua massima ampiezza in corrispondenza dell'istante  $t_2$ ; in questo caso, lo sfasamento relativo tra le due onde viaggianti è pari a  $2\pi\Delta s/L$ , dove  $\Delta s = 2v\Delta t$ .

Si supponga adesso di avere a che fare con una situazione ideale, in cui la corda sia priva di perdite e le terminazioni siano perfettamente riflettenti; in tal caso, è possibile schematizzarla con due vettori contenenti i campioni rispettivamente dell'onda progressiva e di quella regressiva, mentre le terminazioni sono individuabili esclusivamente a dei coefficienti di riflessione pari a -1.

I ritardi caratteristici con cui vengono scanditi tali vettori sono individuati dall'impedenza della corda ( $Z = \rho v$ ) ed ognuno di essi è inserito rispettivamente nel cammino dell'onda progressiva e di quella regressiva.

Questa rappresentazione semplificata comporta dei limiti qualora debba essere riportata nella realtà fisica del fenomeno.

La prima cosa da osservare è che qualsiasi sistema fisico è sede di varie forme di attrito omnipresente (vedere primo capitolo), ragion per cui ogni evoluzione del sistema stesso non può durare indefinitamente, se non è mantenuta da qualche sorgente di energia esterna.

Un'ulteriore dissipazione ha luogo lungo la corda stessa, che in realtà non è sottoposta alla medesima tensione in ogni suo punto, ma si dimostra che risulta sempre più tesa man mano che ci si avvicina ai punti di ancoraggio.

Per la differenza di tensione, si potrebbe pensare di trattare la corda a livello microscopico.

Da un punto di vista implementativo, la minima entità trattabile è il campione di segnale. Questo equivale ad individuare le interazioni suddette introducendo una dissipazione in corrispondenza del campione stesso.

Normalmente, il numero di campioni utilizzati per definire un periodo della forma d'onda è piuttosto elevato; supponendo che esso sia definito da 256 campioni, la parte interessata al calcolo è costituita da 128, corrispondenti ad un semiperiodo. In questo caso, l'intervallo minimo necessario alla produzione di un campione, oltre a 256 traslazioni (128 per ognuna delle due onde), prevede anche 128 moltiplicazioni e  $128 \times 3 = 384$  somme.

Utilizzando un sistema con microprocessore DSP TMS32010, in cui le istruzioni di

moltiplicazione e di somma sono eseguite entrambe in 200 nsec, considerando solamente tali operazioni, la produzione di un campione avviene ogni  $102.4 \mu\text{sec}$ ; ciò equivale a generare un segnale a frequenza di circa 38 Hz.

E' evidente che non è possibile sfruttare un tale modello, a meno di non utilizzare sistemi di calcolo dedicati, ad architettura altamente parallela; è quindi impensabile formalizzare un'algoritmo di sintesi del tipo descritto sopra su un calcolatore tipo PC-compatibile, inteso come sistema autonomo.

Si è pensato di aggirare l'ostacolo con un metodo non propriamente fisico; in pratica, si tratta di considerare la corda come priva di perdite, conglobando queste ultime in un filtraggio di tipo passa-basso sulla sequenza di campioni prodotti dall'algoritmo. Del resto, tenendo conto di quanto detto nel primo capitolo, esiste una corrispondenza diretta tra i fenomeni dissipativi che avvengono durante l'evoluzione di un fenomeno fisico ed un filtraggio del tipo suddetto.

Effettivamente, questa tecnica sembra introdurre un'approssimazione piuttosto grossolana, ma ciò è stato smentito dai risultati sonori ottenuti.

La differenza sostanziale sta nel fatto che in questo modo le perdite non sono distribuite lungo la corda, ma sono concentrate nel punto di osservazione dal quale viene prelevata la forma d'onda finale.

Il modello proposto della corda vibrante è stato studiato in linea con la teoria delle guide d'onda ed adotta alcuni formalismi ad esse comuni, ma se ne discosta leggermente per l'approccio; infatti, in questo caso, il punto di partenza è proprio la forma stessa della corda, a differenza del modello di Smith, che tratta quest'ultima come una funzione di trasferimento.

Il linguaggio di programmazione utilizzato nella stesura dell'algoritmo è il C v.5.01 della *Microsoft*; le apparecchiature hardware utilizzate ed il software di comunicazione sono descritti nel capitolo successivo.

Per quanto detto, si consideri la corda nella sua forma iniziale, cioè quella relativa all'istante  $t=0^-$ , in cui l'agente perturbatore sta per rilasciarla alla sua libera evoluzione. La sua forma triangolare può essere memorizzata in una tabella di un numero di campioni pari ad una potenza di due (Fig. 5.3); questa scelta è motivata dal fatto che si vuole dare l'opportunità di effettuare l'analisi di Fourier del segnale prodotto, mediante l'algoritmo della F.F.T., il quale, nella sua forma più nota, richiede proprio un tale numero di campioni.



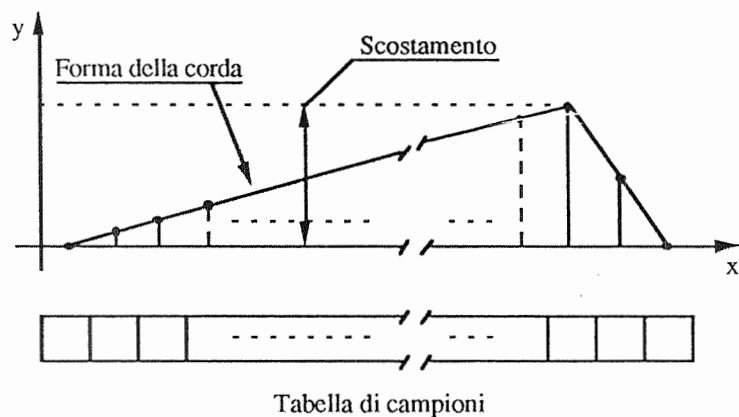


Fig. 5.3

A tale scopo, è stato scritto del codice, la cui esecuzione prevede l'immissione di alcuni parametri; in particolare, è richiesto lo scostamento massimo iniziale della corda che è situato in corrispondenza del punto di eccitazione e la posizione relativa di quest'ultimo.

I parametri in questione sono passati in dimensioni fisiche reali; avendo fatto riferimento ad una corda di chitarra, il diapason (lunghezza della corda) è stato scelto di 60 cm con origine del sistema di riferimento in corrispondenza del capotasto. In tal caso, il punto di eccitazione deve essere dato nella stessa unità di misura; una sua posizione tipica dista dal ponticello di 10÷25 cm, quindi il dato corrispondente deve essere compreso tra 35 e 50 cm.

Per quanto riguarda lo scostamento trasversale si è ritenuto di dimensionarlo in millimetri, in quanto, grosso modo non supera il centimetro.

La lunghezza della corda deve essere tradotta in un determinato numero di campioni, rendendo necessaria l'introduzione del fattore di conversione DELTAX che stabilisce la distanza in centimetri tra due campioni consecutivi; dato che è stato scelto un numero di campioni pari a 128, si ha  $DELTAX=0.46875$  cm.

Anche per quanto riguarda lo scostamento è stata adottata una conversione (DELTAY) che effettua un cambiamento di scala; la necessità di quest'ultima, però, non è legata direttamente all'algoritmo, ma trova la sua ragione nel fatto che il convertitore D/A deve ricevere campioni interi con segno a 16 bit. Di conseguenza, dato che l'ampiezza massima del segnale generato avrebbe un valore numerico in floating point minore di 1, la successiva conversione in campioni interi fornirebbe sempre valori nulli.

La funzione `Forma_corda()` è preposta al calcolo e alla tabulazione dei valori della forma della corda ogni DELTAX centimetri; tali valori sono valutati calcolando l'inclinazione dei segmenti che caratterizzano la forma stessa della corda, in base ai parametri definiti precedentemente.

Il passo successivo consiste nella determinazione delle onde progressiva e regressiva.

A questo punto è necessario fare qualche osservazione a tal proposito; con riferimento alla Fig. 5.2, si nota che le onde riflesse dalle terminazioni della corda hanno ivi ampiezza uguale a quelle incidenti. Ciò ha suggerito di utilizzare solamente un semiperiodo per ognuna delle due onde in questione, risparmiando, così, in occupazione di memoria ed ottimizzando l'algoritmo stesso.

In Fig. 5.5 è riportato uno schema qualitativo che riassume quanto affermato fino ad ora.

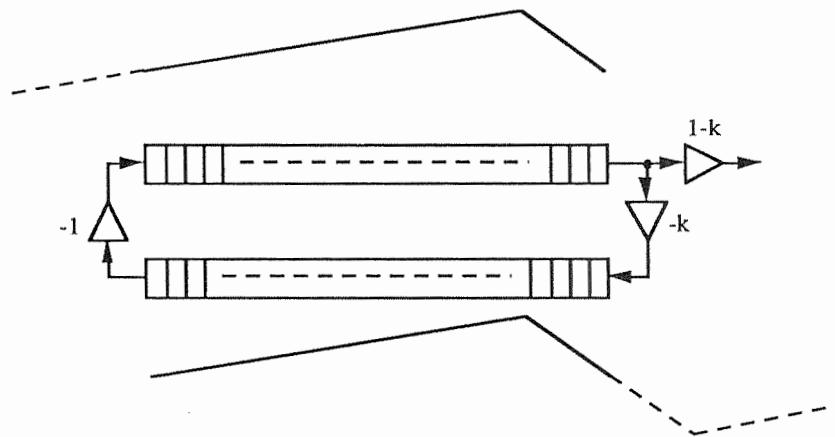


Fig. 5.5

L'evoluzione dell'algoritmo è basata interamente su tale schema ed è orientata al calcolo di 15000 campioni interi, memorizzati su un vettore man mano che sono calcolati.

Prima del calcolo suddetto, nel programma è stata introdotta una richiesta opzionale, relativa all'introduzione o meno dell'azione filtrante sul percorso dell'onda trasmessa alla cassa risonante, che tiene conto delle perdite globali del sistema; se la risposta data è affermativa, viene richiesto il grado di filtraggio desiderato, in un range da 1 a 10, direttamente proporzionale al taglio in frequenza.

Il filtro è stato realizzato con un'equazione alle differenze del primo ordine ricorsiva (IIR) analoga a quella trattata nel terzo capitolo.

Una volta che sono stati riempiti i vettori delle onde viaggianti ed è stata decisa l'eventuale quantità di filtraggio, viene invocata la funzione `Calcola(lim)` che esegue l'algoritmo vero e proprio.

Il parametro `passatole` indica il numero massimo voluto di campioni; esso può assumere due valori a seconda del tipo di campioni desiderati.

In particolare, è possibile generare due tipi diversi di campioni riferiti agli stessi

valori di eccitazione; il primo è costituito da campioni reali che possono essere mandati ad un convertitore D/A in modo da ascoltare direttamente la forma d'onda prodotta. Il secondo, invece, è un vettore di campioni complessi; questo è stato generato per effettuare l'analisi di Fourier del primo periodo di segnale, attraverso l'algoritmo della F.F.T. .

La funzione introdotta sopra, esegue ciclicamente il calcolo di ogni campione dopo avere effettuato una rotazione dei valori memorizzati nelle tabelle delle onde viaggianti; ogni singolo campione prodotto, è dato dalla somma dei primi valori delle onde incidente e riflessa secondo lo schema di Fig. 5.7.

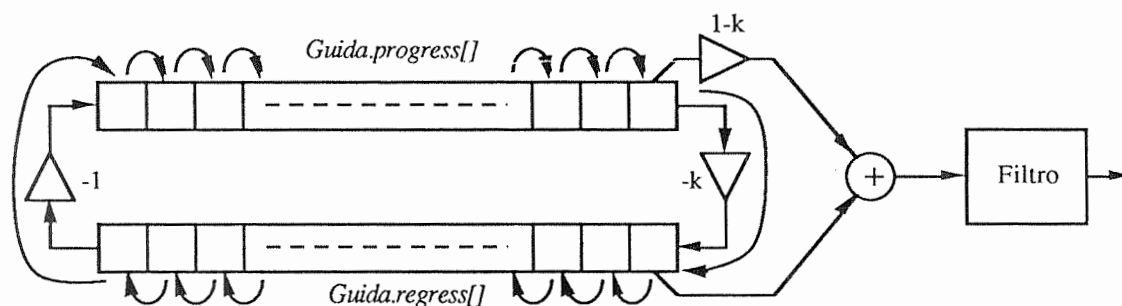


Fig. 5.7

In essa è raffigurata anche una cella ausiliaria di appoggio per la traslazione suddetta, senza la quale andrebbe perduto un valore ad ogni ciclo.

Al termine dell'esecuzione della funzione *Calcola(lim)*, viene effettuato un cambiamento di scala del vettore di campioni generato e la conversione dei valori ottenuti da reali ad interi, allo scopo di pilotare correttamente il convertitore D/A.

A questo punto, secondo lo schema di Fig. 5.7, la forma d'onda generata viene eventualmente filtrata, invocando la funzione *Passa\_Basso()*, il cui scopo e la cui implementazione sono già stati discussi precedentemente.

In assenza di azione filtrante si ottiene una forma d'onda periodica smorzata linearmente; ciò significa che ogni riga dello spettro dinamico risulta moltiplicata per uno stesso fattore. Il corrispondente risultato acustico è simile a quello ottenuto con i primi sintetizzatori analogici che tentavano di simulare anche strumenti a corde.

Quando, invece, si introduce il filtro nel cammino del segnale, ogni riga dello spettro dinamico diminuisce la propria ampiezza secondo un fattore diverso dall'una all'altra. Questo accade, in particolare, per le armoniche con frequenza superiore a quella di taglio, in quanto il loro coefficiente moltiplicativo dipende dalla pendenza del filtro

stesso.

Ciò rende più realistico il suono della forma d'onda così generata; esso, infatti, a frequenze sotto i 100 Hz è simile a quello di un contrabbasso, mentre man mano che si aumenta la frequenza assume le caratteristiche di quello prodotto da un pianoforte elettronico. Notare che quest'ultimo caso è più verosimile qualora il punto di eccitazione scelto sia più vicino al capotasto che al ponticello.

Il segnale prodotto dall'algoritmo riunisce le tre fasi di inviluppo, note come decadimento, sostegno e rilascio, in un'unica fase di libera evoluzione, mancando però quella di attacco.

Essa sarebbe necessaria per caratterizzare in modo migliore il timbro dello strumento da simulare; la sua determinazione comporta la realizzazione del modello di un meccanismo di eccitazione, che notoriamente non è univocamente determinabile, data la casualità dei parametri fisici in gioco.

Ritornando all'analisi dell'algoritmo proposto, si può osservare come al variare di un parametro in ingresso si ottenga il risultato acustico aspettato.

E' noto che a punti di eccitazione diversi corrispondono timbri diversi; ciò è evidente anche da un punto di vista analitico. Infatti, scomponendo in serie di Fourier la forma della corda, si rileva un contenuto armonico diverso a seconda della posizione del vertice del triangolo da essa disegnato; in particolare, se il punto di eccitazione è vicino al ponticello, la forma della corda tende al dente di sega, caratterizzata da sole armoniche dispari. Se, invece, il punto di eccitazione è in posizione centrale, la corda assume la forma di un triangolo isoscele, costituita da armoniche pari e dispari; nei due casi si ottengono rispettivamente un suono brillante ed uno cupo.

E' stato verificato sperimentalmente che l'algoritmo realizzato segue quanto detto, fornendo un segnale finale in accordo alla realtà acustica di uno strumento a corde.

Gli altri parametri, più strettamente a carattere fisico, sono la tensione della corda e la densità del materiale di cui è costituita.

I materiali utilizzati nella realizzazione delle corde può essere della natura più disparata; i più noti sono il nylon e l'acciaio ad elevato contenuto di carbonio. Le corde più sottili sono filiformi, mentre quelle meno fini sono tipicamente dotate di avvolgimento con leghe al bronzo o al nichel; a volte subiscono trattamenti al fosforo per mantenere il più possibile inalterate le loro proprietà di elasticità e quindi di durata.

Nel caso in esame si è considerata una corda liscia ed uniforme di acciaio; la densità tipica del materiale in questione è di circa  $8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

La tensione tipica di una corda, gentilmente fornita dalla ditta Dogal di Verona è di  $6,8 \div 7,2 \text{ Kg}_p$  per nota, dove con  $\text{Kg}_p$  si indica il chilogrammo peso ( $1 \text{ Kg}_p = 9,8 \text{ Nw}$ ); la dizione *per nota* è riferita al fatto che la tensione è stata misurata a corda libera, ovvero,

per tutta la sua lunghezza, dal capotasto al ponticello.

Per quanto detto nel primo capitolo, la frequenza di oscillazione di una corda dipende dalla sua lunghezza, tensione e densità lineare (relazione (1.25)); dal momento che la lunghezza è stata fissata e la tensione è pressoché costante, si è ritenuto di rendere variabile l'ultimo parametro citato.

Essendo la corda a sezione circolare, la sua densità lineare è esprimibile secondo la relazione (1.26); ciò significa che, una volta fissato il materiale, quindi la densità volumetrica, il parametro in questione è il raggio.

In commercio le corde sono definite attraverso il diametro, dato in pollici; ad esempio, una muta tipica di corde per chitarra prevede per la prima (Mi cantino  $\equiv$  329.63 Hz) un diametro di  $0.010 \div 0.011$ , corrispondente a  $0.254 \div 0.279$  mm.

Svolgendo i calcoli secondo le relazioni sopra menzionate e tenendo conto il campo di variazione della tensione, si ottiene una frequenza di oscillazione intorno a 330 Hz.

Se viene variato il raggio in modo tale da avere una corda con diametro di circa 0.014 pollici si la frequenza corrispondente è compresa tra 240 e 250 Hz. tali valori corrispondono proprio alla seconda corda di una chitarra jazz (Si  $\equiv$  246.94 Hz).

Ovviamente, la variazione del parametro considerato comporta una conversione della frequenza così valutata nel passo di scansione della tabella di campioni, che viene ricavato in base alle relazioni (2.9) e (2.10).



## § 6.2 - Conclusioni e sviluppi futuri.

Il lavoro svolto ha portato a dei risultati abbastanza soddisfacenti in relazione a quanto era stato previsto; le forme d'onda ottenute sono abbastanza simili a quelle generate con altre tecniche di sintesi per modelli fisici ed il suono prodotto ha qualità piuttosto interessanti.

Il problema ancora da risolvere è relativo al transitorio iniziale (fase di attacco), caratteristica diversa di ogni strumento, dipendente, purtroppo, da diversi parametri casuali; tale transitorio, infatti, è legato anche al meccanismo di eccitazione che, per quanto visto, introduce diverse variabili aleatorie.

In ogni caso, pur perdendo di vista il concetto del modello fisico, sono stati proposti alcuni meccanismi di eccitazione che sfruttano sistemi non lineari, attraverso i quali vengono elaborate le onde viaggianti.

In tal senso, anche in questa sede viene introdotto uno studio qualitativo relativo ad un sistema non lineare.

L'ingresso è pilotato da una grandezza fisica variabile, tipo la pressione o la forza, la cui natura dipende dallo strumento trattato.

E' noto che il prodotto di due sinusoidi restituisce altre due forme sinusoidali, rispettivamente a frequenza somma e differenza di quelle originarie; sfruttando tale relazione si potrebbe pensare di definire un polinomio non lineare del tipo seguente

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^n A_i(x) \text{sen}^i \omega_0 t \quad (6.1)$$

dove una possibile definizione degli  $A_i(x)$  è discussa più avanti.

Il suo sviluppo è costituito da funzioni sinusoidali a frequenze  $\omega_0$ ,

$2\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0$ . In questa forma, però, la generazione di un numero elevato di righe comporta per la sommatoria un limite superiore anch'esso elevato.

Si può allora ricorrere ad un polinomio diverso in cui si hanno prodotti tra funzioni sinusoidali a frequenze diverse tra loro, del tipo

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^n A_i(x) \prod_{j=1}^i \text{sen } \omega_j t \quad (6.2)$$

In tal caso, pur riducendo il numero di interazioni, si è costretti ad una tabulazione delle pulsazioni da  $\omega_1$  ad  $\omega_n$ ; se, invece, si fissano i valori minimo e massimo di pulsazione in  $\omega_{\min}$  e  $\omega_{\max}$ , si evita così la tabulazione suddetta modificando l'espressione del polinomio

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^n A_i(x) \left\{ \prod_{j=1}^i \text{sen} [\omega_{\min} + (j-1)\Delta\omega]t \right\} \quad (6.3)$$

dove

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{n}$$

Per  $n=3$  si ottiene

$$f(x,t) = A_1 \text{sen } \omega_1 t + A_2 \text{sen } \omega_1 t \text{sen } \omega_2 t + A_3 \text{sen } \omega_1 t \text{sen } \omega_2 t \text{sen } \omega_3 t \quad (6.4)$$

dove



$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega \quad \text{e} \quad \omega_3 = \omega_1 + 2\Delta\omega$$

Le pulsazioni che vengono generate oltre a  $\omega_1$  sono in tal caso

$$\omega_1 + \omega_2 \quad \text{e} \quad |\omega_1 - \omega_2|$$

$$\omega_3 + \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_3 - \omega_1 - \omega_2, \quad \omega_3 + |\omega_1 - \omega_2| \quad \text{e} \quad \omega_3 - |\omega_1 - \omega_2|$$

Si vede che a differenza della relazione (6.1), per la quale ad  $n$  iterazioni occorrono corrispondono  $n$  righe spettrali, in questo caso se ne generano  $n!$  e ciò è tanto più conveniente quanto maggiore è la non linearità voluta.

I coefficienti  $A_i(x)$  possono essere definiti da funzioni lineari della variabile  $x$ , nulle prima di un certo istante e costanti da un certo  $x$  in poi; in Fig. 6.4 sono riportati alcuni grafici qualitativi di tali funzioni.

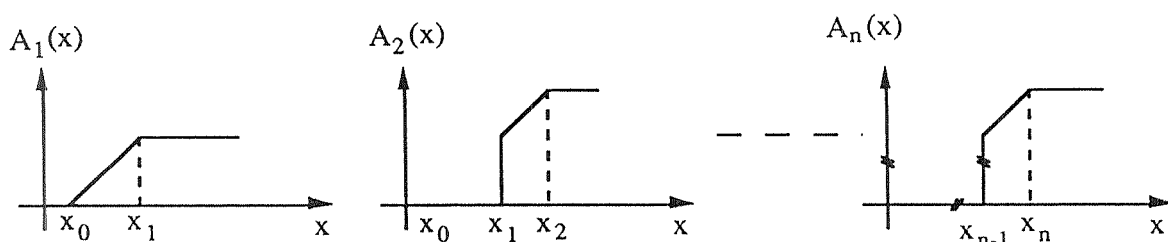


Fig. 6.4

Analiticamente, si può scrivere

$$A_i(x) = \begin{cases} k_i x u(x - x_i) & , \quad x < x_{i+1} \\ k_i x_{i+1} & , \quad x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (6.5)$$

dove  $u(x)$  è il gradino unitario.

In particolare, la forma analitica definitiva degli  $A_i(x)$  risulta la seguente.

$$A_i(x) = k_i \left[ (x - x_i) u(x - x_i) + (x_{i+1} + x_i - x) u(x - x_{i+1}) \right] \quad (6.6)$$

Anche in questo caso sarebbe necessaria una tabulazione della variabile  $x$ , ma si può ovviare a ciò utilizzando il metodo sfruttato precedentemente nella determinazione delle pulsazioni.

In termini di calcolo, per ogni  $A_i(x)$  occorre una moltiplicazione, mentre per la fattorizzazione sono necessarie  $n!$  moltiplicazioni ed  $n$  somme; effettivamente, le operazioni da eseguire sono molte, ma se si pensa che per ottenere un ampio spettro è sufficiente stabilire un limite basso per la sommatoria ( per  $n=4$  si ottengono 16 righe), l'utilizzazione di un meccanismo siffatto comincia a diventare ragionevole.

Notare che le funzioni dei coefficienti  $A_i(x)$  sono state scelte lineari per una maggiore efficienza di calcolo; ciò, comunque, non vieta di sfruttare anche per essi funzioni diverse e quindi non lineari.

Il meccanismo proposto non è ancora stato sperimentato perché il numero di operazioni da compiere, pur non essendo elevato, è sempre troppo alto per essere implementato su PC; oltretutto, se si considera che deve essere collegato virtualmente al mezzo di propagazione delle onde, si ha un ulteriore aggravio sempre in termini di calcolo.

La realizzazione dell'insieme costituito dal meccanismo studiato e dall'algoritmo viene comunque proposta come sviluppo futuro, da implementarsi su sistemi veloci, ad esempio basati su microprocessori DSP.

Nell'ottica di quanto è stato realizzato nella presente tesi di laurea, sono previsti altri sviluppi futuri legati a progetti sviluppati nell'ambito del reparto di Informatica Musicale del CNUCE.

In particolare, viene sottolineata l'esistenza di un editore grafico per algoritmi di sintesi, realizzato in ambiente Mac Intosh, oggetto di tesi precedenti [19] [20].

Esso consente di generare un metacodice ottimizzato, a partire da uno schema precedentemente tracciato su monitor; lo schema viene costruito sfruttando alcuni blocchi predefiniti visualizzati in una palette di icone situata al lato sinistro dello schermo.

Una loro selezione permette di posizionarne una o più copie su un agriglia virtuale avente una duplice funzione; la prima consiste in un corretto posizionamento dei vari simboli sullo schermo stesso, mentre la seconda consente di ricavare la priorità delle operazioni che l'algoritmo creato deve eseguire. Questa funzione sfrutta una teoria sui grafi sviluppata nell'ambito del lavoro citato.

In Fig. 6.4 è riportato un esempio di algoritmo di sintesi FM realizzato con l'editore in questione.

Oltre a quanto detto, tale editore permette di creare delle macro contenenti più blocchi tra quelli previsti.

In relazione a tali capacità, è pensabile un'estensione degli elementi atomici trattati, introducendo ulteriori blocchi rappresentanti guide d'onda digitali e giunzioni.

Infine, grazie alla possibilità della creazione di macro, è possibile generare delle librerie secondo la suddivisione dello strumento musicale in tre elementi principali fatta inizialmente.

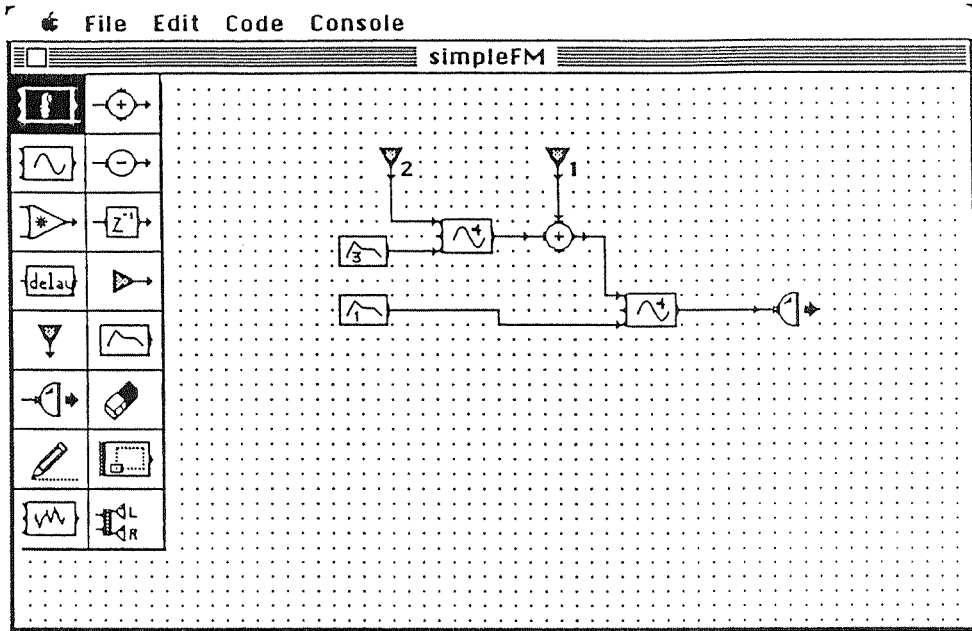


Fig 6.4

## BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Skudrzyk  
**The foundation of Acoustic**  
Springer Verlag, Wien New York, 1971
  
- [2] Juan G. Roeder  
**Introduction to physics and psychophysics of music**  
Springer Verlag, 1979
  
- [3] William W. Seto  
**Acustica**  
ETAS LIBRI, collana Schaum, 1978
  
- [4] Sergio Rosati  
**Fisica Generale, vol. I**  
Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1978

- [14] M. E. Mc Intyre, R. T. Schumacher, J. Woodhouse  
**On the Oscillation of Musical Instruments**  
J. Acoust. Soc. Am. 74 (5), Novembre 1983
- [15] Giovanni De Poli, Augusto Sarti, Giampaolo Borin, C.S.C Università di Pad  
**Sintesi per modelli fisici: strutture e metodi**  
ICMC Cagliari, 1989
- [16] Giovanni De Poli, Stefano Puppini, C.S.C Università di Padova  
**Un modello nel tempo del clarinetto: canna e fori**  
ICMC Cagliari, 1989
- [17] Julius O. Smith, C.C.R.M.A., Stanford University  
**Synthesis of Bowed String**  
ICMC San Francisco, 1983
- [18] BURR-BROWN  
**Integrated circuit data book, vol.33**  
Burr-Brown Corporation, 1989
- [19] L. Tarabella G. Bertini  
**A Digital Signal Processing System and a Graphic Editor  
for Synthesis Algorithms**  
Proc. ICMC 1989, Columbus-Ohio USA, pagg. 312-315